

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ και ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Αλεξέλλης

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Πολυώνυμο - βασικές έννοιες

- Καλούμε **πολυώνυμο** του x κάθε παράσταση της μορφής

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

όπου $n \in \mathbf{N}$ και $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0 \in \mathbf{R}$.

- Το α_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.
- **Μηδενικό** λέγεται το πολυώνυμο που όλοι οι όροι του είναι 0.
- **Σταθερό** λέγεται κάθε πολυώνυμο της μορφής α_0 ($\in \mathbf{R}$).

- Δύο πολυώνυμα

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{και} \quad \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$$

λέγονται **ίσα**, όταν $\mu = n$ και $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

- Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$.

1) Αν $\alpha_k = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$, τότε το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο και λέμε ότι δεν έχει βαθμό.

2) Έστω ότι υπάρχουν $\alpha_k \neq 0$ για κάποια $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ και έστω μ ο μεγαλύτερος από τα προηγούμενα k . Τότε λέμε ότι ο **βαθμός** του $P(x)$ είναι ο μ . Συμβολίζουμε: $\text{βαθμ}.P(x) = \mu$. Προφανώς, τότε, το πολυώνυμο γράφεται $P(x) = \alpha_\mu x^\mu + \alpha_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$.

- Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$.

Αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$ λέγεται ο αριθμός $P(\rho) = \alpha_n \rho^n + \alpha_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0$. **Ρίζα** του $P(x)$ είναι ένας αριθμός ρ με $P(\rho) = 0$. Λέμε ακόμα, τότε, ότι το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x) = 0$.

- Θεωρούνται γνωστές οι πράξεις των πολυωνύμων: πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός.

Διαίρεση πολυωνύμων

Θεώρημα (Ταυτότητα της διαίρεσης): Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x) \neq 0$, υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $u(x)$, τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + u(x),$$

όπου ή το $u(x) = 0$ (:μηδενικό πολυώνυμο) ή $\text{βαθμ.}u(x) < \text{βαθμ.}\delta(x)$.

Το $\Delta(x)$ λέγεται διαιρετέος, το $\delta(x)$ διαιρέτης, το $\pi(x)$ πηλίκο και το $u(x)$ υπόλοιπο της διαίρεσης.

- Η διαίρεση πολυωνύμων υπόκειται σε αλγόριθμο, που φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:

$x^3 - 5x^2 + 2x - 1$	$x - 3$
$-x^3 + 3x^2$	$x^2 - 2x - 4$
$-2x^2 + 2x - 1$	
$2x^2 - 6x$	
$-4x - 1$	
$4x - 12$	
-13	

Πόρισμα: Οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες:

- α) Το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$
- β) Το $\delta(x)$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$
- γ) Το $u(x) = 0$.

Θεώρημα: Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ο αριθμός $P(\rho)$.

Απόδειξη:

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι

$$P(x) = (x - \rho)\delta(x) + u(x) \quad (1).$$

Αλλά $\text{βαθμ.}(x - \rho) = 1$, άρα $\text{βαθμ.}u(x) = 0$, άρα το $u(x)$ είναι αριθμός ($= u$). Από την (1), για $x = \rho$, παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\delta(\rho) + u \Rightarrow P(\rho) = u.$$

Πόρισμα: Οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες:

- α) Το $x - \rho$ διαιρεί το $P(x)$
- β) Το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$
- γ) Το $P(\rho) = 0$ (: το ρ είναι ρίζα του $P(x)$)
- δ) Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - \rho)$ είναι 0.

- Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ μπορεί να δοθεί και με δεύτερη μέθοδο, που λέγεται σχήμα του **Horner**, και φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα: Έστω η διαίρεση

$$(3x^5 + 3x^4 + 6x - 13) : (x - 2).$$

x^5	x^4	x^3	x^2	x	.	
3	3	0	0	6	-13	2
	6	18	36	72	156	
3	9	18	36	78	143	

Το πηλίκο $\pi(x) = 3x^4 + 9x^3 + 18x^2 + 36x + 78$.

Το υπόλοιπο $u = 143$.

Πολυωνυμικές εξισώσεις

- **Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n** ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$.
- **Ρίζα** μιας εξίσωσης $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, λέγεται ένας αριθμός ρ , ώστε $P(\rho) = 0$.

Παρατήρηση: Έστω η εξίσωση $P(x) = 0$.

- Αν η εξίσωση είναι 1^{ου} βαθμού, τότε χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.
- Αν η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού, φέρουμε όλες τις παραστάσεις στο πρώτο μέλος και βρίσκουμε τις ρίζες μέσω της διακρίνουσας.

- Αν η εξίσωση είναι 3^{ου} βαθμού και πάνω, φέρουμε (συνήθως) όλες τις παραστάσεις στο πρώτο μέλος και παραγοντοποιούμε. Τότε η εξίσωση γίνεται :

$$P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \dots \cdot P_k(x) = 0 \Leftrightarrow \{ P_1(x) = 0 \text{ ή } P_2(x) = 0 \text{ ή } \dots \text{ ή } P_k(x) = 0 \}.$$

Η μέθοδος Horner είναι μια μέθοδος παραγοντοποίησης, αρκεί να γνωρίζουμε το διαιρέτη του $P(x)$, ώστε το υπόλοιπο να είναι 0. Σ' αυτό απαντά το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα (ακεραίων ριζών):

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές.

Αν ο ακέραιος $p \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο p διαιρεί το σταθερό όρο a_0 .

Απόδειξη:

Έστω $p \neq 0$ ρίζα της εξίσωσης. Τότε :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = -a_n p^n - a_{n-1} p^{n-1} - \dots - a_1 p$$

$$\Leftrightarrow a_0 = p(-a_n p^{n-1} - a_{n-1} p^{n-2} - \dots - a_1).$$

Επειδή $p, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{Z}$, έπεται ότι $-a_n p^{n-1} - a_{n-1} p^{n-2} - \dots - a_1 \in \mathbf{Z}$. Άρα ο p διαιρεί το a_0 .

Πόρισμα: Οι πιθανές ακέραιες ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές, βρίσκονται ανάμεσα στους διαιρέτες του σταθερού όρου.

Θ Ε Μ Α Τ Α

Μερικές από τις παρακάτω ασκήσεις είναι ανοικτού και μερικές κλειστού τύπου. Απαντήστε ανάλογα.

A. Ασκήσεις Επιλογής

Επιλέξτε το Σωστό ή Λάθος:

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
1) Ένα πολυώνυμο μηδενικού βαθμού είναι αριθμός:	Σ	Λ
2) Ένας αριθμός είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού:	Σ	Λ

3) Το πολυώνυμο 0 έχει άπειρες ρίζες:	Σ	Λ
4) Ένα σταθερό πολυώνυμο δεν έχει ρίζες:	Σ	Λ
5) Δύο πολυώνυμα με ίδιες ρίζες είναι ίσα:	Σ	Λ
6) Δύο πολυώνυμα ίσα έχουν τις ίδιες ρίζες:	Σ	Λ
7) Έστω το $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, με συντελεστές ακέραιους. Αν το p είναι διαιρέτης του a_0 , τότε το p είναι ρίζα του $P(x)$:	Σ	Λ
8) Δύο πολυώνυμα μη μηδενικού βαθμού χωρίς ρίζες είναι ίσα:	Σ	Λ
9) Δύο πολυώνυμα μηδενικού βαθμού είναι ίσα:	Σ	Λ
10) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)$ του οποίου η γραφική παράσταση δεν τέμνει τον άξονα $x'x$. Τότε το πολυώνυμο αυτό έχει τουλάχιστον ένα παράγοντα πρώτου βαθμού:	Σ	Λ
11) Ο βαθμός του γινομένου δύο πολυωνύμων μπορεί και να είναι ίσος με το βαθμό ενός από αυτά:	Σ	Λ
12) Το υπόλοιπο στη διαίρεση δύο πολυωνύμων έχει πάντα βαθμό:	Σ	Λ
13) Αν ένα πολυώνυμο έχει τόσες (διαφορετικές) ρίζες όσες και ο βαθμός του, τότε διαιρείται από ένα πολυώνυμο $2^{\text{ου}}$ βαθμού με διακρίνουσα αρνητική:	Σ	Λ
14) Κάθε ρίζα ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές διαιρεί το σταθερό όρο του πολυωνύμου:	Σ	Λ

15) Ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές και με σταθερό όρο ίσο με 0 δεν έχει ακέραιες ρίζες:	Σ	Λ
16) Αν το $x^2 - \rho^2$ διαιρεί το πολυώνυμο $P(x)$, τότε τα $\rho, -\rho$ είναι ρίζες του $P(x)$:	Σ	Λ
17) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός μη σταθερού πολυωνύμου με ένα μη μηδενικό σταθερό πολυώνυμο είναι πάντα 0:	Σ	Λ
18) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός σταθερού πολυωνύμου με ένα μη μηδενικό σταθερό πολυώνυμο είναι πάντα 0:	Σ	Λ
19) Το πηλίκο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου με τον εαυτό του είναι το σταθερό πολυώνυμο 1:	Σ	Λ
20) Αν ένα πολυώνυμο $Q(x)$ διαιρεί ένα πολυώνυμο $P(x)$, τότε υπάρχουν σημεία του άξονα $x'x$ που ανήκουν στη γραφική παράσταση του $Q(x)$ και δεν ανήκουν στη γραφική παράσταση του $P(x)$:	Σ	Λ

B. Ασκήσεις πολλαπλής επιλογής

1) Στη διαίρεση $P(x) : \delta(x)$ το υπόλοιπο είναι $u = 5$. Τότε το υπόλοιπο στη διαίρεση $(P(x) - 5) : \delta(x)$ είναι:

- | | |
|------|-------|
| α. 5 | β. -5 |
| γ. 0 | δ. 10 |

2) Το πλήθος των ριζών του $P(x) = x^{2001} + x^{1999} + \dots + x^3 + x$ είναι:

- | | |
|---------|------|
| α. 2001 | β. 2 |
| γ. 2000 | δ. 1 |

3) Το πολυώνυμο $x^n - 1$ αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων πλήθους:

- α. 1
- β. 2
- γ. 3
- δ. 4

4) Το πολυώνυμο $x^n + 1$, όταν το n είναι άρτιος, έχει πλήθος ριζών ίσο με:

- α. 0
- β. 3
- γ. 2
- δ. 1

5) Αν το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^n - 1)x^5 + (1 - \lambda)x + 8$, $\lambda \in \mathbf{R}$, είναι μηδενικού βαθμού, τότε το πολυώνυμο $q(x) = (\lambda^3 - 1)x^3 - (1 - \lambda^2)x + (\lambda + 1)x - (1 - \lambda)$ είναι:

- α. μηδενικού βαθμού
- β. το μηδενικό πολυώνυμο
- γ. πρώτου βαθμού
- δ. τρίτου βαθμού

6) Έστω $P(x)$ σταθερό πολυώνυμο και έστω $P(10^{2000}) = 2000$. Τότε το $P(10^{1999})$ είναι ίσο με:

- α. 0
- β. 1999
- γ. 2000
- δ. 1

7) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^{1998} + 1$. Αν $P(a + 1997) = 1$, τότε για τον πραγματικό αριθμό a ισχύει:

- α. $a > 1997$
- β. $a = 1997$
- γ. $a = -1997$
- δ. κανένα από τα προηγούμενα

8) Αν $(x^2 - 1)P(x) = x^6 - 2x^4 + 5x - 8$, τότε το $P(x)$ έχει βαθμό:

- α. τρίτο
- β. τέταρτο
- γ. μηδενικό
- δ. πέμπτο

9) Έστω $\text{βαθμ.}P(x) = 10$ και έστω $\text{βαθμ.}\delta(x) = 5$. Αν διαιρέσουμε το $P(x)$ με το $\delta(x)$, τότε ο βαθμός του υπολοίπου είναι:

- α. τουλάχιστον 10
- β. μικρότερος από το βαθμό του πηλίκου
- γ. ακριβώς 5
- δ. τουλάχιστον 5

α. 1	β. -1
γ. 0	δ. άλλο

α. 2 β. το πολύ 2
γ. 0 δ. τουλάχιστον 2

α. κ	β. -κ
γ. 0	δ. κρ

$\alpha.10$	$\beta. -1$
$\gamma. 4$	$\delta. -8$

α. ίδια μοναδική ρίζα β. ίδιο συντελεστή του x
γ. ίδιο σταθερό όρο δ. τίποτα από τα προηγούμενα

$\alpha. 0$	$\beta. 1$
$\gamma. 2$	$\delta. 3$

1) Δείξτε ότι αν το $(x-\alpha)$ και το $(x-\beta)$ διαιρούν το $P(x)$, τότε το διαιρεί και το $(x-\alpha)(x-\beta)$, $\alpha \neq \beta$.

9

Το $x-\alpha$ διαιρεί το $P(x) \Rightarrow P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ (1),

όπου $Q(x)$ πολυώνυμο.

Αφού το $x-\beta$ διαιρεί το $P(x) \Rightarrow P(\beta) = 0 \Rightarrow (\beta-\alpha)Q(\beta) = 0 \Rightarrow Q(\beta) = 0 \Rightarrow$ το $x-\beta$ διαιρεί το $Q(x) \Rightarrow Q(x) = (x-\beta)\pi(x)$ (2),

όπου $\pi(x)$ πολυώνυμο. Από (1),(2) $\Rightarrow P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\pi(x)$.

Άρα το $(x-\alpha)(x-\beta)$ διαιρεί το $P(x)$.

2) Δείξτε ότι ένα πολυώνυμο βαθμού k δεν μπορεί να έχει πάνω από k ρίζες. Πόρισμα: Αν ένα πολυώνυμο έχει άπειρες ρίζες, είναι το μηδενικό.

Απόδειξη:

Έστω ότι $\text{βαθμ.}P(x) = k$ και έστω ότι το $P(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1, \dots, \rho_k, \rho_{k+1}$. Τότε τα $x - \rho_1, \dots, x - \rho_k, x - \rho_{k+1}$ είναι παράγοντες του $P(x)$. Άρα το $(x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_k)(x - \rho_{k+1})$ είναι παράγοντας του $P(x)$ κι επειδή $\text{βαθμ.}[(x - \rho_1)(x - \rho_2) \dots (x - \rho_k)(x - \rho_{k+1})] = k+1$, έπεται $\text{βαθμ.}P(x) \geq k+1$. Άτοπο.

3) Δώστε παράδειγμα δύο πολυωνύμων που έχουν μία ρίζα ίδια και μοναδική και δεν είναι ίσα.

4) Αν ένα πολυώνυμο $\delta(x)$ διαιρεί το $P(x)$, τότε δείξτε ότι οι ρίζες του $\delta(x)$ είναι και ρίζες του $P(x)$.

5) Έστω ότι $\text{βαθμ.}\delta(x) \geq \text{βαθμ.}P(x)$. Ποιό είναι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : \delta(x)$; Ποιός είναι ο βαθμός του υπολοίπου;

6) Δείξτε ότι το $ax+\beta$ διαιρεί το $P(x)$, αν και μόνο αν $P(-\frac{\beta}{\alpha}) = 0$.

7) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)(x-2)Q(x)$. Επιλέξτε για $Q(x)$ ένα πολυώνυμο μη μηδενικού βαθμού τέτοιο, ώστε να μην έχει ρίζες τα 1,2 και το $P(x)$ να μην έχει άλλες ρίζες εκτός των 1,2.

8) Ποιά είναι η γραφική παράσταση ενός πολυωνύμου μηδενικού βαθμού; Εξηγήστε γεωμετρικά ότι ένα μηδενικού βαθμού πολυώνυμο δεν έχει ρίζες. Εξηγήστε, πάλι, γεωμετρικά ότι δύο πολυώνυμα της μορφής $x-a$, $x-b$ δεν έχουν κοινή ρίζα, αν $a \neq b$.

9) Βρείτε ένα πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού που η γραφική του παράσταση βρίσκεται κάτω από τον $x'x$.

10) Βρείτε τα α, β ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$4x^3 + 20x^2 + 33x = (2x + 5)(2x + 3)(\alpha x + \beta) + 2x - 15.$$

11) Αν $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x + 6$ και $g(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, βρείτε τα a_0, a_1, a_2, a_3 ώστε η διαφορά $f(x) - g(x)$ να είναι πολυώνυμο: 1) 3^{ου} βαθμού, 2) το πολύ 2^{ου} βαθμού, 3) 1^{ου} βαθμού, 4) μηδενικού βαθμού, 5) το μηδενικό πολυώνυμο.

12) Αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = \kappa(\alpha - \beta)x^2 + \lambda(\beta - \gamma)x + \mu(\gamma - \alpha)$, $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, είναι το μηδενικό.

13) Βρείτε όλα τα τριώνυμα $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, με $f(x+1) = f(-x)$.

14) α) Δείξτε ότι κάθε πολυώνυμο $f(x)$ διαιρείται με κάθε πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.

β) Αν το $g(x)$ είναι διαιρέτης του $f(x)$, τότε και το $\kappa g(x)$, $\kappa \in \mathbf{R}^*$, είναι διαιρέτης του $f(x)$.

γ) Τα μοναδικά πολυώνυμα που είναι διαιρέτες του $f(x) \neq 0$, και έχουν τον ίδιο βαθμό μ' αυτό, είναι τα $\kappa \cdot f(x)$, $\kappa \neq 0$.

15) Αν το $g_1(x)$ διαιρεί το $f_1(x)$ και το $g_2(x)$ διαιρεί το $f_2(x)$, δείξτε ότι το $g_1(x) g_2(x)$ διαιρεί το $f_1(x) f_2(x)$.

16) α) Αν το $g(x)$ διαιρεί ένα από τα $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$, τότε διαιρεί και το γινόμενό τους.

β) Αν το $g(x)$ διαιρεί $f_1(x) + f_2(x)$ και ένα από τα $f_1(x), f_2(x)$, τότε διαιρεί και το άλλο.

17) Να προσδιοριστεί το $\kappa \in \mathbf{R}$, ώστε η διαίρεση του $f(x) = x^4 + 1$ με το $g(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \kappa$ να είναι τέλεια (: υπόλοιπο 0).

18) Πολυώνυμο $f(x)$ διαιρούμενο με το $x + 1$ δίνει υπόλοιπο 2, ενώ διαιρούμενο με το $x - 2$ δίνει υπόλοιπο -1 . Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το $g(x) = (x + 1)(x - 2)$.

19) Αν η εξίσωση $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές έχει ρίζα τον ρητό $\frac{\kappa}{\lambda}$, τότε ο κ διαιρεί το α_0 και ο λ το α_n .

20) Δείξτε ότι η εξίσωση $P(x) = x^5 + 4x + 2$ δεν έχει ρητή ρίζα. (Υπόδ.: άσκ. 19).

21) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να εξεταστεί αν ο αριθμός $1/2$ είναι ρίζα της εξίσωσης $6x^3 - 5x^2 + 11x - 5 = 0$.

22) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \lambda x^2 - 15x + 4$.

i) Να βρεθεί το λ , ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x - 2$.

ii) Να βρεθεί το λ , ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης

$P(x) : (x - 3)$ να είναι το 3.

Λύση:

i) Πρέπει $P(2) = 0 \Rightarrow 2^3 + \lambda 2^2 - 15 \cdot 2 + 4 = 0 \Rightarrow 8 + 4\lambda - 30 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 9/2$.

ii) Πρέπει $P(3) = 0 \Rightarrow 3^3 + \lambda 3^2 - 15 \cdot 3 + 4 = 0 \Rightarrow 27 + 9\lambda - 45 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{17}{9}$

23) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$. Αν το $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$, δείξτε ότι $9|\alpha| + 3|\beta| + |\gamma| \geq 27$.

24) Βρείτε τα α, β ώστε το $f(x) = \alpha x^3 - \beta x^2 - 5x + 4$ διαιρούμενο με το $x + 2$ και το $x - 1$ να δίνει αντίστοιχα υπόλοιπα 6 και 2.

25) Ένα πολυώνυμο $f(x)$ διαιρούμενο με το $x + 1$ δίνει υπόλοιπο 2, με το $x - 2$ δίνει υπόλοιπο 11 και με το $x + 3$ δίνει υπόλοιπο 6. Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

26) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa - 1)x^5 + (3\kappa^2 + 2)x^3 + \kappa x$, $\kappa \in \mathbf{R}$, δεν έχει ρίζα το $\frac{1}{2}$.

Δ. Ασκήσεις πολυωνυμικών εξισώσεων ή εξισώσεων που ανάγονται σε πολυωνυμικές

1) Να λυθεί η εξίσωση: $2x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 27x - 9 = 0$.

Λύση:

• Θέτουμε $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 27x - 9$.

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$.

Είναι $P(1) = 0$. Άρα το $x - 1$ διαιρεί το $P(x)$.

Το σχήμα Horner για $x = 1$ δίνει:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & -3 & -17 & 27 & -9 & 1 \\ & 2 & -1 & -18 & 9 & \\ \hline 2 & -1 & -18 & 9 & 0 & \end{array}$$

Άρα η εξίσωση γράφεται $P(x) = (x - 1)(2x^3 - x^2 - 18x + 9) = 0$.

• Θέτουμε $Q(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$.

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι $\pm 1, \pm 3, \pm 9$.

Είναι $Q(3) = 0$. Άρα το $x - 3$ διαιρεί το $Q(x)$.

Το σχήμα Horner για $x = 3$ δίνει:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & -1 & -18 & 9 & 3 \\ & 6 & 15 & -9 & \\ \hline 2 & 5 & -3 & 0 & \end{array}$$

Άρα $Q(x) = (x - 3)(2x^2 + 5x - 3)$.

Επομένως η εξίσωση γίνεται: $(x - 1)(x - 3)(2x^2 + 5x - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\{x - 1 = 0 \text{ ή } x - 3 = 0 \text{ ή } 2x^2 + 5x - 3 = 0\} \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = -3 \text{ ή } x = 1/2.$$

2) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ γ) $4x^4 - 9x^2 - 2x + 3 = 0$

β) $2x^3 + 3x^2 + 13x + 6 = 0$ δ) $2x^5 - 11x^4 + 14x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = 0$.

3) Να βρεθούν τα κ, λ ώστε το $P(x) = x^4 + (\kappa - \lambda)x^3 + 2\kappa x^2 - 5x + 4$ να έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$ και μετά να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 0$.

4) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$

γ) $12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12 = 0$

β) $3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0$

δ) $2x^4 + 5x^3 - 5x + 2 = 0$

ε) $2x^5 - 13x^4 - 61x^3 - 61x^2 - 13x + 2 = 0$.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι στις εξισώσεις αυτές, οι οποίες λέγονται **αντίστροφες**, οι όροι που ισαπέχουν από τα άκρα είναι ίσοι. Όλες οι εξισώσεις, εκτός της (γ) που έχει μοναδικό μεσαίο όρο, λύνονται με παραγοντοποίηση και γι' αυτό αφήνονται ως άσκηση. Θα λύσουμε την (γ):

Καταρχήν το $x \neq 0$. Διαιρούμε με το x^2 και η εξίσωση γίνεται:

$$12x^2 + 11x - 146 + \frac{11}{x} + \frac{12}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 11\left(x + \frac{1}{x}\right) - 146 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Θέτουμε } y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

$$\text{Η (1), τότε, γίνεται: } 12(y^2 - 2) + 11y - 146 = 0 \Leftrightarrow$$

$$12y^2 + 11y - 170 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\ 4x^2 + 17x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, x = \frac{1}{3} \\ x = -4, x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

5) Να προσδιορίσετε το $\lambda \neq 0$, ώστε η εξίσωση

$$\lambda^2 x^4 - 4(\lambda + 1)x^2 + 4 = 0$$

να έχει: α) δύο διπλές ρίζες, β) τέσσερις ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

6) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $1 + \sqrt{x} = \sqrt{3(x-1)}$

β) $\sqrt[3]{5x-7} = x-1$.

7) Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\alpha) \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} > \sqrt{7x+1} \quad \beta) \sqrt{2+\sqrt{x-5}} \leq \sqrt{13-x}.$$

Λύση:

Θα λύσουμε τη (β):

Πρέπει $2 + \sqrt{x-5} \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbf{R}$,

$$x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5 \text{ και}$$

$$13 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 13. \text{ Άρα } x \in [5, 13].$$

$$\text{Τώρα, } (\beta) \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x-5} \leq 13 - x \Leftrightarrow \sqrt{x-5} \leq 11 - x \quad (1).$$

Περίπτωση 1^η: Αν $11 - x < 0 \Leftrightarrow 11 < x$, τότε η (1) αδύνατη.

Περίπτωση 2^η: Έστω $11 - x \geq 0 \Leftrightarrow 11 \geq x$, τότε η (1) γίνεται:

$$x - 5 \leq (11 - x)^2 \Leftrightarrow x - 5 \leq 121 - 22x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 23x + 126 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 9] \cup [14, +\infty).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον περιορισμό και τις περιπτώσεις 1 και 2, η (β) είναι ισοδύναμη με $x \in [5, 9]$. (Κάνετε ένα σχήμα, για να δείτε την ισοδυναμία).

$$8) \text{ Να λυθεί η εξίσωση } 4(x^2 - x + 1)^3 - 27x^2(x - 1)^2 = 0.$$

Υπόδειξη:

Η εξίσωση γράφεται $4[x(x - 1) + 1]^3 - 27[x(x - 1)]^2 = 0$. Θέτουμε $y = x(x - 1)$.

$$9) \text{ Να λυθεί η εξίσωση: } (x+2)(x+3)(x-4)(x-5) = 44.$$

E. Ασκήσεις θεωρητικές

1) Αν $f_1(x)$, $f_2(x)$ και $\delta(x)$ είναι πολυώνυμα με $\delta(x) \neq 0$, τότε οι διαιρέσεις των $f_1(x)$, $f_2(x)$ με το $\delta(x)$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, αν και μόνο αν η διαφορά $f_1(x) - f_2(x)$ διαιρείται με το $\delta(x)$.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Έστω ότι οι διαιρέσεις δίνουν ίδιο υπόλοιπο, δηλαδή

$$f_1(x) = \delta(x)p_1(x) + u(x) \quad (1),$$

$$f_2(x) = \delta(x)p_2(x) + u(x) \quad (2),$$

όπου ή $u(x) = 0$ ή $\text{βαθμ.}u(x) < \text{βαθμ.}\delta(x)$.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1),(2), έπεται $f_1(x) - f_2(x) = \delta(x)(p_1(x) - p_2(x))$, που δείχνει ότι το $\delta(x)$ διαιρεί το $f_1(x) - f_2(x)$.

($\Leftarrow$) Έστω οι διαιρέσεις

$$f_1(x) = \delta(x)p_1(x) + u_1(x) \quad (1\alpha),$$

$$f_2(x) = \delta(x)p_2(x) + u_2(x) \quad (2\alpha),$$

όπου ή $u_1(x) = 0$ ή $\text{βαθμ.}u_1(x) < \text{βαθμ.}\delta(x)$ (3) και

ή $u_2(x) = 0$ ή $\text{βαθμ.}u_2(x) < \text{βαθμ.}\delta(x)$. (4)

Λόγω των (3),(4) έπεται ότι:

$$\text{ή } u_1(x) - u_2(x) = 0 \text{ ή } \text{βαθμ.} (u_1(x) - u_2(x)) < \text{βαθμ.}\delta(x) \quad (5)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1α),(2α), παίρνουμε:

$$f_1(x) - f_2(x) = \delta(x)(p_1(x) - p_2(x)) + (u_1(x) - u_2(x)),$$

η οποία, λόγω της (5), είναι η ταυτότητα της διαίρεσης $(f_1(x) - f_2(x)) : \delta(x)$. Αυτή, εξ' υποθέσεως, είναι τέλεια. Άρα πρέπει το υπόλοιπό της $(u_1(x) - u_2(x))$ να είναι 0. Άρα $u_1(x) = u_2(x)$.

*2) Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $f(x)$ με το x^2+x+1 δίνει υπόλοιπο $2x+1$, ενώ με το x^2+1 δίνει υπόλοιπο $x+2$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το γινόμενο $(x^2+x+1)(x^2+1)$.

Απόδειξη:

Έστω

$$f(x) = (x^2+x+1)(x^2+1)\pi(x) + u(x) \quad (1),$$

όπου ή $u(x) = 0$ ή $\text{βαθμ.}u(x) < \text{βαθμ.} (x^2+x+1)(x^2+1) = 4$.

Το $u(x)$ δεν μπορεί να είναι 0, αλλιώς (λόγω της (1)) το (x^2+x+1) θα διαιρούσε το $f(x)$, που είναι άτοπο. Άρα $\text{βαθμ.}u(x) \leq 3$, επομένως το $u(x)$ είναι της μορφής

$$u(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \quad (2).$$

$$H (1) \Rightarrow f(x) - u(x) = (x^2+x+1)(x^2+1)\pi(x) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 + x + 1) \text{ διαιρεί το } f(x) - u(x) \\ (x^2 + 1) \text{ διαιρεί το } f(x) - u(x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{υπόλοιπο } [f(x): (x^2 + x + 1)] = \text{υπόλοιπο } [u(x): (x^2 + x + 1)] \\ \text{υπόλοιπο } [f(x): (x^2 + 1)] = \text{υπόλοιπο } [u(x): (x^2 + 1)] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 1 = \text{υπόλοιπο } [u(x): (x^2 + x + 1)] \\ x + 2 = \text{υπόλοιπο } [u(x): (x^2 + 1)] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = (x^2 + x + 1)\pi_1(x) + (2x + 1) \\ ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = (x^2 + 1)\pi_2(x) + (x + 2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = (x^2 + x + 1)(ax + \kappa) + (2x + 1) \\ ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = (x^2 + 1)(ax + \lambda) + (x + 2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + \kappa = \beta \\ a + \kappa + 2 = \gamma \\ \kappa + 1 = \delta \\ \beta = \lambda \\ a + 1 = \lambda \\ \lambda + 2 = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}.$$

3) Αν $u_1(x)$ και $u_2(x)$ είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων των πολυωνύμων $f_1(x)$, $f_2(x)$ με το $g(x)$ αντίστοιχα, δείξτε ότι οι διαιρέσεις των $f_1(x)u_2(x)$ και $f_2(x)u_1(x)$ με το $g(x)$ έχουν ίσα υπόλοιπα.

4) Αν οι διαιρέσεις του $f(x)$ με τα $x - \alpha$ και $x - \beta$, $\alpha \neq \beta$, δίνουν το ίδιο υπόλοιπο u , δείξτε ότι και η διαίρεση του $f(x)$ με το $(x - \alpha)(x - \beta)$ δίνει επίσης το ίδιο υπόλοιπο.

Απόδειξη:

Θεωρούμε την ταυτότητα της διαίρεσης του $f(x)$ με το $(x - \alpha)(x - \beta)$:

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)\pi(x) + (\kappa x + \lambda) \quad (1),$$

όπου θεωρήσαμε το υπόλοιπο το πολύ 1^{ου} βαθμού, αφού ο διαιρέτης είναι 2^{ου} βαθμού. Για $x = \alpha$, $x = \beta$ η (1) δίνει:

$$\begin{cases} f(\alpha) = \kappa\alpha + \lambda \\ f(\beta) = \kappa\beta + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \kappa\alpha + \lambda \\ v = \kappa\beta + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa = 0 \\ \lambda = v \end{cases}.$$

5) Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $f(x)$ με το $x^2 - \rho^2$, $\rho \neq 0$, είναι το

$$u(x) = \frac{f(\rho) - f(-\rho)}{2\rho} \cdot x + \frac{f(\rho) + f(-\rho)}{2}.$$

*6) Έστω $f(x)$ πολυώνυμο ώστε για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και $\rho \in \mathbf{N}$, να ισχύει $f(x) = f(\rho x)$. Δείξτε ότι για κάθε $v \in \mathbf{N}$ ισχύει $f(\rho^v) = 1$.

*7) Δείξτε ότι το πολυώνυμο

$$f(x) = (x^{p-1} + ax^{p-2} + \dots + a^{p-1})x^{(p+1)v+1} + a^{(p+1)v+p}$$

διαίρεται με το πολυώνυμο $g(x) = x^p + ax^{p-1} + \dots + a^{p-1}x + a^p$, όπου $a \in \mathbf{Z}$ και $p, v \in \mathbf{N}$.

8) Αν ένα πολυώνυμο $f(x)$ διαιρούμενο με $x - \alpha$ και $x - \beta$ δίνει αντίστοιχα πηλίκα $\pi_1(x)$ και $\pi_2(x)$, δείξτε ότι $\pi_1(\beta) = \pi_2(\alpha)$, όπου $\alpha \neq \beta$.

9) Δείξτε ότι:

α) Αν $\alpha \neq \beta$, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f(x)$, με βαθμό ≥ 2 , με το $\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$ είναι

$$u(x) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}x + \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}.$$

β) Αν $\alpha = \beta$, τότε $u(x) = x\pi(\alpha) + f(\alpha) - \alpha\pi(\alpha)$, όπου $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $f(x)$ με το $x - \alpha$.

10) Βρείτε ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού $f(x)$ ώστε $f(0) = 0$ και $f(x) - f(x-1) = x^2$. Μετά υπολογίστε το άθροισμα

$$\sigma_v = 1^2 + 2^2 + \dots + v^2, v \in \mathbf{N}.$$

Απόδειξη:

Δίνεται ότι $f(0) = 0$, άρα το $f(x)$ είναι της μορφής $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x$. Έτσι, έχουμε: $f(x) - f(x-1) = x^2 \Rightarrow ax^3 + bx^2 + \gamma x - a(x-1)^3 - b(x-1)^2 - \gamma(x-1) = x^2 \Rightarrow$

$$ax^3 + bx^2 + \gamma x - ax^3 + 3ax^2 - 3ax + a - bx^2 + 2bx - b - \gamma x + \gamma = x^2 \Rightarrow$$

$$3ax^2 + (-3a + 2b)x + a - b + \gamma = x^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x.$$

$$\text{Τώρα, για } x = 1 \Rightarrow f(1) - f(0) = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) - f(1) = 2^2$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) - f(2) = 3^2$$

.....

$$x = v \Rightarrow f(v) - f(v-1) = v^2$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε: $1^2 + 2^2 + \dots + v^2 = f(v) = \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{6}v$.

11) Δείξτε ότι αν ένα πολυώνυμο $f(x)$ έχει την ιδιότητα $f(x) = f(1-x)$, τότε το $g(x) = f(x) - f(0)$ διαιρείται με το $x(x-1)$.

Απόδειξη:

Είναι $g(0) = f(0) - f(0) = 0$ και $g(1) = f(1) - f(0) = 0$. Άρα τα 0 και 1 είναι ρίζες του $g(x)$. Άρα το $g(x)$ διαιρείται με τα $x, x-1$. Αφού διαιρείται με το x , είναι της μορφής

$$g(x) = x\pi(x) \quad (1).$$

Ακόμα $g(1) = 0$, οπότε η (1) δίνει $\pi(1) = 0$, άρα το $\pi(x)$ διαιρείται επίσης με το $x-1$, άρα, τελικώς, το $g(x)$ είναι της μορφής

$$g(x) = x(x-1)q(x).$$

12) Αν ένα πολυώνυμο $f(x)$ έχει την ιδιότητα $f(x) = f(x-1)$, τότε είναι το σταθερό πολυώνυμο.

Απόδειξη:

Θέτω $F(x) = f(x) - f(0)$. Έστω ότι $F(x) \neq 0$.

Εξ' υποθέσεως έπεται $F(0) = F(1) = F(2) = \dots$, δηλαδή $F(v) = 0$ για κάθε $v \in \mathbf{N}$. Άρα το $F(x)$ έχει παράγοντες όλα τα πολυώνυμα $x, x-1, x-2, \dots$. Άρα δεν έχει (πεπερασμένο) βαθμό. Άρα $F(x) = 0$. Αντίφαση. Επομένως $F(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, άρα $f(x) = f(0) =$ σταθερό πολυώνυμο.

13) Δείξτε ότι το πολυώνυμο

$$f(x) = \frac{x(x-\alpha)(x-\beta)}{\gamma(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)} + \frac{x(x-\beta)(x-\gamma)}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{x(x-\gamma)(x-\alpha)}{\beta(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)},$$

όπου $\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) \neq 0$, μπορεί να πάρει τη μορφή

$$f(x) = \lambda(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) + 1.$$

Μετά βρείτε το λ .

Απόδειξη:

Αφού $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 1 \Rightarrow$ το $f(x) - 1$ έχει ρίζες τα $\alpha, \beta, \gamma \Rightarrow$ τα $x-\alpha, x-\beta, x-\gamma$ διαιρούν το $f(x) - 1$. Τότε και το $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ διαιρεί το $f(x) - 1$ (: αποδείξτε το). Άρα $f(x) - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\pi(x)$. Αλλά $\text{βαθμ.}[f(x) - 1] = 3$, άρα πρέπει $\pi(x)$ να είναι σταθερό πολυώνυμο, έστω $\pi(x) = \lambda \in \mathbf{R}$. Έτσι,

$$f(x) - 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\lambda + 1 \quad (1).$$

Αλλά από τη δοθείσα μορφή του $f(x)$ είναι $f(0) = 0$, ενώ, από την (1), είναι $f(0) = -\alpha\beta\gamma\lambda + 1$.

$$\text{Άρα } -\alpha\beta\gamma\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

14) Δείξτε, χωρίς να χρησιμοποιήσετε το σχήμα του Horner, ότι το 1 είναι ρίζα με πολλαπλότητα 3 του πολυωνύμου $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1$. [Υπόδ.: Να θέσετε $x - 1 = y$].

15) Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το $x^2 - 2\rho x + \rho^2$ είναι το $\pi(\rho)x + f(\rho) - \rho\pi(\rho)$, όπου $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $(f(x) - f(\rho)) : (x - \rho)$.

16) Αν το $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ έχει ρίζα τον ρ και $f(\alpha_0) = 0$, δείξτε ότι το ρ είναι ρίζα και του $g(x) = f(f(f(x)))$.

17) Έστω $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Έστω $g(x)$ το πολυώνυμο που προκύπτει, αν στο $f(x)$ θέσουμε όπου x το $f(x)$. Δείξτε ότι αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $f(x) - x$, τότε είναι και ρίζες του $g(x)$.

18) Να εξετάσετε, αν το πολυώνυμο $f(x) = 27x^3 + 26x^2 + 9x - 2$ έχει ρίζες της μορφής $\sqrt{\rho}$, όπου ρ θετικός ακέραιος και $\sqrt{\rho} \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

19) Δείξτε ότι το $f(x) = x^n + 2\lambda x + 2$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ και $\lambda \in \mathbf{Z}$, δεν έχει ακέραιες ρίζες.

20) Αν ένα πολυώνυμο $\varphi(x)$, n -οστού βαθμού, $n > 4$, με ακέραιους συντελεστές, λαμβάνει την τιμή 7 για τέσσερις διαφορετικές μεταξύ τους ακέραιες τιμές του x , δείξτε ότι για καμία ακέραια τιμή του x το πολυώνυμο δεν λαμβάνει την τιμή 14.

Απόδειξη:

Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{Z}$ διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = \varphi(\gamma) = \varphi(\delta) = 7$. Θέτω $\Phi(x) = \varphi(x) - 7$. Τότε $\Phi(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)\pi(x)$.

Αν υπήρχε $\rho \in \mathbf{Z}$, ώστε $\varphi(\rho) = 14$, τότε $\Phi(\rho) = 7 \Rightarrow (\rho - \alpha)(\rho - \beta)(\rho - \gamma)(\rho - \delta)\pi(\rho) = 7$, δηλαδή το 7 αναλύθηκε σε τέσσερις τουλάχιστον διαφορετικούς παράγοντες. Άτοπο.

Α. Αλεξέλλης