

Θεωρία

Πότε λέμε ότι ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση;

Απάντηση

Ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση όταν κινείται σε κυκλική τροχιά και το μέτρο της ταχύτητάς του διατηρείται σταθερό.

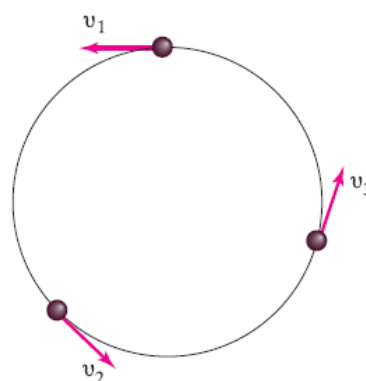
Τι ονομάζουμε περίοδο στην ομαλή κυκλική κίνηση; Ποια είναι η μονάδα περιόδου;

Απάντηση

Ονομάζουμε περίοδο στην ομαλή κυκλική κίνηση το χρόνο που χρειάζεται το σώμα για να εκτελέσει ένα πλήρη κύκλο.

Μονάδα περιόδου στο SI είναι το s.

Για παράδειγμα, ο δείκτης των δευτερολέπτων έχει περίοδο $T=60s$.



Ισχύει:

$$v_1=v_2=v_3.$$

Το σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Τι ονομάζουμε συχνότητα στην ομαλή κυκλική κίνηση;

Ποια είναι η μονάδα συχνότητας;

Απάντηση

Ένα σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση διαγράφει N κύκλους σε χρόνο t . Ονομάζουμε συχνότητα f το πηλίκο:

$$f = \frac{N}{t}$$

Μονάδα συχνότητας στο SI είναι το 1Hz (Χέρτς).

Σχέση συχνότητας και περιόδου.

Απάντηση

Ισχύει: $f=N/t$. Όταν $t=T$, τότε $N=1$ (σε μία περίοδο διαγράφεται ένας κύκλος).

Άρα ισχύει:

$$f = \frac{1}{T}$$

Τι ονομάζουμε επιβατική ακτίνα;

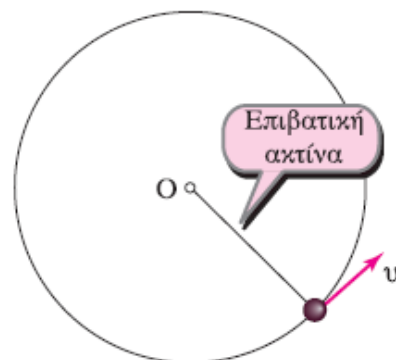
Απάντηση

Είναι μια περιστρεφόμενη ακτίνα.

Το ένα άκρο αυτής της ακτίνας είναι σταθερό και βρίσκεται διαρκώς στο κέντρο του κύκλου.

Το άλλο άκρο της ακτίνας βρίσκεται διαρκώς επάνω στο κινητό.

Καθώς το κινητό εκτελεί κυκλική τροχιά, η επιβατική ακτίνα περιστρέφεται.



Η επιβατική ακτίνα παρακολουθεί την κίνηση του κινητού.

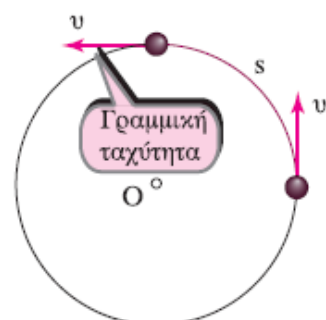
Ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.

Τι είναι η γραμμική ταχύτητα;

Απάντηση

Εάν σε χρόνο t το σώμα έχει διανύσει διάστημα s , τότε το πηλίκο

$$v = \frac{s}{t}$$



εκφράζει τη γραμμική ταχύτητα του κινητού.

Τι ονομάζουμε γωνιακή ταχύτητα στην ομαλή κυκλική κίνηση;

Ποια είναι η μονάδα μέτρησής της;

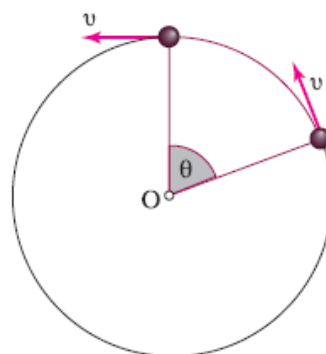
Απάντηση

Παρακολουθούμε την ομαλή κυκλική κίνηση ενός κινητού.

Σε χρόνο t η επιβατική ακτίνα έχει περιστραφεί κατά γωνία θ .

Το πηλίκο

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$



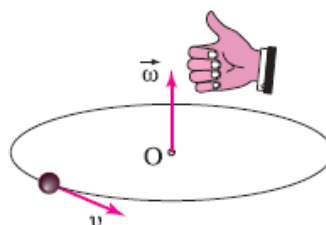
Το πηλίκο θ/t εκφράζει το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας.

εκφράζει το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του κινητού, με μονάδα μέτρησης το **rad/s**.

Η γωνιακή ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος.

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας έχει:

- ✓ Σημείο εφαρμογής το κέντρο του κύκλου.
- ✓ Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του κύκλου.
- ✓ Φορά που βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Η φορά του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας βρίσκεται με τη βοήθεια του δεξιού χεριού.

Σχέση των v και T .

Απάντηση

Ισχύει:

$$v = \frac{s}{t}.$$

Εάν $t=T$, τότε $s=2\pi R$ (σε μια περίοδο διαγράφεται ένας κύκλος).

Άρα:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Σχέση των v και f .

Απάντηση

Είναι:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \xrightarrow{f=1/T} v = 2\pi Rf$$

Σχέση των ω , T και f .

Απάντηση

Είναι: $\omega = \theta/t$. Εάν $t=T$, τότε $\theta=2\pi$ (σε μια περίοδο η επιβατική ακτίνα διαγράφει ένα πλήρη κύκλο). Τελικά:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Σχέση των v και ω .

Απάντηση

Ισχύει: $v = 2\pi Rf$. Όμως αποδείξαμε παραπάνω ότι $\omega = 2\pi f$.

Τελικά:

$$v = \omega \cdot R$$

Η ομαλή κυκλική κίνηση είναι κίνηση ομαλή; Μήπως έχει επιτάχυνση;

Απάντηση

Όχι! Η ομαλή κυκλική κίνηση δεν είναι κίνηση ομαλή. Δείτε και το σχήμα.

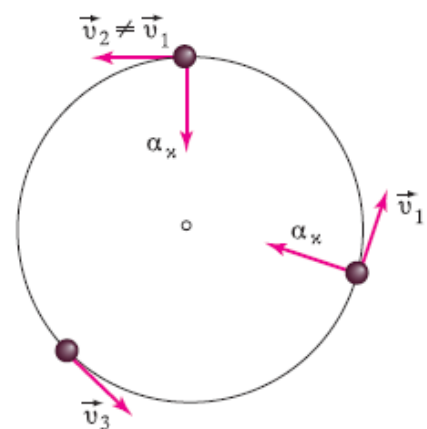
Η ταχύτητα δε μεταβάλλεται κατά μέτρο αλλά μεταβάλλεται η διεύθυνσή της.

Πρόκειται λοιπόν για μια μεταβαλλόμενη κίνηση.

Η επιτάχυνση του σώματος έχει κατεύθυνση διαρκώς προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και γι' αυτό ονομάζεται κεντρομόλος επιτάχυνση (a_k).

Ισχύει:

$$a_k = \frac{v^2}{R}$$



Τι είναι απαραίτητο να συμβαίνει για να εκτελεί ένα σώμα ομαλή κυκλική κίνηση;

Απάντηση

Στην προηγούμενη ερώτηση είδαμε ότι ένα σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση έχει κεντρομόλο επιτάχυνση a_k .

Αυτό σημαίνει ότι δέχεται συνισταμένη δύναμη F_k , για την οποία ισχύει:

$$F_k = m \cdot a_k.$$

Η δύναμη αυτή ονομάζεται **κεντρομόλος δύναμη**.

Ώστε: απαραίτητη συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα ομαλή κυκλική κίνηση είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν σ' αυτό να είναι μια κεντρομόλος δύναμη.

Μια δύναμη δηλαδή η οποία έχει κατεύθυνση διαρκώς προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και μέτρο:

$$F_k = m \cdot a_k \quad \text{ή} \quad F_k = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Ελάτε τώρα να δούμε μερικές περιπτώσεις κυκλικής κίνησης και να σχεδιάσουμε τις κεντρομόλες δυνάμεις.

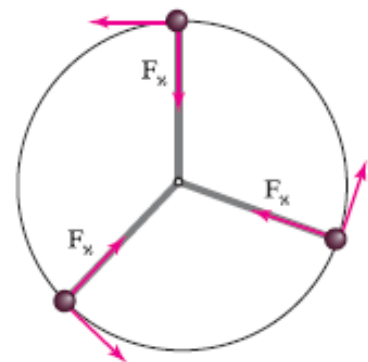
1^η περίπτωση:

Η πιο απλή περίπτωση είναι αυτή που βλέπετε στο διπλανό σχήμα.

Πρόκειται για ένα σώμα που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, στο άκρο ενός νήματος.

Βαρυτικές δυνάμεις δεν υπάρχουν.

Η δύναμη που εξασκεί το νήμα στο σώμα είναι η κεντρομόλος δύναμη.

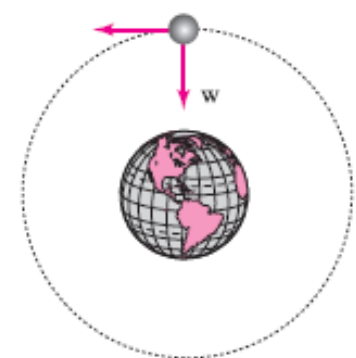


2^η περίπτωση:

Ένας δορυφόρος περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη.

Η Γη έλκει το δορυφόρο με δύναμη w .

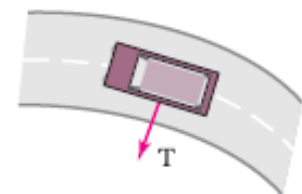
Η δύναμη αυτή είναι η κεντρομόλος δύναμη που ενεργεί στο δορυφόρο και τον αναγκάζει να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από τη Γη



3^η περίπτωση:

Ένα αυτοκίνητο κινείται σε στροφή με ταχύτητα σταθερού μέτρου.

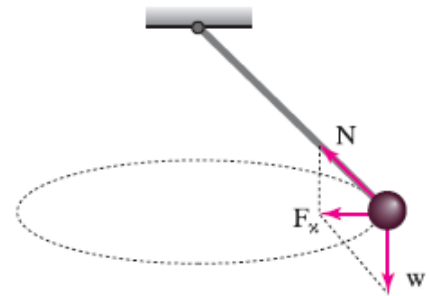
Εδώ η δύναμη τριβής αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη, η οποία αναγκάζει το αυτοκίνητο να στρίψει.



4^η περίπτωση:

Το κωνικό εκκρεμές είναι ένα εκκρεμές που κάνει την εξής κίνηση:

Η σφαίρα διαγράφει οριζόντιο κύκλο και το νήμα κωνική επιφάνεια (δηλαδή το νήμα διαγράφει ένα χωνί με την κορυφή του στο σημείο από το οποίο είναι εξαρτημένο).



Στη σφαίρα του εκκρεμούς ενεργούν οι εξής δυνάμεις:

- ✓ Το βάρος του σφαιριδίου w .
- ✓ Η δύναμη N του νήματος (τάση).

Η συνισταμένη F_c των w και N παίζει ρόλο κεντρομόλου.

Τυπολόγιο:

Συχνότητα:

$$f = \frac{N}{t}$$

Σχέση συχνότητας και περιόδου:

$$f = \frac{1}{T}$$

Γραμμική και γωνιακή ταχύτητα:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

Σχέσεις μεταξύ v , ω , T και f .

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$v = \omega \cdot R$$

$$v = 2\pi R f$$

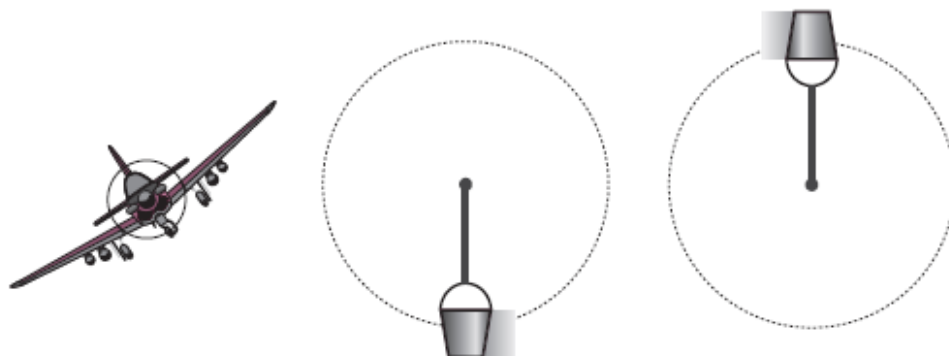
Κεντρομόλος επιτάχυνση, κεντρομόλος δύναμη:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

$$F_c = m \frac{v^2}{R}$$

1

Τα παρακάτω σχήματα δείχνουν ένα αεροπλάνο που στρίβει και ένα κουβά που διαγράφει κυκλική κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο, στην άκρη ενός σκοινιού. Σε κάθε σώμα να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ενεργούν και να υποδείξετε την κεντρομόλο δύναμη.



2

Να αντιστοιχίσετε τα μεγέθη στις μονάδες μέτρησής τους:

- | | | |
|----------------------|---|------------|
| 1) Γραμμική ταχύτητα | • | • α) N |
| 2) Γωνιακή ταχύτητα | • | • β) Hz |
| 3) Περίοδος | • | • γ) m/s |
| 4) Συχνότητα | • | • δ) rad/s |
| | | • ε) s |

3

Μια ράβδος περιστρέφεται με σταθερή συχνότητα γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο περιστροφής.

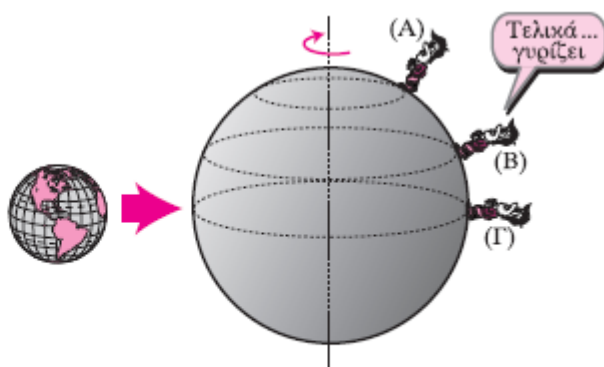
Ο άξονας διέρχεται από το ένα άκρο της ράβδου. Όλα τα σημεία της ράβδου:

- | | | |
|--|---|---|
| α) έχουν ίσες γραμμικές ταχύτητες. | Σ | Λ |
| β) έχουν ίσες γωνιακές ταχύτητες. | Σ | Λ |
| γ) έχουν ίσες περιόδους περιστροφής. | Σ | Λ |
| δ) έχουν ίσες κεντρομόλους επιταχύνσεις. | Σ | Λ |

4

Για τους τρεις ανθρώπους (Α), (Β) και (Γ) του σχήματος, που ζουν σε διαφορετικά γεωγραφικά πλάτη, ισχύει:

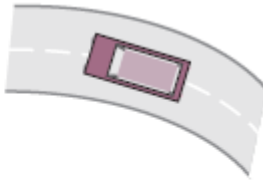
- | | | |
|--|---|---|
| I. α) $\omega_A = \omega_B = \omega_\Gamma$ | Σ | Λ |
| β) $\omega_A < \omega_B < \omega_\Gamma$ | Σ | Λ |
| γ) $\omega_A > \omega_B > \omega_\Gamma$ | Σ | Λ |
| II. α) $v_A = v_B = v_\Gamma$ | Σ | Λ |
| β) $v_A < v_B < v_\Gamma$ | Σ | Λ |
| γ) $v_A > v_B > v_\Gamma$ | Σ | Λ |



- 5 Για την κυκλική κίνηση που εκτελεί ένα κινητό ξέρουμε ότι η γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα δίνεται από τη σχέση $\varphi = 4\pi t$ (4π σε rad/s). Άρα:
- α) Το κινητό δεν κάνει ομαλή κυκλική κίνηση. ☐
 - β) Η γωνιακή ταχύτητα του κινητού είναι $\omega = 4\pi$ rad/s. ☐
 - γ) Η γωνιακή ταχύτητα του κινητού δεν μπορεί να βρεθεί. ☐
 - δ) Οι κύκλοι γίνονται με ρυθμό: 1κύκλος/s. ☐

- 6 Η ομαλή κυκλική κίνηση:
- α) είναι κίνηση ομαλή. ☐
 - β) είναι κίνηση μεταβαλλόμενη. ☐
 - γ) είναι μεν ομαλή κίνηση, αλλά η γωνιακή της ταχύτητα μεταβάλλεται. ☐
 - δ) δεν έχει νόημα να τη χαρακτηρίσουμε ομαλή ή μεταβαλλόμενη, γιατί δεν είναι ευθύγραμμη. ☐

- 7 Ένα αυτοκίνητο στρίβει σε οριζόντιο δρόμο. Η απαραίτητη κεντρομόλος δύναμη είναι...
- α) το βάρος του. ☐
 - β) η τριβή. ☐
 - γ) η κάθετη αντίδραση. ☐
 - δ) η ταχύτητα. ☐

- 8 Το αυτοκίνητο του σχήματος παίρνει στροφή σε οριζόντιο δρόμο. Ποια πρόταση είναι σωστή;
- 
- α) Στο αυτοκίνητο ενεργούν: το βάρος του, η κάθετη δύναμη στήριξης, η τριβή και η κεντρομόλος δύναμη. ☐
 - β) Η τριβή, που ενεργεί στα λάστιχα από την ασφαλτο, παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. ☐
 - γ) Στο αυτοκίνητο ενεργεί το βάρος του και η κάθετη δύναμη από τον δρόμο. Δεν υπάρχει τριβή γιατί το αυτοκίνητο δεν ολισθαίνει αλλά κυλάει. ☐
 - δ) Στο αυτοκίνητο ενεργεί το βάρος του, η κάθετη αντίδραση από τον δρόμο, η κεντρομόλος δύναμη και μια τριβή με κατεύθυνση αντίθετη της ταχύτητας. ☐

- 9 Ένας δίσκος περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο. Θέλουμε να τοποθετήσουμε πάνω του ένα κέρμα και να παρακολουθεί αυτό την κίνηση του δίσκου. Είναι καλύτερα να βάλουμε το κέρμα:
- α) κοντύτερα στον άξονα του δίσκου. ☐
 - β) κοντύτερα στην περιφέρεια του δίσκου. ☐
 - γ) οπουδήποτε πάνω στο δίσκο, το ίδιο είναι. ☐
 - δ) στα σημεία μιας περιφέρειας με ακτίνα $R/2$, όπου R η ακτίνα του δίσκου. ☐

- 10 Σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ κάνει ομαλή κυκλική κίνηση εκτελώντας 3 στροφές ανά δευτερόλεπτο σε κύκλο ακτίνας $R = 0,5\text{m}$.

I. Η συχνότητα της κίνησης είναι:

- α) 3Hz ☐ β) 1/3Hz ☐ γ) 3s ☐ δ) 1/3s ☐

II. Η ταχύτητα του είναι:

- α) $3\pi\text{m/s}$ ☐ β) $\pi/3\text{ m/s}$ ☐ γ) $6\pi\text{m/s}$ ☐ δ) $\pi/6\text{m/s}$ ☐

III. Η κεντρομόλος επιτάχυνση του είναι:

- α) $9\pi^2\text{m/s}^2$ ☐ β) $\pi^2/18\text{ m/s}^2$ ☐ γ) 70m/s^2 ☐ δ) $18\pi^2/6\text{m/s}^2$ ☐

IV. Η κεντρομόλος δύναμη είναι:

- α) $18\pi^2\text{N}$ ☐ β) $\pi^2/9\text{N}$ ☐ γ) 70N ☐ δ) $36\pi^2\text{N}$ ☐

1

Ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Η κυκλική τροχιά έχει ακτίνα $R=2\text{m}$ και η περίοδος της κίνησης είναι $T=2\text{s}$.

Να βρεθούν:

- α) Η συχνότητα f .
- β) Η γωνιακή ταχύτητα.
- γ) Η γραμμική ταχύτητα.
- δ) Ο αριθμός των περιστροφών, σε χρόνο 10s .
- ε) Το διάστημα που θα διανύσει το σώμα σε χρόνο 5s .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2

Η ώρα είναι τρεις ακριβώς.

Τι ώρα ο λεπτοδείκτης και ο ωροδείκτης θα συμπέσουν για πρώτη φορά, μετά τις τρεις;

Λύση



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Δύο (υλικά σημεία) κινούνται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R=200\text{m}$, με ταχύτητες $v_1=17,5\text{m/s}$ και $v_2=15\text{m/s}$.

Κάποια στιγμή διέρχονται ταυτόχρονα από ένα σημείο M της τροχιάς τους. Να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν πάλι για πρώτη φορά, στις εξής περιπτώσεις:

- α) Τα κινητά κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση.
- β) Τα κινητά κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις.
- γ) Τα κινητά κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση και συναντώνται και πάλι στο M .

Ένα σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση διαγράφοντας οριζόντιο κύκλο, ακτίνας $R=2\text{m}$, με περίοδο περιφοράς $T=4\text{s}$. Να βρεθούν:

α) η συχνότητα, η γωνιακή ταχύτητα και η γραμμική ταχύτητα του σώματος.

β) η κεντρομόλος επιτάχυνση και η κεντρομόλος δύναμη.

γ) πόση πρέπει να γίνει η περίοδος περιφοράς, χωρίς να αλλάξει η ακτίνα, για να διπλασιαστεί η κεντρομόλος δύναμη;

5

Ένα σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση διαγράφοντας οριζόντιο κύκλο, ακτίνας $R=2\text{m}$, με περίοδο περιφοράς $T=4\text{s}$. Να βρεθούν:

- α) η συχνότητα, η γωνιακή ταχύτητα και η γραμμική ταχύτητα του σώματος.
- β) η κεντρομόλος επιτάχυνση και η κεντρομόλος δύναμη.
- γ) πόση πρέπει να γίνει η περίοδος περιφοράς, χωρίς να αλλάξει η ακτίνα, για να διπλασιαστεί η κεντρομόλος δύναμη;

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6

Ένα σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση διαγράφοντας οριζόντιο κύκλο, ακτίνας $R=2\text{m}$, με περίοδο περιφοράς $T=4\text{s}$. Να βρεθούν:

- α) η συχνότητα, η γωνιακή ταχύτητα και η γραμμική ταχύτητα του σώματος.
- β) η κεντρομόλος επιτάχυνση και η κεντρομόλος δύναμη.
- γ) πόση πρέπει να γίνει η περίοδος περιφοράς, χωρίς να αλλάξει η ακτίνα, για να διπλασιαστεί η κεντρομόλος δύναμη;

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ας υποθέσουμε ότι μας καλούν να βοηθήσουμε την υπηρεσία οδικής σήμανσης της τροχαίας.

Πρόκειται να βάλουμε ανώτατο όριο ταχύτητας σε μια επικίνδυνη στροφή ενός δρόμου.

Θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής στοιχεία:

ακτίνα στροφής $R=32\text{m}$, συντελεστής τριβής $\mu=0,8$ και επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$.

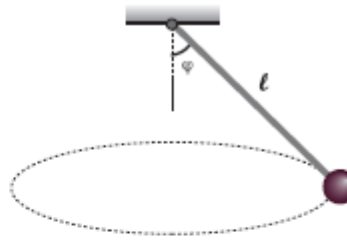
Ένα εκκρεμές αποτελείται από νήμα μήκους ℓ , του οποίου το ένα άκρο του είναι ακλόνητο ενώ στο άλλο άκρο του υπάρχει μια μικρή σφαίρα.

Δίνουμε μια μικρή ώθηση στη σφαίρα με τέτοιο τρόπο ώστε να διαγράφει οριζόντια κυκλική τροχιά.

Τότε το νήμα σχηματίζει κάθε στιγμή με την κατακόρυφο που περνάει από το σημείο στήριξης γωνία φ .

Δίνεται η επιτάχυνση g της βαρύτητας.

Να αποδείξετε ότι η συχνότητα της κυκλικής κίνησης της σφαίρας δίνεται από τη σχέση: $f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{\ell \cdot \sin \varphi}}$.



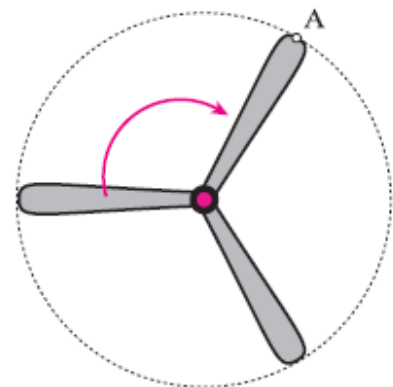
- 1 Παρακολουθούμε τη περιστροφή ενός ανεμιστήρα, που βρίσκεται στην οροφή ενός εστιατορίου. Κάθε φτερό έχει μήκος $d=1,25\text{m}$.

Ο ανεμιστήρας στρέφεται με συχνότητα $f=(1/\pi)\text{ Hz}$. Συμβολίζουμε με A ένα άκρο του ενός φτερού.

α) Σε πόσο χρόνο το άκρο A θα διαγράψει 25 πλήρεις κύκλους;

β) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της κυκλικής κίνησης που διαγράφει το άκρο A.

γ) Πόσο χρόνο θα χρειαστεί το σημείο A για να διανύσει διάστημα $s=100\text{m}$;



- 2 Ένας στίβος αποτελείται από δύο ημικυκλικές στροφές και δύο ευθείες. Δύο αθλητές A και B των 400m φτάνουν ταυτόχρονα σε μια στροφή του στίβου, τρέχοντας με την ίδια ταχύτητα $v=8\text{m/s}$.

Ο αθλητής A τρέχει στην εσωτερική διαδρομή που έχει ακτίνα $R_1=40\text{m}$ και ο B στην εξωτερική διαδρομή ακτίνας $R_2=50\text{m}$.

Μετά από χρόνο t ο ένας από αυτούς φτάνει πρώτος στο τέλος της στροφής.

α) Ποιος είναι αυτός; Ο A ή ο B;

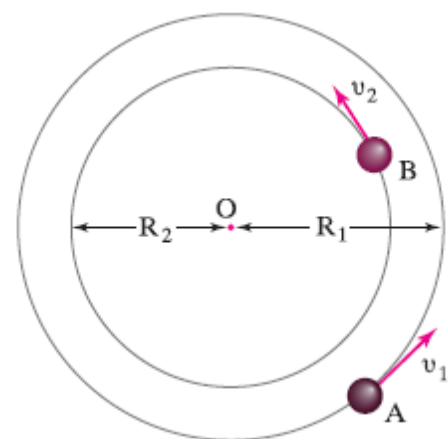
β) Πόσο απέχει ο άλλος αθλητής από το τέλος της στροφής τη χρονική στιγμή t ;

γ) Να βρεθεί ο λόγος των γραμμικών ταχυτήτων που θα έπρεπε να έχουν οι δύο αθλητές για να φτάσουν ταυτόχρονα στο τέλος της ημικυκλικής στροφής.

- 3 Δύο υλικά σημεία A και B περιφέρονται σε ομόκεντρες κυκλικές τροχιές ακτίνων $R_1=2,5\text{m}$ και $R_2=2\text{m}$.

α) Εάν τα δύο υλικά σημεία έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα, να βρεθεί ο λόγος των γραμμικών ταχυτήτων.

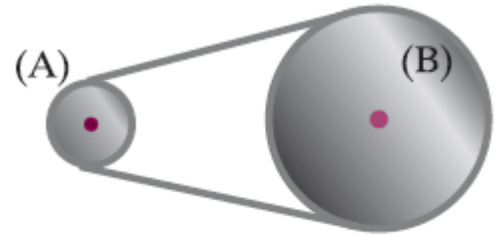
β) Εάν τα δύο υλικά σημεία έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα, να βρεθεί ο λόγος των γωνιακών ταχυτήτων.



4 **Σύστημα τροχών με ιμάντα ...**

Γύρω από τις περιφέρειες δύο τροχών (A) και (B) έχει τυλιχτεί ένας ιμάντας.

Ένας εξωτερικός μηχανισμός περιστρέφει τον τροχό (A), ο οποίος μεταδίδει την κίνηση στον τροχό (B). Ο λόγος των ακτίνων των τροχών είναι: $R_A/R_B=2/5$.



Η συχνότητα περιστροφής του τροχού A είναι $f_A=4\text{Hz}$.

Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τροχού B.

5 Δύο κινητά ξεκινούν ταυτόχρονα, από το ίδιο σημείο ενός κύκλου ακτίνας $R=21\text{m}$ και εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση πάνω στον κύκλο με ταχύτητες μέτρου $v_1=3\text{m/s}$ και $v_2=4,5\text{m/s}$.

Να βρεθεί μετά από πόσο χρόνο θα συναντηθούν για πρώτη φορά ...

α) εάν κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση.

β) εάν κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

γ) Εάν διαγράφουν τον κύκλο προς την ίδια κατεύθυνση, τότε σε πόσο χρόνο θα συναντηθούν στο σημείο από το οποίο ξεκίνησαν;

6 Τι ώρα μετά τις 12 ο λεπτοδείκτης και ο ωροδείκτης ...

α) συμπίπτουν για πρώτη φορά;

β) συμπίπτουν για δεύτερη φορά;

γ) σχηματίζουν ορθή γωνία για πρώτη φορά;



7 Να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί.

R (m)	f (Hz)	T (s)	ω (rad/s)	v (m/s)	N(περ/φές)	t (s)	s (m)
1	10					20	
2		5			4		
0,5			4				8π
			20	40		5	

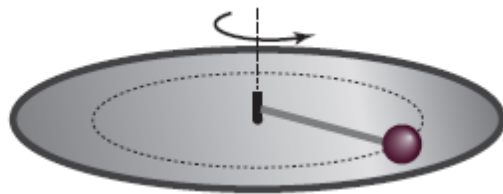
Για κάθε ομαλή κυκλική κίνηση να αποδείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

α) $a_k \cdot v = 8\pi^3 R^2 f^3$

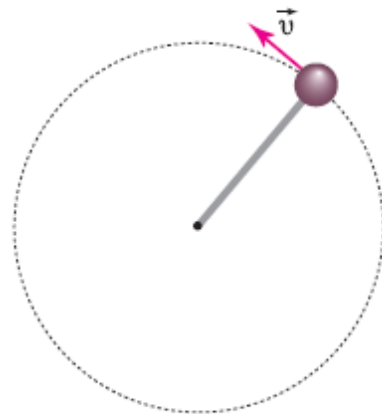
β) $T^2 \cdot (v^2 + a_k \cdot R) = 8\pi^2 R^2$

γ) $F_k \cdot R + m \cdot 4\pi^2 f^2 R^2 = 2mv^2$.

- 8 Ένας οριζόντιος δίσκος περιστρέφεται με συχνότητα $f=5\text{Hz}$. Μία σφαίρα μάζας $m=2\text{kg}$ βρίσκεται επάνω στο δίσκο και περιστρέφεται μαζί με αυτόν.
- Η σφαίρα συγκρατείται από σκοινί μήκους $d=0,5\text{m}$, που είναι δεμένο στον άξονα του δίσκου.
- Να βρεθούν:
- Η κεντρομόλος επιτάχυνση.
 - Η τάση του νήματος.
 - Εάν η αντοχή του νήματος είναι $T_{\max}$ είναι 1.600N , να βρεθεί η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα με την οποία μπορεί να περιστρέφεται ο δίσκος.
- Δίνεται $\pi^2=10$.



- 9 Ένα σώμα μάζας $m=0,5\text{kg}$ είναι δεμένο στην άκρη ενός σκοινιού και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με κέντρο το άλλο άκρο του σκοινιού. Θεωρήστε ότι το βάρος δεν παίζει κανένα ρόλο στο πρόβλημά μας.
- Η μεγαλύτερη συχνότητα με την οποία μπορεί να διαγράφει κύκλο το σώμα, χωρίς να κοπεί το σκοινί είναι $f=(5/\pi)\text{Hz}$.
- Να βρεθεί η αντοχή του σκοινιού.
 - Εστω ότι θέλουμε το σκοινί να τεντώνεται με δύναμη ίση με το $1/4$ της μέγιστης δύναμης που μπορεί να αντέξει.
- Ποια είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση του σώματος σ' αυτή την περίπτωση;



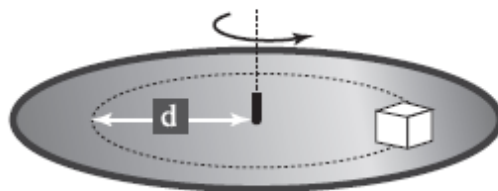
10
- **Ο δίσκος και το ζάρι.**

Ένας οριζόντιος δίσκος περιστρέφεται με συχνότητα $f=30\text{στροφές}/\text{min}$.

Έχουμε τη δυνατότητα να τοποθετούμε ένα ζάρι σε διάφορα σημεία επάνω στο δίσκο.

Δίνεται ο συντελεστής τριβής μεταξύ του ζαριού και του δίσκου είναι $\mu=0,225$, η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g=10\text{m/s}^2$ και $\pi^2=10$.

Να βρεθεί η μέγιστη απόσταση από τον άξονα του δίσκου στην οποία μπορεί να τοποθετηθεί το ζάρι ώστε να μην ολισθαίνει προς τα έξω.



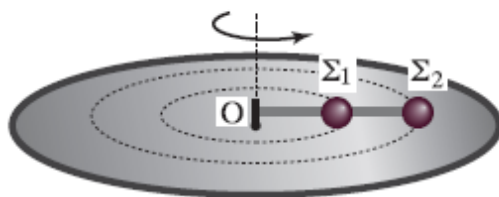
11 **Να υπολογιστούν οι τάσεις.**

Δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 έχουν μάζες $m_1=m$ και $m_2=3m$.

Οι σφαίρες δένονται με ανθεκτικά νήματα σε ίσες αποστάσεις $O\Sigma_1=\Sigma_1\Sigma_2=a$ και τοποθετούνται επάνω σε δίσκο.

Ο δίσκος τίθεται σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα $\omega=10\text{rad/s}$ και οι σφαίρες ακολουθούν την περιστροφή του δίσκου.

Να υπολογίσετε τις τάσεις των νημάτων.



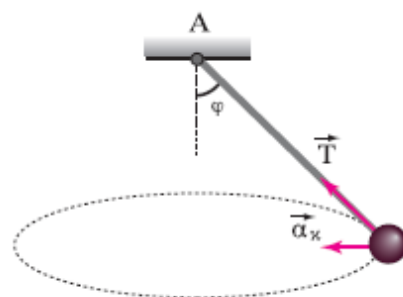
12 **Το κωνικό εκκρεμές.**

Η σφαίρα του σχήματος είναι δεμένη στο κάτω άκρο αβαρούς νήματος μήκους $\ell=2\text{m}$. Το άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο σε ένα ακλόνητο σημείο Α της οροφής (δείτε και το σχήμα).

Η σφαίρα διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας $r=1\text{m}$ γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το σημείο Α.

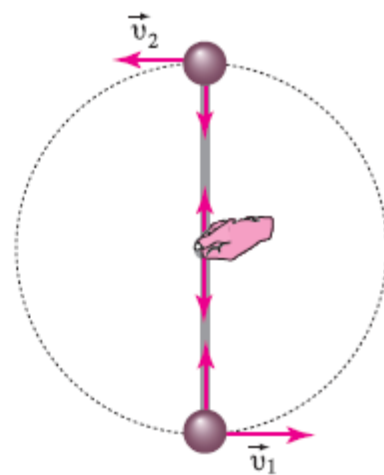
Η μάζα της σφαίρας είναι $m=0,45\text{kg}$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$.

Να βρεθεί η τάση του νήματος και η κεντρομόλος επιτάχυνση.



13 Μία σφαίρα μάζας $m=0,4\text{kg}$ είναι δεμένη στη μία άκρη αβαρούς νήματος. Πιάνουμε το νήμα από την άλλη άκρη και κουνάμε το χέρι μας αναγκάζοντας τη σφαίρα να διαγράψει κυκλική κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο.

Όταν η σφαίρα περνάει από το κατώτατο σημείο της τροχιάς της έχει ταχύτητα $v_1=10\text{m/s}$, ενώ στο ανώτατο σημείο έχει ταχύτητα $v_2=4\text{m/s}$.



Δίνεται το μήκος του νήματος $\ell=0,5\text{m}$ και η βαρύτητική επιτάχυνση $g=10\text{m/s}^2$.

Να βρεθεί η δύναμη που αισθανόμαστε στο χέρι μας:

- α) όταν η σφαίρα βρίσκεται στο κατώτατο σημείο της τροχιάς της και
- β) όταν βρίσκεται στο ανώτατο σημείο της τροχιάς της.

14 **Ο γύρος του θανάτου.**

Ο γύρος του θανάτου είναι μία απραξιών που γίνεται στο τσίρκο. Ένας μοτοσικλετιστής εκτελεί οριζόντιους κύκλους μέσα σε ένα μεγάλο κύλινδρο.

Η βάση του κυλίνδρου είναι οριζόντια επάνω στο έδαφος και τα τοιχώματά του είναι κατακόρυφα.

Σε ένα τέτοιο κύλινδρο ακτίνας $R=15\text{m}$ κινείται ένας μοτοσικλετιστής συνολικής μάζας $m=200\text{kg}$, με ταχύτητα $v=54\text{km/h}$.

α) Να υπολογιστεί η κάθετη αντίδραση που εξασκεί ο κύλινδρος στις ρόδες της μοτοσικλέτας.

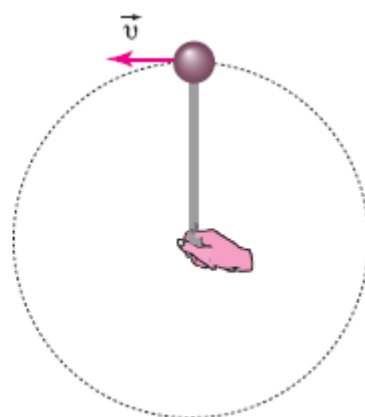
β) Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στις ρόδες και το κατακόρυφο τοίχωμα είναι $\mu=0,375$. Με ποια ελάχιστη ταχύτητα μπορεί να εκτελεί το νούμερο ο αναβάτης χωρίς να ολισθαίνει προς τα κάτω; Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

15 **Συνθήκη ανακύκλωσης.**

Μία σφαίρα είναι δεμένη στη μία άκρη αβαρούς νήματος. Αναγκάζουμε τη σφαίρα να διαγράψει κυκλική κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο.

Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα που μπορεί να έχει η σφαίρα όταν διέρχεται από το ανώτατο σημείο της τροχιάς της, χωρίς να λυγίσει το νήμα.

Δίνεται το μήκος του νήματος $\ell=0,4\text{m}$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$.



16 **Να βρεθεί η τάση του νήματος.**

Μία σφαίρα μάζας $m=2\text{kg}$ είναι δεμένη στη μία άκρη αβαρούς νήματος μήκους $\ell=2\text{m}$ και διαγράφει κυκλική κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο.

Το κέντρο της κυκλικής τροχιάς είναι το άλλο άκρο του νήματος.

Κάποια στιγμή που η σφαίρα διέρχεται από το κατώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς της, έχει γραμμική ταχύτητα με φορά όπως στο σχήμα και μέτρο $v=6\text{m/s}$.

α) Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας αυτή τη στιγμή.

β) Ποιο είναι το μέτρο της τάσης του νήματος;

γ) Εάν η μεγαλύτερη ταχύτητα με την οποία η σφαίρα διέρχεται από το κατώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς της χωρίς να κοπεί το νήμα είναι $v=8\text{m/s}$, να βρεθεί η αντοχή του νήματος.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$.

