

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) με $f(a) = f(\beta)$.

A) i) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ με $f'(\xi) = 0$.

ii) Δείξτε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $f'(x_1)f'(x_2) < 0$.

B) Θεωρούμε τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $N(\xi, f(\xi))$ του ερωτήματος A) και υποθέτουμε επιπλέον ότι

- Η ευθεία (δ) : $x = \xi$ είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης C_f
- $x_1 < x_2$ και $f(x_1) = f(x_2) = 0$.
- Η f είναι κοίλη στο διάστημα $[a, \beta]$.

Δείξτε ότι:

i) Τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $x = \xi$ και $f'(x_2) = -f'(x_1)$.

ii) Οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία A και B τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = \xi$.

iii) $0 < \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx < \frac{\Delta^2}{4} f'(x_1)$, όπου Δ το μήκος του διαστήματος $[x_1, x_2]$.

ΛΥΣΗ

A) i) Rolle στο $[a, \beta]$.

ii) Το Θεώρημα Μέσης Τιμής στα $[a, \xi]$, $[\xi, \beta]$ δίνει

$$f'(x_1) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}, \quad f'(x_2) = \frac{f(\beta) - f(\xi)}{\beta - \xi}$$

και αφού $f(a) = f(\beta)$ τα δεύτερα μέλη είναι ετερόσημα.

B) i) Είναι $f(x_1) = f(x_2)$ άρα μένει να δειχθεί ότι $x_1 + x_2 = 2\xi$ δηλαδή η τετμημένη του M είναι το μέσο των x_1, x_2 . Έστω $x'_1 \neq x_2$ το συμμετρικό του x_1 ως προς την ευθεία (δ) $x = \xi$ και έστω (χωρίς βλάβη)

$$x_1 < \xi < x'_1 < x_2.$$

Τότε $f(x'_1) = f(x_1) = f(x_2)$ επομένως από Θ. Rolle στο $[x'_1, x_2]$ υπάρχει $z \in (x'_1, x_2)$ με $f'(z) = 0$. Αλλά $z > \xi$ και f' γνησίως φθίνουσα, άρα

$$f'(z) < f'(\xi) \Rightarrow 0 < 0, \text{ άτοπο.}$$

Άρα δείξαμε τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $x = \xi$.

Από τη σχέση τώρα $x_1 + x_2 = 2\xi$ παίρνουμε $x_2 = 2\xi - x_1$, έτσι

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) = f(2\xi - x_1) \Rightarrow \\ f(x_1) &= f(2\xi - x_1) \end{aligned}$$

οπότε παραγωγίζοντας ως προς x_1 παίρνουμε

$$f'(x_1) = -f'(2\xi - x_1) = -f'(x_2).$$

ii) Οι Εξισώσεις των εφαπτομένων αποτελούν σύστημα ως προς (x, y) :

$$\begin{aligned} y - f(x_1) &= f'(x_1)(x - x_1) \\ y - f(x_2) &= f'(x_2)(x - x_2) \end{aligned}$$

Και από $f(x_1) = f(x_2) = 0$ και $f'(x_2) = -f'(x_1)$ αυτές γίνονται

$$y = f'(x_1)x - f'(x_1)x_1$$

$$y = -f'(x_1)x + f'(x_1)x_2$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \xi, y = f'(x_1) \frac{x_2 - x_1}{2}$$

που δίνει το ζητούμενο: το σημείο τομής $M(x, y) \in (\delta)$.

iii) Η f' είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$x_1 < x < \xi \Rightarrow f'(x_1) > f'(x) > f'(\xi) = 0$$

δηλαδή η f αύξουσα στο $[x_1, \xi]$ και όμοια η f φθίνουσα στο $[\xi, x_2]$ με το ξ θέση μεγίστου, ενώ

$$f(x_1) = 0 = f(x_2).$$

Συμπεραίνουμε από αυτά ότι η C_f στο

διάστημα $[x_1, x_2]$ είναι μη αρνητική.

Επομένως το εμβαδό που περικλείει η C_f

και ο άξονας $x'x$ είναι

$$E = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx > 0.$$

Επίσης η f είναι κοίλη άρα βρίσκεται κάτω

από τις εφαπτομένες στα A, B .

Επομένως το εμβαδόν E είναι μικρότερο

από το εμβαδό του τριγώνου $x_1 M x_2$ δηλαδή το

$$(x_1 M x_2) = \frac{1}{2} |x_2 - x_1| \cdot |y_M| = \frac{1}{2} |x_2 - x_1| \cdot \left| f'(x_1) \frac{x_2 - x_1}{2} \right| = \frac{1}{4} \Delta^2 f'(x_1).$$

