

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης

$$x = e^{\frac{a}{x}}$$

για όλες τις πραγματικές τιμές του a .

Γ4. Αν $2\beta = \alpha + \gamma$, δείξτε ότι $\beta^\beta < \sqrt{\alpha^\alpha \gamma^\gamma}$, όπου $0 < \alpha < \beta < \gamma$.

Λύση Θέματος Γ

Γ1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$. (: Hospital).

Άρα συνεχής στο 0. Για $x > 0$, $f(x) = x \ln x$ συνεχής.

Γ2. Είναι $f'(x) = \ln x + 1$. Έτσι, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

x	0	$\frac{1}{e}$	∞
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↘	↗

Ολικό ελάχιστο $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

Τοπικό μέγιστο, $f(0) = 0$.

Επίσης $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, άρα f κυρτή.

Γ3. Είναι: $x = e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{a}{x} \Leftrightarrow f(x) = a$ και το σύνολο τιμών της f είναι

$$f(A) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right] \cup \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

Αν $a < -\frac{1}{e}$ τότε καμία λύση.

Αν $\alpha = -1/e$ τότε μία λύση $x = 1/e$

Αν $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$ τότε δύο ρίζες.

Αν $\alpha = 0$, τότε μία ρίζα $x = 1$.



Αν $\alpha > 0$, τότε μία ρίζα.

Γ5. Έχουμε:

$$\beta^\beta < \sqrt{\alpha^\alpha \gamma^\gamma}$$

$$\beta^{2\beta} < \alpha^\alpha \gamma^\gamma$$

$$2\beta \ln \beta < \alpha \ln \alpha + \gamma \ln \gamma$$

$$\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha < \gamma \ln \gamma - \beta \ln \beta$$

$$\frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \frac{\gamma \ln \gamma - \beta \ln \beta}{\gamma - \beta}$$

Από ΘΜΤ, $\exists \xi_1 \in (\alpha, \beta), \xi_2 \in (\beta, \gamma)$ ώστε

$f'(\xi_1) = \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha}$ και $f'(\xi_2) = \frac{\gamma \ln \gamma - \beta \ln \beta}{\gamma - \beta}$. Αλλά f κυρτή, άρα f' γνησίως αύξουσα,

άρα $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ που είναι το ζητούμενο.