

ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} =$

$$= 2 \cdot 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = -3$$

A2. $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot 2\vec{b} + (2\vec{b})^2 =$

$$= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = \sqrt{3}^2 - 4 \cdot (-3) + 4(2\sqrt{3})^2 = 3 + 12 + 48$$

$$= 63 \Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{63} \Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = 3\sqrt{7}$$

ΘΕΜΑ Β

B1. Πρέπει να μην είναι ταυτόχρονα $1-2\lambda=0$ και $\lambda+1=0$

$$\begin{cases} 1-2\lambda=0 \\ \lambda+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda=1 \\ \lambda=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{1}{2} \\ \lambda=-1 \end{cases} \text{ Άρα το } \textcircled{2} \text{ είναι αδύνατο} \\ \text{Άρα το } \textcircled{1} \text{ είναι σωστό } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

B2. $(1-2\lambda)x + (\lambda+1)y = 1-8\lambda \Leftrightarrow x - 2\lambda x + \lambda y + y = 1-8\lambda \Leftrightarrow$

$$(-2\lambda x + y + 8)\lambda + x + y - 1 = 0$$

Πρέπει $\begin{cases} -2x+y+8=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+8=0 \\ -x-y+1=0 \end{cases} \xrightarrow{x+y-1} \begin{cases} -2x+y+8=0 \\ -3x+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x=3}$

$$3+y-1=0 \Leftrightarrow \boxed{y=-2} \text{ Άρα } M(3, -2)$$

B3. Η $\textcircled{1}$ τέμνει τον $x'x$ για $y=0$ $(1-2\lambda)x = 1-8\lambda \Leftrightarrow$
 $\lambda \neq \frac{1}{2} \quad x = \frac{1-8\lambda}{1-2\lambda} \quad (\frac{1-8\lambda}{1-2\lambda}, 0)$

Η $\textcircled{1}$ τέμνει τον $y'y$ για $x=0$ $(\lambda+1)y = 1-8\lambda \Leftrightarrow y = \frac{1-8\lambda}{\lambda+1}$
 $\lambda \neq -1 \quad (0, \frac{1-8\lambda}{\lambda+1})$

Αρα $A\left(\frac{1-8\lambda}{1-2\lambda}, 0\right)$ $B\left(0, \frac{1-8\lambda}{\lambda+1}\right)$ $M(3, -2)$

Εφόσον M μέσο AB τότε
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \quad (*)$$

$\Leftrightarrow x_M = 3 = \frac{\frac{1-8\lambda}{1-2\lambda} + 0}{2} \quad \Leftrightarrow 6 = \frac{1-8\lambda}{1-2\lambda} \quad \Leftrightarrow 6 - 12\lambda = 1 - 8\lambda$

$-2 = \frac{0 + \frac{1-8\lambda}{\lambda+1}}{2} \quad \Leftrightarrow -4 = \frac{1-8\lambda}{\lambda+1} \quad \Leftrightarrow -4\lambda + 4 = 1 - 8\lambda$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 12\lambda - 8\lambda = 6 - 1 \\ 8\lambda - 4\lambda = 1 + 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda = 5 \\ 4\lambda = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{4}$

ΘΕΜΑ 3

$$\Gamma 1 \quad A = 4a, \quad B = -2(a+2), \quad \Gamma = 4a^2 + 4a + 4$$

$$\text{Πρέπει} \quad A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$$

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 - 4\Gamma &= (4a)^2 + [-2(a+2)]^2 - 4 \cdot (4a^2 + 4a + 4) = \\ &= 16a^2 + 4(a+2)^2 - 16a^2 - 16a - 16 = \\ &= 16a^2 + 4a^2 + 16a + 16 - 16a^2 - 16a - 16 = 4a^2 > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

10 κύκλος έχει κέντρο και ακτίνα:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

$$p = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

$$K\left(-\frac{4a}{2}, -\frac{-2(a+2)}{2}\right)$$

$$p = \frac{\sqrt{4a^2}}{2}$$

$$K(-2a, a+2)$$

$$p = \frac{2a}{2} = |a|$$

$$\Gamma 2 \quad x = -2a, \quad y = a+2 \quad \text{και η ευθεία είναι}$$

$$\begin{aligned} x = -2a &\Leftrightarrow x = -2(y-2) \Leftrightarrow x = -2y + 4 \Leftrightarrow \boxed{x + 2y - 4 = 0} \\ y = a+2 &\Leftrightarrow a = y-2 \end{aligned}$$

$\Gamma 3$ Για να εμφανίζεται κάποιος από τους κύκλους που ορίζονται από την (1) θα πρέπει να ισχύει

$$|y_k| = p \Leftrightarrow |a+2| = |a| \Leftrightarrow a+2 = a \quad \text{Αδύνατο}$$

$$\text{ή} \quad a+2 = -a \Leftrightarrow 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1$$

Αρα υπάρχει κύκλος με κέντρο $K(2, 1)$ και ακτίνα $p = 1$ οπότε έχει εξίσωση

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

Θέμα 4

$$B1. i) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4.$$

$$ii) \vec{a} \cdot \vec{\gamma} = \vec{a} \cdot (\vec{b} - 2\vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{a}|^2 = 4 - 2 \cdot 2^2 = 4 - 8 = -4$$

$$B2 \quad |\vec{\gamma}|^2 = |\vec{b} - 2\vec{a}|^2 = (\vec{b} - 2\vec{a})^2 = \vec{b}^2 - 2 \cdot 2 \cdot \vec{b} \cdot \vec{a} + (2\vec{a})^2 = |\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{a}|^2$$

$$= (2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 4 + 4(2^2) = 8 - 16 + 16 = 8 \Leftrightarrow |\vec{\gamma}| = \sqrt{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\vec{\gamma}| = 2\sqrt{2} = |\vec{b}|$$

$$\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\gamma}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{\gamma}) \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{\gamma}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\gamma}|} \Leftrightarrow$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{\gamma}) = \frac{-4}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos \frac{\pi}{4} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{\gamma}) = \frac{3\pi}{4} \quad \text{οι φθού: } 0 \leq (\vec{a}, \vec{\gamma}) \leq \pi$$

Θεμα 5

$$\Gamma_1: d(A, \varepsilon) = (AB) \Leftrightarrow \frac{|3 \cdot 1 + 3 + a|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-3)^2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{|6+a|}{\sqrt{10}} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} \Leftrightarrow \frac{|6+a|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |6+a| = \sqrt{10}^2 \Leftrightarrow$$

$$|6+a| = 10 \Leftrightarrow 6+a = 10 \Leftrightarrow \underline{a=4} \quad \text{ή}$$
$$\text{ή } 6+a = -10 \quad \underline{a=-16}$$

$$\Gamma_2: \text{Για } a=4 \text{ η } (\varepsilon): 3x+y+4=0$$

$$c) \text{ Η } \varepsilon \text{ τέμνει τον } \gamma' \gamma \text{ στο } \Gamma: x=0 \Rightarrow 3 \cdot 0 + y + 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$y = -4$$

$$\text{Αρα } \Gamma(0, -4) \quad \vec{AB} = (-3, -1) \quad \vec{A\Gamma} = (-1, -7)$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det \vec{AB}, \vec{A\Gamma}| \Leftrightarrow$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |21 - 1| = \frac{1}{2} |20| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$$

$$ii) \quad \lambda_\varepsilon = -3$$

$$J \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_J \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_J \cdot (-3) = -1 \Leftrightarrow \lambda_J = \frac{1}{3}$$

$$J: y = \frac{1}{3}x$$

6' τρόπο

$$\begin{aligned} \text{I: } & 3x + y + 4 = 0 \\ \text{II: } & y = \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

Το κ είναι το σημείο τομής τους

$$\begin{aligned} 3x + y + 4 = 0 & \begin{cases} \Leftrightarrow \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + \frac{1}{3}x + 4 = 0 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + x + 12 = 0 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 12 = 0 \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{12}{10} \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{5} \\ x = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{6}{5} \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases} \quad \text{Αρα } \kappa \left(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$