

Θέματα επανάληψης.

Σημείωση: Δεν μπορώ να γνωρίζω τι θα κληρωθεί. Ωστόσο στην εξέταση θα δείτε σίγουρα κάπου την κανονική κατανομή. Τα πρώτα 3 θέματα είναι ενδεικτικά από την τράπεζα. Ακολουθούν 2 δικά μου θέματα. Σημειώνεται ότι δεν υπονοείται ούτε σκοπεύω να βάλω ολόιδιο δικό μου θέμα στις εξετάσεις...

Θέμα 1

Ο Δείκτης Μάζας Σώματος (ΔΜΣ) χρησιμοποιείται ως διαγνωστικό εργαλείο, πιθανών προβλημάτων υγείας ενός ατόμου σε σχέση με το βάρος του. Υπολογίζεται διαιρώντας το βάρος του ατόμου, σε κιλά, με το τετράγωνο του ύψους του, σε μέτρα. Σε μια έρευνα επιλέχθηκε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα 5000 ανδρών και 5000 γυναικών και καταγράφηκε ο ΔΜΣ αυτών των ατόμων. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων φύλου και κατηγορίας ΔΜΣ, ως προς το φύλο.

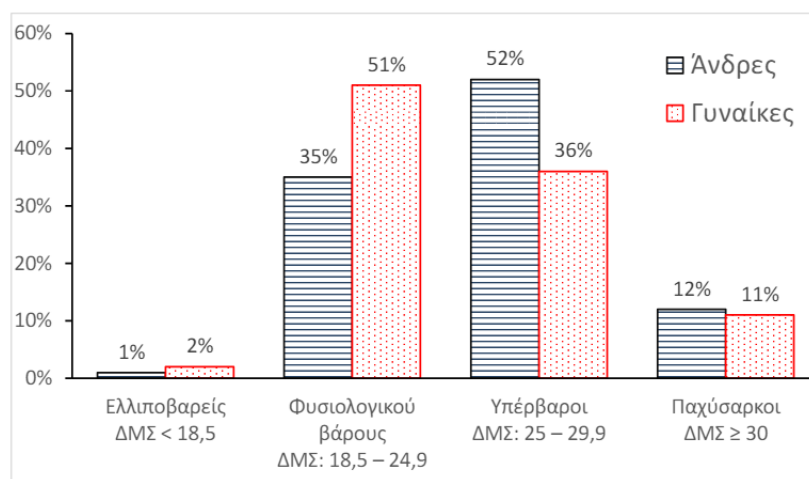
α) Σε ποια κατηγορία του ΔΜΣ παρατηρείται το μεγαλύτερο ποσοστό:

- i. των ανδρών, (Μονάδες 4)
- ii. των γυναικών; (Μονάδες 4)

β) Ποιο είναι το ποσοστό με βάρος μη-φυσιολογικό:

- i. των ανδρών, (Μονάδες 4)
- ii. των γυναικών, (Μονάδες 4)
- iii. όλων των ατόμων του δείγματος; (Μονάδες 4)

γ) Από την παραπάνω έρευνα, μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι η κατηγορία ΔΜΣ ενός ατόμου (ελλιποβαρές, φυσιολογικό, υπέρβαρο, παχύσαρκο) σχετίζεται με το φύλο του; (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α)

i. Το μεγαλύτερο ποσοστό των ανδρών, 52%, παρατηρείται στην κατηγορία «Υπέρβαροι».

ii. Το μεγαλύτερο ποσοστό των γυναικών, 51%, παρατηρείται στην κατηγορία «Φυσιολογικό βάρος».

β)

i. Το ποσοστό των ανδρών με μη φυσιολογικό βάρος είναι $100\% - 35\% = 65\%$.

Εναλλακτικά: $1\% + 52\% + 12\% = 65\%$.

ii. Το ποσοστό των γυναικών με μη φυσιολογικό βάρος είναι $100\% - 51\% = 49\%$.

Εναλλακτικά: $2\% + 36\% + 11\% = 49\%$.

iii. Επειδή το δείγμα αποτελείται από τον ίδιο αριθμό ανδρών και γυναικών, το ποσοστό όλων των ατόμων του δείγματος με μη φυσιολογικό βάρος είναι ίσο με το ημίθροισμα των ποσοστών με μη φυσιολογικό βάρος, των ανδρών και των γυναικών, άρα είναι

$$\frac{65\% + 49\%}{2} = 57\%.$$

Εναλλακτικά:

$$\frac{0,65 \cdot 5000 + 0,49 \cdot 5000}{5000 + 5000} = \frac{(0,65 + 0,49)5000}{10000} = \frac{1,14 \cdot 50}{100} = \frac{57}{100} = 57\%.$$

γ)

Το δείγμα της έρευνας είναι αντιπροσωπευτικό και το μέγεθός του, $5000 + 5000 = 10000$, είναι αρκετά υψηλό. Επιπλέον, φαίνεται από το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα, ότι η κατηγορία του ΔΜΣ ενός ατόμου φαίνεται να σχετίζεται με το φύλο του γιατί άνδρες και γυναίκες εμφανίζουν πολύ διαφορετικά ποσοστά φυσιολογικών και υπέρβαρων ατόμων.

Θέμα 2

Τα βάρη των αβγών, σε γραμμάρια, που παράγονται σε μία φάρμα, ακολουθούν την κανονική κατανομή. Τα αβγά πωλούνται σε τέσσερα μεγέθη:

- μικρό μέγεθος: με βάρος μικρότερο από 53 γραμμάρια
- μεσαίο μέγεθος: με βάρος από 53 έως 63 γραμμάρια
- μεγάλο μέγεθος: με βάρος από 63 έως 73 γραμμάρια
- πολύ μεγάλο μέγεθος: με βάρος μεγαλύτερο από 73 γραμμάρια

Έχει παρατηρηθεί, ότι μικρού μεγέθους είναι το 2,5% των αβγών και πολύ μεγάλου μεγέθους είναι επίσης το 2,5% των αβγών.

α) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή της κατανομής είναι 63 και η τυπική απόκλιση 5.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα ποσοστά των αβγών που αναμένονται, σε καθένα από τα τέσσερα μεγέθη.

(Μονάδες 10)

γ) Να συγκρίνετε το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μεγαλύτερο από 50 γραμμάρια με το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μικρότερο από 70 γραμμάρια.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Έστω μ η μέση τιμή και σ η τυπική απόκλιση των βαρών των αβγών που παράγονται στη φάρμα. Επειδή τα βάρη ακολουθούν την κανονική κατανομή, εκτιμάται ότι το ποσοστό των αβγών που τα βάρη τους ανήκουν στο διάστημα $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ είναι περίπου 95%. Λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής, αναμένεται να έχουν βάρος το πολύ $\mu - 2\sigma$, το 2,5% των αβγών και βάρος τουλάχιστον $\mu + 2\sigma$, επίσης το 2,5% των αβγών.

Επειδή τα μικρότερα βάρη έχουν τα αβγά μικρού μεγέθους που είναι το 2,5% των αβγών και τα μεγαλύτερα βάρη έχουν τα αβγά πολύ μεγάλου μεγέθους που είναι επίσης το 2,5% των αβγών, θα έχουμε $\mu - 2\sigma = 53$ και $\mu + 2\sigma = 73$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε

$$2\mu = 53 + 73 = 126, \text{ οπότε } \mu = 63.$$

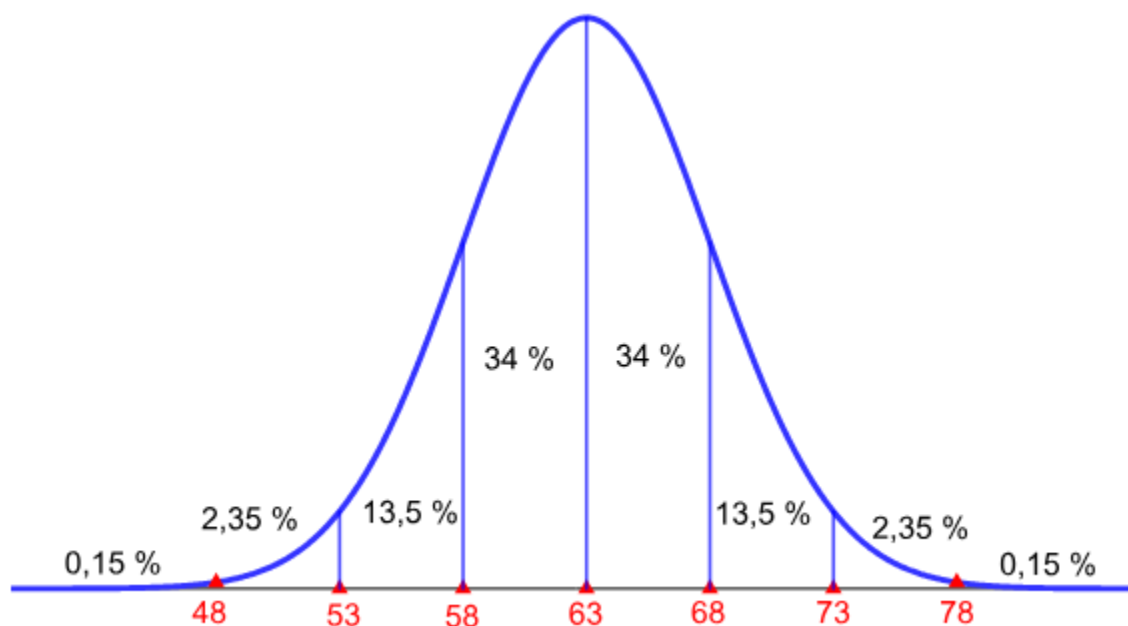
Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε

$$4\sigma = 73 - 53 = 20, \text{ οπότε } \sigma = 5.$$

β) Είδαμε προηγουμένως ότι η μέση τιμή της κανονικής κατανομής είναι 63 και η τυπική απόκλιση 5, οπότε αναμένεται το ποσοστό των αβγών με βάρος που ανήκει στο διάστημα:

- $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ ή (58, 68) να είναι περίπου 68% ,
- $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ ή (53, 73) να είναι περίπου 95% ,
- $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ ή (48, 78) να είναι περίπου 99,7%.

Σύμφωνα με τα παραπάνω και λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση (γκαουσιανή καμπύλη) της κατανομής:

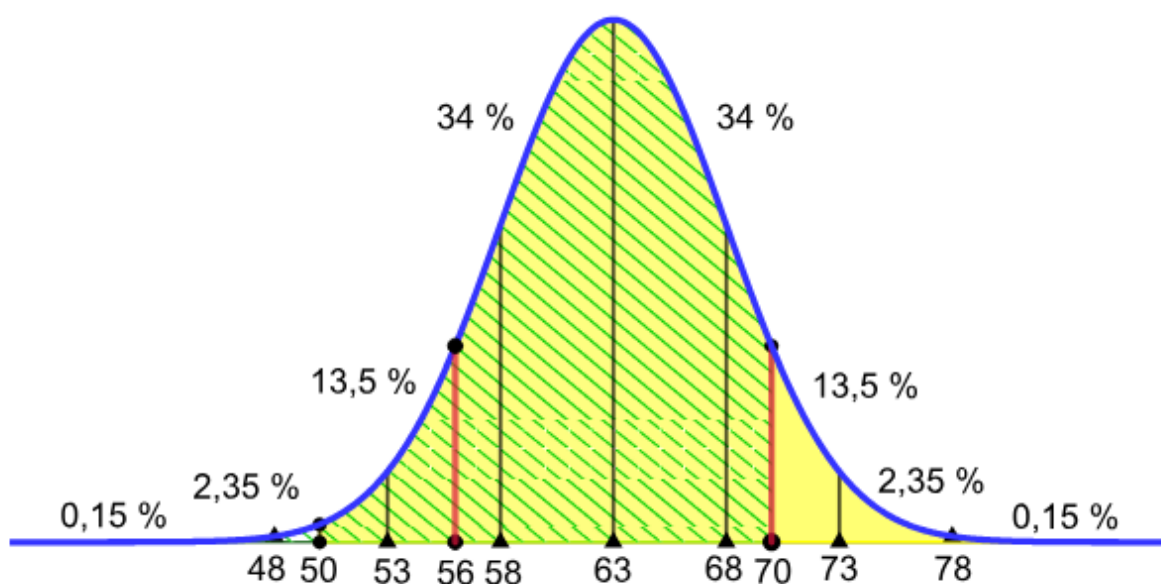


Επομένως τα ποσοστά των αβγών σε καθένα από τα τέσσερα μεγέθη, αναμένεται να είναι:

- μικρού μεγέθους (με βάρος μικρότερο από 53 γραμμάρια), το 2,5%.
- μεσαίου μεγέθους (με βάρος από 53 έως 63 γραμμάρια), το $13,5\% + 34\% = 47,5\%$.
- μεγάλου μεγέθους (με βάρος από 63 έως 73 γραμμάρια), το $13,5\% + 34\% = 47,5\%$.
- πολύ μεγάλου μεγέθους (με βάρος μεγαλύτερο από 73 γραμμάρια), το 2,5%.

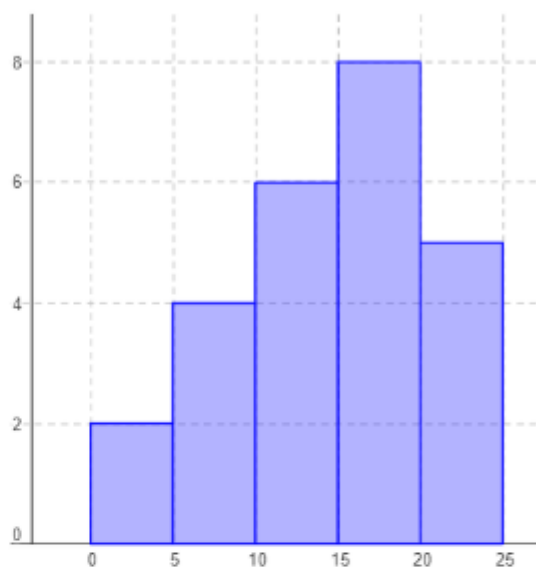
γ) Το ποσοστό των αβγών με βάρος κάτω από 70, είναι μικρότερο από το ποσοστό των αβγών με βάρος κάτω από 73, το οποίο είναι $100\% - 2,5\% = 97,5\%$. Το ποσοστό των αβγών με βάρος πάνω από 50, είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό των αβγών με βάρος πάνω από 53, το οποίο είναι $100\% - 2,5\% = 97,5\%$. Άρα το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μεγαλύτερο από 50 γραμμάρια είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μικρότερο από 70 γραμμάρια.

Εναλλακτικά: Λόγω συμμετρίας της κατανομής γύρω από το $\mu = 63$, το ποσοστό των αβγών με βάρος κάτω από $63 + 7 = 70$ είναι ίσο με το ποσοστό των αβγών με βάρος πάνω από $63 - 7 = 56$. Όμως το ποσοστό των αβγών με βάρος πάνω από 50, είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό των αβγών με βάρος πάνω από 56. Άρα το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μεγαλύτερο από 50 γραμμάρια είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μικρότερο από 70 γραμμάρια.



ΘΕΜΑ 2

Ρωτήσαμε μαθητές ενός τμήματος «πόσο χρόνο χρειάζονται για την διαδρομή από το σπίτι τους μέχρι το σχολείο» και οι απαντήσεις που πήραμε φαίνονται στο διπλανό ιστόγραμμα συχνοτήτων. Όπου ο οριζόντιος άξονας παριστάνει χρόνο σε λεπτά και ο κατακόρυφος μαθητές.



α) Να αντιγράψετε τον επόμενο πίνακα συχνοτήτων στο γραπτό σας και να τον συμπληρώσετε. (Μονάδες 5)

Κλάσεις με χρόνους (min)	Συχνότητα (μαθητές)
[0,5)	
[5,10)	
[10,15)	
[15,20)	
[20,25)	
Σύνολο	

β) Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα με τις σχετικές συχνότητες ($f_i, f_i\%$). (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που αφιερώνουν τουλάχιστον 15 λεπτά για αυτήν τη διαδρομή. (Μονάδες 5)

δ) Να μεταφέρετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων στο γραπτό σας και να σχεδιάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος.

Κλάσεις με χρόνους (min)	Συχνότητα (μαθητές)
[0,5)	2
[5,10)	4
[10,15)	6
[15,20)	8
[20,25)	5
Σύνολο	25

β) Ισχύει :

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{2}{25} = 0,08 \quad , \quad f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{4}{25} = 0,16 \quad , \quad f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{6}{25} = 0,24 \quad , \quad f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{8}{25} = 0,32$$

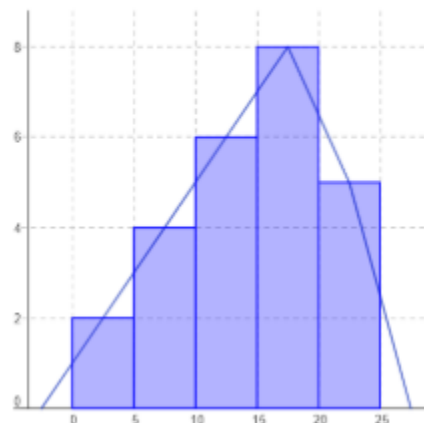
$$\text{και } f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{5}{25} = 0,20.$$

Οπότε ο πίνακας που προκύπτει είναι:

Κλάσεις με χρόνους (min)	Συχνότητα (μαθητές)	f_i	$f_i\%$
[0,5)	2	0,08	8%
[5,10)	4	0,16	16%
[10,15)	6	0,24	24%
[15,20)	8	0,32	32%
[20,25)	5	0,20	20%
Σύνολο	25	1,00	100%

γ) Οι μαθητές που αφιερώνουν τουλάχιστον 15 λεπτά για την διαδρομή αυτή ανήκουν στις κλάσεις [15,20) και [20,25) όπου τα αντίστοιχα ποσοστά είναι 32% και 20%, οπότε συνολικά είναι 52%.

δ) Θεωρούμε δύο επιπλέον κλάσεις ίσου πλάτους, μια στην αρχή και μια στο τέλος, με μηδενική συχνότητα. Ενώνουμε τα μέσα των άνω βάσεων και προκύπτει το πολύγωνο συχνοτήτων.



Άσκηση 1

(Ξύλινες σανίδες) Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει ξύλινες σανίδες. Το μήκος τους είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέσο μήκος τα 200 εκατοστά και τυπική απόκλιση 5 εκατοστά.

- A.** Ποιο ποσοστό από τις σανίδες της παραγωγής έχει μήκος τουλάχιστον 200 εκατοστά;
- B.** Αν το αποδεκτό μήκος σανίδας είναι από 190 ως 210 εκατοστά, ποια είναι η πιθανότητα να τύχουμε σανίδα με αποδεκτό μήκος, αν επιλέξουμε τυχαία μια σανίδα από την παραγωγή;
- Γ.** Ένας πελάτης χρειάζεται σανίδες με μήκος τουλάχιστον 195 εκατοστά. Αν παραγγείλει 1000 σανίδες, πόσες αναμένεται να έχουν μήκος εντός των επιθυμητών ορίων;

Λύση

A. Εφόσον η κανονική κατανομή εμφανίζει συμμετρία ως προς τη μέση τιμή και η μέση τιμή είναι 200 εκατοστά, τουλάχιστον 200 εκατοστά θα έχει το 50% της παραγωγής.

B. Παρατηρούμε ότι $190 = 200 - 2 \cdot 5 = \mu - 2\sigma$ και $210 = 200 + 2 \cdot 5 = \mu + 2\sigma$. Γνωρίζουμε ότι σε κάθε κανονική κατανομή, εντός του διαστήματος $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ βρίσκεται το 95% του πληθυσμού, άρα έχουμε 95% πιθανότητα να πέσουμε σε τέτοια σανίδα.

Γ. Τουλάχιστον 195 εκατοστά σημαίνει από $\mu - \sigma$ και πάνω. Γνωρίζουμε ότι σε κανονική κατανομή, στο διάστημα $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ έχουμε το 68% του πληθυσμού, άρα κάτω από $\mu - \sigma$ ή πάνω από $\mu + \sigma$ έχουμε το υπόλοιπο 32%. Λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής, κάτω από $\mu - \sigma$ θα έχουμε το $32\%/2 = 16\%$, οπότε από $\mu - \sigma$ και πάνω θα έχουμε το 84%. Άρα ο πελάτης θα πρέπει να περιμένει να λάβει περίπου 840 σανίδες με το επιθυμητό μήκος (το 84% των 1000 σανίδων που παρήγγειλε).

Εναλλακτικός υπολογισμός: Τουλάχιστον 200 εκατοστά είναι το 50% της παραγωγής. Από 195 ως 205 εκατοστά είναι το διάστημα $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ όπου έχουμε το 68%, άρα από 195 ως 200 εκατοστά έχουμε 34% της παραγωγής. Άρα από 195 εκατοστά και πάνω έχουμε το $34\% + 50\% = 84\%$, οπότε πρέπει να αναμένει 840 σανίδες με το επιθυμητό μήκος.

Άσκηση 2

Η σκόνη που σκέπασε την Αττική πρόσφατα, σύμφωνα με έναν podcaster γνωστό για τις θεωρίες συννομωσίας που διατυπώνει, προέρχεται από την Αφρική με πιθανότητα 60%, από την Κολομβία με πιθανότητα 45%, ενώ υπάρχει πιθανότητα 30% να προέρχεται και από τα δύο αυτά μέρη. Αν υποθέσουμε ότι ισχύουν όσα ισχυρίζεται ο podcaster, τότε να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- A)** Η σκόνη έχει προέλευση από τουλάχιστον ένα από αυτά τα δύο μέρη.
- B)** Η σκόνη δεν προέρχεται από κανένα από αυτά τα μέρη και έχει άλλη προέλευση (π.χ. ανακύκλωση κουραμπιέδων).
- Γ)** Η σκόνη έχει προέλευση ένα μόνο από αυτά τα δύο μέρη (αλλά όχι και τα δύο).

Λύση

(Η υπερβολή στο κακής ποιότητας χιούμορ αυτής της άσκησης υπάρχει για να τονίσει ότι δεν παίζει ρόλο το περιεχόμενο του πειράματος τύχης στη διαδικασία επίλυσης).

Σε όλες τις ασκήσεις αυτού του τύπου, ξεκινάμε ορίζοντας ΑΠΛΑ ενδεχόμενα.

Ορίζω τα ενδεχόμενα:

A: «Η σκόνη προέρχεται από την Αφρική».

K: «Η σκόνη προέρχεται από την Κολομβία».

Γνωρίζουμε τις πιθανότητες:

$$P(A) = 60\%, \quad P(K) = 45\%, \quad P(A \cap K) = 30\%$$

A) Αναζητούμε την πιθανότητα $P(A \cup K)$. Από τον προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A \cup K) = P(A) + P(K) - P(A \cap K) = 60\% + 45\% - 30\% = 75\%$$

B) Αναζητούμε την πιθανότητα $P[(A \cup K)']$. Από γνωστή ιδιότητα:

$$P[(A \cup K)'] = 1 - P(A \cup K) = 100\% - 75\% = 25\%$$

Γ) Αναζητούμε την πιθανότητα $P[(A - K) \cup (K - A)]$, η οποία υπολογίζεται με δύο τρόπους:

- $P[(A - K) \cup (K - A)] = P(A - K) + P(K - A) = 60\% - 30\% + 45\% - 30\% = 45\%$
- $P[(A - K) \cup (K - A)] = P(A \cup K) - P(A \cap K) = 75\% - 30\% = 45\%$

Για τον δεύτερο τρόπο και, γενικά, για πιο περίεργα ερωτήματα σε αυτού του τύπου τις ασκήσεις, μερικές φορές βοηθάει σημαντικά το διάγραμμα Venn.

Επίλογος: Δεν ξέρω τι θα πέσει και πώς θα τα πάτε. Εύχομαι, πρώτα από όλα, να πάτε καλά στις πανελλήνιες εξετάσεις, μιας και αυτό «καίει» τους περισσότερους αυτή τη στιγμή.

Τελειώνοντας το σχολείο και τις πανελλήνιες, εμένα μου αρέσει η φράση «**ό,τι είναι παρελθόν, είναι πρόλογος**». Δεν ήμουν ποτέ πολύ καλός στην έκθεση, αλλά εμένα αυτή η φράση μου λέει ότι ο πρόλογος, μπορεί, μεν, να δώσει μια αίσθηση για το τι θα ακολουθήσει, αλλά, πάλι, ποιος ξέρει προς τα πού θα το πάει ο συγγραφέας όταν έχει ολόκληρο βιβλίο να γράψει; Δεν σας καθορίζει ούτε ο συνολικός αριθμός μορίων, ούτε η σχολή που θα (ή δεν θα) περάσετε. Θα βιώσετε τα προσωπικά σας plot twists, αυτό είναι το μόνο βέβαιο. Αρκεί να έχετε καλά μόρια στην κλίμακα της ευτυχίας. Αυτό σας εύχομαι, λοιπόν.

Μια λέξη για τη σαχλαμάρα που έγινε στην τάξη μας. Δεν κρατάω κακία σε κανένα παιδί. Άλλωστε ποιος ηλίθιος μπορεί να κρατήσει κακία σε παιδί; Παιδί είναι...