

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Θεωρία

Ασκήσεις Άλυτες

Ασκήσεις Λυμένες

A.A.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

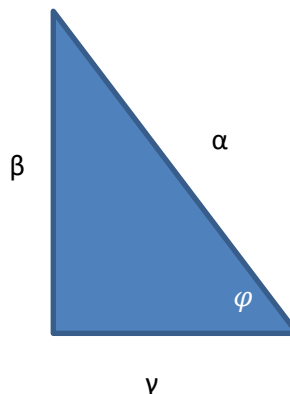
1. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείων γωνιών καθορίζονται από το ορθογώνιο τρίγωνο. Έτσι

$$\eta\mu\varphi = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\beta}{\alpha},$$

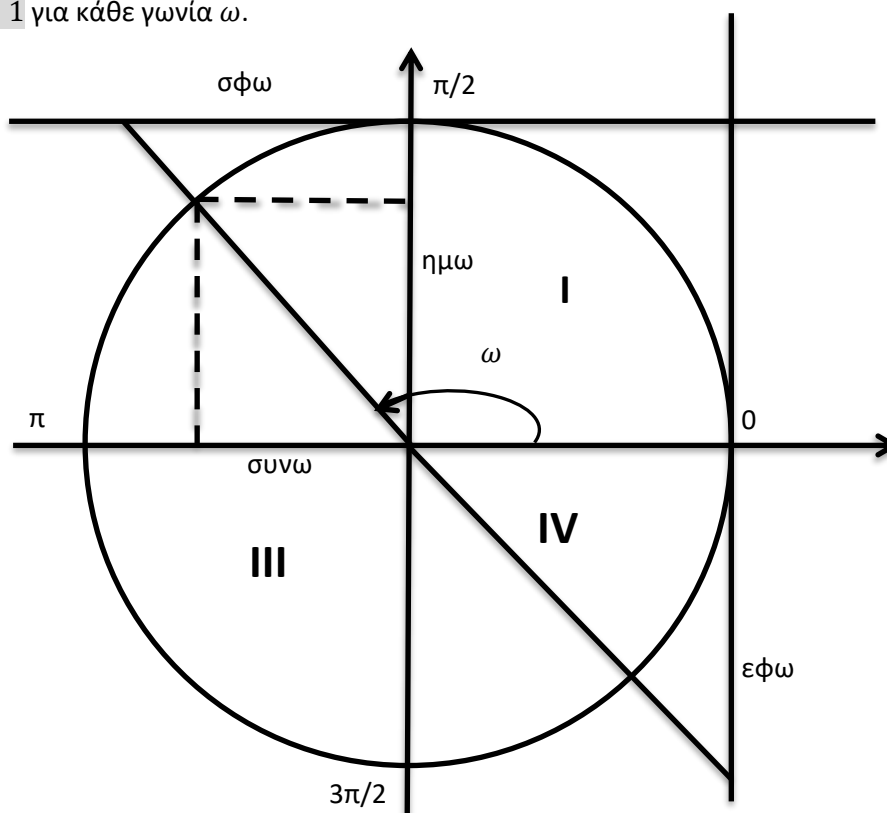
$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\text{προσκειμένη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\gamma}{\alpha},$$

$$\epsilon\varphi\varphi = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκειμένη}} = \frac{\beta}{\gamma},$$

$$\sigma\varphi\varphi = \frac{\text{προσκειμένη}}{\text{απέναντι}} = \frac{\gamma}{\beta}.$$



1. Έστω ο τριγωνομετρικός κύκλος με ακτίνα $\rho = 1$ και με τους άξονες ημιτόνων, συνημιτόνων, εφαπτομένων, συνεφαπτομένων. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιωνδήποτε γωνιών καθορίζονται όπως στο σχήμα από τις προβολές στους άξονες. Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών καθορίζεται από το τεταρτημόριο που βρίσκονται. Έτσι, πχ, $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, αν $\omega \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, δηλαδή στο II τεταρτημόριο. Ακόμα $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$ για κάθε γωνία ω .



2. Ισχύει η αντιστοιχία μοιρών και ακτίνων: $180^0 \leftrightarrow \pi$ ακτίνια. Έτσι, πχ, έχουμε $90^0 \sim \frac{\pi}{2}$, $370^0 \sim \frac{3\pi}{2}$, $60^0 \sim \frac{\pi}{3}$, $45^0 \sim \frac{\pi}{4}$, $120^0 \sim \frac{2\pi}{3}$.

3. Θα πρέπει να φανταζόμαστε τη γωνία $2\kappa\pi = \kappa \cdot 360^0$ ως κ κύκλους. Έτσι,

$$\eta\mu(2\kappa\pi + \varphi) = \eta\mu\varphi, \quad \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + \varphi) = \sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\varepsilon\varphi(\kappa\pi + \varphi) = \varepsilon\varphi\varphi, \quad \sigma\varphi(\kappa\pi + \varphi) = \sigma\varphi\varphi$$

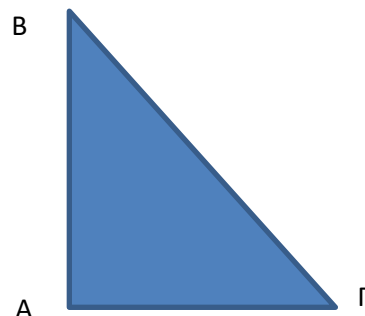
4. Βασικές ιδιότητες	Αποδείξεις
$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$	$\frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\beta}{\gamma} = \varepsilon\varphi\varphi$
$\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1$	$\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2} = 1$
$\varepsilon\varphi\varphi \cdot \sigma\varphi\varphi = 1$	$\varepsilon\varphi\varphi \cdot \sigma\varphi\varphi = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\beta} = 1$
$1 + \varepsilon\varphi^2\varphi = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$	$1 + \varepsilon\varphi^2\varphi = 1 + \frac{\eta\mu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$

5. Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών τόξων.

x	$\eta\mu$	$\sigma\upsilon\nu$	$\varepsilon\varphi$	$\sigma\varphi$
0	0	1	0	—
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	1	0	—	0

6. ΑΣΚΗΣΗ: αποδείξτε τον παραπάνω πίνακα.

ΛΥΣΗ: Δείχνουμε για το $\pi/4$. Θεωρούμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A = 90^\circ$ και $B = \Gamma = 45^\circ$.



$$\text{Τότε } \eta\mu^2 45 + \sigma\upsilon\nu^2 45 = 1 \Rightarrow 2\eta\mu^2 45 = 1 \Rightarrow \eta\mu^2 45 = \frac{1}{2}$$

$$\eta\mu 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7. Αναγωγή στο I τεταρτημόριο:

- Αν δύο τόξα συνδέονται μεταξύ τους με π ή 2π ή με το " $-$ ", οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μένουν ως έχουν

$$\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$$

$$\eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$$

$$\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x$$

- Ενώ αν συνδέονται με το $\pi/2$ ή $3\pi/2$ αλλάζουν:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi\right) = \eta\mu\varphi$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\eta\mu\varphi$$

- Τέλος το πρόσημο καθορίζεται από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται το τόξο που ξεκινάμε. Πχ, στο $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\eta\mu\varphi$ το τόξο $\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$ βρίσκεται στο II τεταρτημόριο και εκεί τα $\sigma\upsilon\nu$ είναι αρνητικά, άρα βάζουμε μείον. Άλλο παράδειγμα: $\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sigma\varphi x$. Βάζουμε « $-$ » διότι το $\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ βρίσκεται στο IV τεταρτημόριο και εκεί η $\varepsilon\varphi$ είναι αρνητική.
- Σημείωση, το τόξο $-\varphi$ βρίσκεται πάντα στο IV τεταρτημόριο όταν το φ βρίσκεται στο I τεταρτημόριο.

8. Από την παράγραφο 7 συμπεραίνουμε:

Αν $\varphi + \omega = 180^\circ$ τότε $\eta\mu\varphi = \eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = -\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\epsilon\varphi\varphi = -\epsilon\varphi\omega$

Αν $\varphi + \omega = 90^\circ$ τότε $\eta\mu\varphi = \sigma\upsilon\nu\omega$ (και βέβαια $\sigma\upsilon\nu\varphi = \eta\mu\omega$) και $\epsilon\varphi\varphi = \sigma\varphi\omega$.

Έτσι, πχ, $\eta\mu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ$, $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu 60^\circ$.

9. ΑΣΚΗΣΗ: Αποδείξτε την 8 με βάση την 7.

10. Χρήσιμο είναι στις εξισώσεις να σκεφτόμαστε και την αντίστροφη διαδικασία:

■ Το « - » μπαίνει μέσα μόνο στα $\eta\mu, \epsilon\varphi, \sigma\varphi$, αλλά όχι στο $\sigma\upsilon\nu$:

$-\eta\mu\varphi = \eta\mu(-\varphi)$, $-\epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi(-\chi)$, $-\sigma\varphi\omega = \sigma\varphi(-\omega)$, αλλά $\sigma\upsilon\nu(-\varphi) = \sigma\upsilon\nu\varphi$.

■ Το « - » μπαίνει μέσα στο $\sigma\upsilon\nu$ ως εξής: $-\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu(\pi - \varphi)$.

■ Αν θέλω να αλλάξω τριγωνομετρικό αριθμό χρησιμοποιώ το $\frac{\pi}{2} -$, δηλαδή

$$\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

11. Απλές τριγωνομετρικές εξισώσεις. Γενικά έχουν άπειρες λύσεις:

Εξισώσεις, το θ γνωστό τόξο.	Λύσεις
$\eta\mu x = \eta\mu\theta$	$x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta$	$x = 2\kappa\pi + \theta$ ή $x = 2\kappa\pi - \theta$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
$\epsilon\varphi x = \epsilon\varphi\theta$	$x = \kappa\pi + \theta$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta$	$x = \kappa\pi + \theta$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

12. Τύποι αθροισμάτων

Τύποι	Αποδείξεις
$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$	Γεωμετρικά
$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu(\alpha + (-\beta))$ $= \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu(-\beta) + \eta\mu(-\beta)\sigma\upsilon\nu\alpha =$

	$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$
$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$	$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) =$ $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$ $\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\eta\mu\alpha$
$\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$	Άσκηση
$\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$	$\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)} =$ $\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta} =$ $\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta} =$ $\frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$
$\varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$	Άσκηση

13. Τύποι του «διπλασίου τόξου»

Τύποι	Αποδείξεις
$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\eta\mu 2\alpha = \eta\mu(\alpha + \alpha)$ $= \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ $= 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$
$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$ $= 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$ $= 1 - 2\eta\mu^2\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu(\alpha + \alpha)$ $= \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha\eta\mu\alpha$ $= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$
$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$	$\varepsilon\varphi 2\alpha = \varepsilon\varphi(\alpha + \alpha) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\alpha}$ $= \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$

$$\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}$$

Άσκηση

14. ΑΣΚΗΣΗ: Αποδείξτε τους τύπους αποτετραγωνποίησης

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

15. ΑΣΚΗΣΗ: Εκφράστε τα $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ συναρτήσει της $\varepsilon\varphi\alpha$, δηλαδή δείξτε:

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

ΛΥΣΗ

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{\frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\frac{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\frac{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

* 16. Μετασχηματισμός γινομένου σε άθροισμα:

Τύποι	Αποδείξεις
$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta)$	$\begin{aligned} \eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) &= \\ \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha & \\ + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha &= \end{aligned}$

	$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$
$2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$	$\begin{aligned} &\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) \\ &= \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta \\ &+ \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \\ &2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta \end{aligned}$
$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$	$\begin{aligned} &\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \\ &\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta \\ &- \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \\ &2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta \end{aligned}$

* 17. Μετασχηματισμός αθροίσματος σε γινόμενο (ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ Ι) :

Τύποι	Αποδείξεις
$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right)$	$\begin{aligned} \eta\mu A + \eta\mu B &= \eta\mu\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\right) \\ &+ \eta\mu\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\right) = \\ &= 2\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right) \end{aligned}$
$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu\left(\frac{A-B}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}\right)$	$\begin{aligned} \eta\mu A - \eta\mu B &= \eta\mu A + \eta\mu(-B) = \\ 2\eta\mu\left(\frac{A+(-B)}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-(-B)}{2}\right) &= \\ 2\eta\mu\left(\frac{A-B}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}\right) \end{aligned}$
$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right)$	$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B &= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\right) \\ &+ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\right) = \\ 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A+B}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-B}{2}\right) \end{aligned}$

Παρατηρούμε ότι στο πρώτο μέλος τους οι προηγούμενοι τύποι έχουν μόνο ημίτονα ή μόνο συνημίτονα. Αλλιώς έχουμε την ακόλουθη

* 18. Μετασχηματισμός αθροίσματος σε γινόμενο (ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΙΙ) :

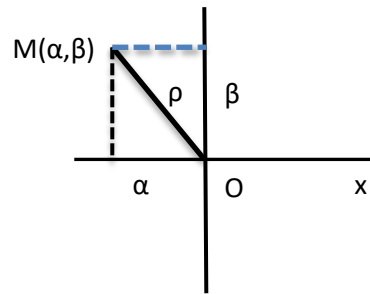
Θεώρημα	Απόδειξη
---------	----------

Αν $\alpha, \beta \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\alpha \eta \mu x + \beta \sigma \nu \nu x = \rho \eta \mu(x + \varphi),$$

όπου $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ και

$$\varphi \in \mathbb{R} \text{ με } \sigma \nu \nu \varphi = \frac{\alpha}{\rho}, \eta \mu \varphi = \frac{\beta}{\rho}$$



Έστω το σημείο $M(\alpha, \beta)$ και φ η γωνία $\angle xOM$.

Τότε (Πυθαγόρειο) $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ και

$$\sigma \nu \nu \varphi = \frac{\alpha}{\rho}, \eta \mu \varphi = \frac{\beta}{\rho} \text{ επομένως}$$

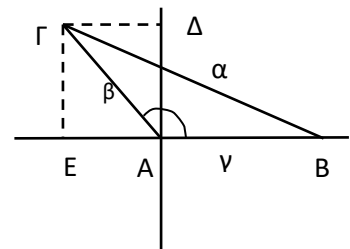
$$\begin{aligned} \alpha \eta \mu x + \beta \sigma \nu \nu x &= \rho \sigma \nu \nu \varphi \eta \mu x + \rho \eta \mu \varphi \sigma \nu \nu x \\ &= \rho (\sigma \nu \nu \varphi \eta \mu x + \eta \mu \varphi \sigma \nu \nu x) \\ &= \rho \eta \mu(x + \varphi). \end{aligned}$$

19. Νόμος ημιτόνων

Θεώρημα	Απόδειξη
Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\frac{\alpha}{\eta \mu A} = \frac{\beta}{\eta \mu B} = \frac{\gamma}{\eta \mu \Gamma} = 2R$ Όπου $2R$ η ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου.	Έστω A είναι οξεία. Φέρουμε τη διάμετρο BD οπότε γωνία $B\Gamma D$ είναι ορθή και $\hat{A} = \hat{D}$. Έτσι, $\eta \mu A = \eta \mu D = \frac{B\Gamma}{B\Delta} = \frac{\alpha}{2R}$

20. ΑΣΚΗΣΗ: α) Δείξτε ότι $\eta \mu A = \frac{\alpha}{2R}$ και όταν A είναι αμβλεία. β) Με όμοιο τρόπο δείχνεται ότι και $\eta \mu B = \frac{\beta}{2R}$, $\eta \mu \Gamma = \frac{\gamma}{2R}$. Δείξτε ότι $\frac{\alpha}{\eta \mu A} = \frac{\beta}{\eta \mu B} = \frac{\gamma}{\eta \mu \Gamma}$ χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον περιγεγραμμένο κύκλο.

21. Νόμος συνημιτόνων

Θεώρημα	Απόδειξη
Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sin A$ $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sin B$ $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sin \Gamma$	 $\alpha^2 = EB^2 + GE^2$ $GE^2 = \beta^2 - AE^2$ Άρα $\alpha^2 = EB^2 + \beta^2 - AE^2 =$ $(\gamma + EA)^2 + \beta^2 - EA^2 =$ $\gamma^2 + 2\gamma EA + EA^2 + \beta^2 - EA^2 =$ $\gamma^2 + 2\gamma\beta\sin A + \beta^2$

22. Περιοδικές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται περιοδική αν υπάρχει αριθμός $T > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει

$$x + T \in A, \quad x - T \in A$$

$$f(x + T) = f(x - T) = f(x)$$

Ο T λέγεται περίοδος της f .

Θεωρούμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπου το x μετριέται σε ακτίνια.

$\eta\mu : \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$ με $x \rightarrow \eta\mu x$ με περίοδο $T = 2\pi$

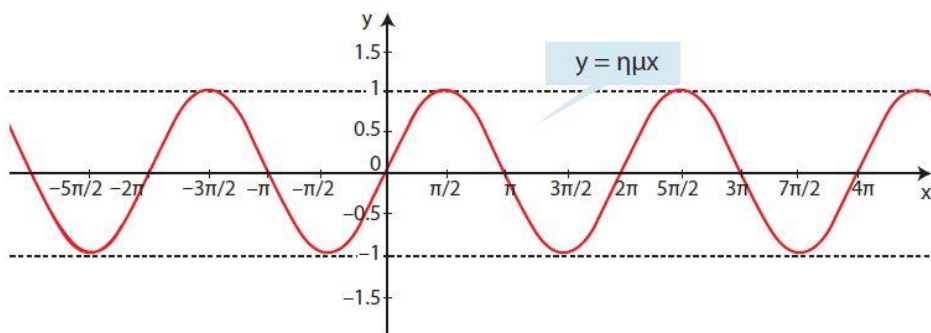
$\sigma\upsilon\nu : \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$ με $x \rightarrow \sigma\upsilon\nu x$ με περίοδο $T = 2\pi$

$\varepsilon\varphi : \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $x \rightarrow \varepsilon\varphi x$ με περίοδο $T = \pi$

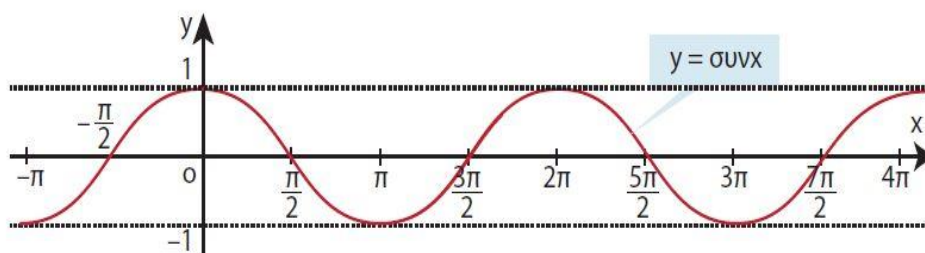
$\sigma\varphi : \mathbb{R} - \{k\pi + \pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $x \rightarrow \sigma\varphi x$ με περίοδο $T = \pi$

23. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\omega x$, όπου το ω είναι σταθερά. Τότε η περίοδος της είναι $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Το ίδιο και για τη συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

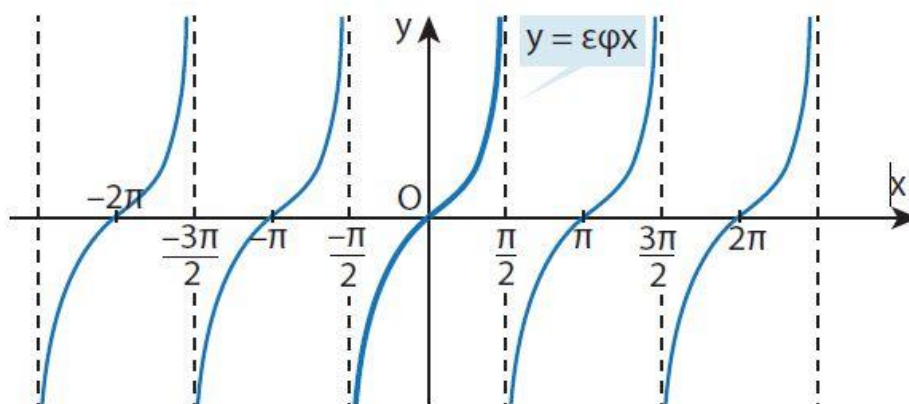
24. Συνάρτηση ημίτονο : είναι περιττή, $\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$ και είναι περιοδική $\eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu x$



Συνάρτηση συνημίτονο: είναι άρτια, $\sin(-x) = \sin x$ και είναι περιοδική $\sin(x + 2\pi) = \sin x$



Συνάρτηση εφαπτομένη: είναι περιττή, $\tan(-x) = -\tan x$ και είναι περιοδική $\tan(x + \pi) = \tan x$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΥΤΕΣ

1. Ερωτήσεις

1. Αν $\omega \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ τότε $\eta\mu\omega < 0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$	Σ	Λ
2. Για οποιονδήποτε ακέραιο k ισχύει $\sin(k\pi) = 1$	Σ	Λ

3. Αν $\omega \in (\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ τότε οι αριθμοί $\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu\omega$ είναι αντίθετοι	Σ	Λ
4. Ισχύει $(1 - \eta\mu x)^2 = \sigma\upsilon\nu^2 x$	Σ	Λ
5. Υπάρχει γωνία x με $\eta\mu x = \pi$	Σ	Λ
6. Αν $\omega + \varphi = \frac{\pi}{2}$ τότε $\eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\varphi$	Σ	Λ
7. Αν $\varphi = \pi + \omega$ τότε $\sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu\varphi$	Σ	Λ
8. Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\eta\mu\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Gamma}{2}\right)$	Σ	Λ
9. Το $\eta\mu 2520^\circ$ ισούται με $\frac{1}{2}$	Σ	Λ
10. Αν $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ τότε $\epsilon\varphi x + \sigma\varphi x < 0$	Σ	Λ
11. Η παράσταση $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x$ ισούται με $\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x$	Σ	Λ
12. Αν $3\eta\mu^2 x + 4\sigma\upsilon\nu^2 x = 5$ τότε $\epsilon\varphi^2 x = -\frac{1}{2}$	Σ	Λ
13. Αν $\eta\mu\varphi + \sigma\upsilon\nu\varphi = 1$ τότε $\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi = -1$	Σ	Λ
14. Το $\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	Σ	Λ
15. Ισχύει $\epsilon\varphi 1^\circ \epsilon\varphi 2^\circ \dots \epsilon\varphi 88^\circ \epsilon\varphi 89^\circ = 1$	Σ	Λ

2. Βρισκόμαστε στην όχθη ενός ποταμού και βλέπουμε στην απέναντι όχθη ένα δέντρο με γωνία ύψους 60° . Αν απομακρυνθούμε 20cm , τότε βλέπουμε το δέντρο με γωνία ύψους 30° . Να υπολογιστεί το ύψος του δέντρου και το πλάτος του ποταμού.

3. Αν $\frac{9\pi}{2} < x < \frac{14\pi}{3}$ δείξτε ότι $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - \epsilon\varphi x - \sigma\varphi x > 0$.

4. α) Να δείξετε ότι $-\sqrt{a^2 + \beta^2} \leq \alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x \leq \sqrt{a^2 + \beta^2}$

β) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο της παράστασης $y = 3\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu x$

γ) Υπάρχει γωνία x με $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 2$;

5. Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ τότε δείξτε $\eta\mu x \epsilon\varphi x > 2(1 - \sigma\upsilon\nu x)$

6. Αν $\eta\mu\omega + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\omega = 2$, βρείτε τα $\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu\omega$

7. Δείξτε ότι η παράσταση $\frac{\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 1}$ παίρνει τη μορφή $\alpha\eta\mu\omega + \beta\sigma\upsilon\nu\omega + \gamma$

8. Αν $\alpha\eta\mu x + \eta\mu^2 x = \beta\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, με $0 < x < \frac{\pi}{2}$, δείξτε ότι

$$\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{4}{3}} + \alpha^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} = 1$$

9. Αν $x \neq 0$ δείξτε ότι $x + \frac{1}{x} \geq 2\eta\mu x$

10. Αν $S_\nu = \eta\mu^\nu x + \sigma\upsilon\nu^\nu x$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $S_1 = a$ δείξτε ότι

$$S_n = \alpha S_{n-1} - \frac{\alpha^2 - 1}{2} S_{n-2}$$

11. Βρείτε όλες τις τιμές της $\varepsilon\varphi\left(\frac{2\kappa\pi}{3}\right)$, $\kappa \in N$

12. Για οποιαδήποτε γωνία $x \text{ rad}$ δείξτε ότι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{(2\kappa+1)\pi}{2} - x\right) = (-1)^\kappa \eta\mu x$, $\kappa \in Z$

13. Αν $\omega - \varphi = \frac{3\pi}{2}$ δείξτε ότι ι) $\sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1$ και ιι) $\sigma\varphi\varphi\sigma\varphi\omega = 1$

14. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ δείξτε ότι

$$\text{ι) } \eta\mu(2A + B + \Gamma) = -\eta\mu A, \quad \text{ιι) } \eta\mu\left(\frac{2A+B}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{A-\Gamma}{2}\right)$$

15) Να βρεθεί η τιμή της $\varepsilon\varphi\left(\frac{\kappa\pi}{3} + \frac{(-1)^\kappa\pi}{6}\right)$, $\kappa \in Z$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΥΜΕΝΕΣ

1. Δείξτε $\frac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha - \varepsilon\varphi^2 \alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2 2\alpha \varepsilon\varphi^2 \alpha} = \varepsilon\varphi 3\alpha \varepsilon\varphi \alpha$

Λύση:

$$\frac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha - \varepsilon\varphi^2 \alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2 2\alpha \varepsilon\varphi^2 \alpha} = \frac{(\varepsilon\varphi 2\alpha - \varepsilon\varphi \alpha)(\varepsilon\varphi 2\alpha + \varepsilon\varphi \alpha)}{(1 - \varepsilon\varphi 2\alpha \varepsilon\varphi \alpha)(1 + \varepsilon\varphi 2\alpha \varepsilon\varphi \alpha)} = \frac{\varepsilon\varphi 2\alpha - \varepsilon\varphi \alpha}{1 + \varepsilon\varphi 2\alpha \varepsilon\varphi \alpha} \varepsilon\varphi 3\alpha = \varepsilon\varphi \alpha \varepsilon\varphi 3\alpha$$

2. Δείξτε $\frac{1 + \eta\mu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi \alpha$

Λύση:

$$\frac{1 + \eta\mu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{1 + 2\eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu \alpha - 1 + 2\eta\mu^2 \alpha}{1 + 2\eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu \alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha - 1} = \frac{2\eta\mu \alpha (\eta\mu \alpha + \sigma\upsilon\nu \alpha)}{2\sigma\upsilon\nu \alpha (\eta\mu \alpha + \sigma\upsilon\nu \alpha)} = \varepsilon\varphi \alpha$$

3. Δείξτε $\frac{1}{\varepsilon\varphi 3\alpha - \varepsilon\varphi \alpha} - \frac{1}{\sigma\varphi 3\alpha - \sigma\varphi \alpha} = \sigma\varphi 2\alpha$

Λύση:

$$\frac{1}{\varepsilon\varphi 3\alpha - \varepsilon\varphi \alpha} - \frac{1}{\sigma\varphi 3\alpha - \sigma\varphi \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma\varphi 3\alpha} - \frac{1}{\sigma\varphi \alpha}} - \frac{1}{\sigma\varphi 3\alpha - \sigma\varphi \alpha} = \frac{\sigma\varphi 3\alpha \sigma\varphi \alpha}{\sigma\varphi \alpha - \sigma\varphi 3\alpha} + \frac{1}{\sigma\varphi \alpha - \sigma\varphi 3\alpha} = \sigma\varphi 2\alpha$$

4. Δείξτε $\frac{2\eta\mu 2\alpha - \eta\mu 4\alpha}{2\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 4\alpha} = \varepsilon\varphi^2 \alpha$

Λύση:

$$\frac{2\eta\mu 2\alpha - \eta\mu 4\alpha}{2\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 4\alpha} = \frac{2\eta\mu 2\alpha (1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha)}{2\eta\mu 2\alpha (1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha)} = \frac{2\eta\mu^2 \alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} = \varepsilon\varphi^2 \alpha$$

5. Δείξτε $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu \alpha}{\sigma\upsilon\nu \alpha} = \varepsilon\varphi \left(\frac{\alpha}{2} \right)$

Λύση:

$$\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu \alpha}{\sigma\upsilon\nu \alpha} = \frac{2\eta\mu \alpha (1 - \sigma\upsilon\nu \alpha)}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{2\eta\mu \alpha (1 - \sigma\upsilon\nu \alpha)}{2\eta\mu^2 \alpha} = \frac{2\eta\mu^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{2\eta\mu \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\alpha}{2} \right)} = \varepsilon\varphi \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

6. Δείξτε $(\sigma\upsilon\nu \alpha + \sigma\upsilon\nu \beta)^2 + (\eta\mu \alpha - \eta\mu \beta)^2 = 4\sigma\upsilon\nu^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$

Λύση:

$$(\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)^2 = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - 2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta =$$

$$2 + 2\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = 2(1 + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)) = 4\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$7. \text{ Δείξτε } \eta\mu^4 \frac{\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{3\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{5\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$$

Λύση:

$$\eta\mu^4 \frac{\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{3\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{5\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{7\pi}{8} = 2\eta\mu^4 \frac{\pi}{8} + 2\eta\mu^4 \frac{3\pi}{8} =$$

$$2\eta\mu^4 \frac{\pi}{8} + 2\eta\mu^4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 2\eta\mu^4 \frac{\pi}{8} + 2\sigma\upsilon\nu^4 \frac{\pi}{8} =$$

$$2 \left[\left(\eta\mu^2 \frac{\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{8} \right)^2 - 2\eta\mu^2 \frac{\pi}{8} \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{8} \right] =$$

$$2 \left(1 - \frac{1}{2} \left(\eta\mu \frac{2\pi}{8} \right)^2 \right) = \frac{3}{2}$$

$$8. \text{ Αν } \varepsilon\varphi^2\alpha = 1 + 2\varepsilon\varphi^2\beta \text{ τότε } \sigma\upsilon\nu 2\beta = 1 + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha$$

Λύση:

$$\text{Είναι } \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha} \text{ άρα αρκεί να δείξω } \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\beta}{1 + \varepsilon\varphi^2\beta} = 1 + 2 \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}.$$

Ισοδύναμα λόγω της υπόθεσης, αρκεί

$$\frac{1 - \varepsilon\varphi^2\beta}{1 + \varepsilon\varphi^2\beta} = 1 + 2 \frac{-2\varepsilon\varphi^2\beta}{2(1 + \varepsilon\varphi^2\beta)}$$

$$\frac{1 - \varepsilon\varphi^2\beta}{1 + \varepsilon\varphi^2\beta} = 1 + \frac{-2\varepsilon\varphi^2\beta}{1 + \varepsilon\varphi^2\beta}$$

$$\frac{1 - \varepsilon\varphi^2\beta}{1 + \varepsilon\varphi^2\beta} = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\beta}{1 + \varepsilon\varphi^2\beta}$$

$$*9. \text{ Δείξτε } \frac{\eta\mu\alpha - \eta\mu 5\alpha + \eta\mu 9\alpha - \eta\mu 13\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha - \sigma\upsilon\nu 9\alpha + \sigma\upsilon\nu 13\alpha} = \sigma\varphi 4\alpha$$

Λύση:

$$\frac{\eta\mu\alpha - \eta\mu5\alpha + \eta\mu9\alpha - \eta\mu13\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu5\alpha - \sigma\upsilon\nu9\alpha + \sigma\upsilon\nu13\alpha} = \frac{(\eta\mu\alpha - \eta\mu13\alpha) + (\eta\mu9\alpha - \eta\mu5\alpha)}{(\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu13\alpha) - (\sigma\upsilon\nu5\alpha + \sigma\upsilon\nu9\alpha)} =$$

$$\frac{2\eta\mu(-6\alpha)\sigma\upsilon\nu7\alpha + 2\eta\mu2\alpha\sigma\upsilon\nu7\alpha}{2\sigma\upsilon\nu7\alpha\sigma\upsilon\nu(-6\alpha) - 2\sigma\upsilon\nu7\alpha\sigma\upsilon\nu2\alpha} = \frac{-\eta\mu6\alpha + \eta\mu2\alpha}{\sigma\upsilon\nu6\alpha - \sigma\upsilon\nu2\alpha} =$$

$$\frac{\eta\mu2\alpha - \eta\mu6\alpha}{\sigma\upsilon\nu6\alpha - \sigma\upsilon\nu2\alpha} = \frac{2\eta\mu(-2\alpha)\sigma\upsilon\nu4\alpha}{2\eta\mu4\alpha\eta\mu(-2\alpha)} = \sigma\varphi4\alpha$$

$$10. \text{ Δείξτε } \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu(\alpha + \beta) = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Λύση:

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\beta) + \eta\mu\beta(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha) =$$

$$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu^2\frac{\beta}{2} + 2\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\beta}{2} + 4\eta\mu\frac{\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$*11. \text{ Δείξτε } \eta\mu20^0\eta\mu40^0\eta\mu60^0\eta\mu80^0 = \frac{3}{16}$$

Λύση:

$$\eta\mu20^0\eta\mu40^0\eta\mu60^0\eta\mu80^0 = \eta\mu20\eta\mu40\sigma\upsilon\nu30\sigma\upsilon\nu10 =$$

$$\frac{1}{4}(2\eta\mu20\eta\mu40)(2\sigma\upsilon\nu30\sigma\upsilon\nu10) = \frac{1}{4}(\sigma\upsilon\nu20 - \sigma\upsilon\nu60)(\sigma\upsilon\nu20 + \sigma\upsilon\nu40) =$$

$$\frac{1}{8}(2\sigma\upsilon\nu^220 - 2\sigma\upsilon\nu20\sigma\upsilon\nu60 + 2\sigma\upsilon\nu20\sigma\upsilon\nu40 - 2\sigma\upsilon\nu40\sigma\upsilon\nu60) =$$

$$\frac{1}{8}(1 + \sigma\upsilon\nu40 - (\sigma\upsilon\nu80 + \sigma\upsilon\nu40) + (\sigma\upsilon\nu60 + \sigma\upsilon\nu20) - (\sigma\upsilon\nu100 + \sigma\upsilon\nu20)) =$$

$$\frac{1}{8}(1 - (\sigma\upsilon\nu80 + \sigma\upsilon\nu100) + \sigma\upsilon\nu60) = \frac{1}{8}\left(1 - 2\sigma\upsilon\nu90\sigma\upsilon\nu10 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}$$

$$*12. \text{ Δείξτε: } \varepsilon\varphi9^0 - \varepsilon\varphi27^0 - \varepsilon\varphi63^0 + \varepsilon\varphi81^0 = 4$$

Λύση:

$$\begin{aligned}
\epsilon\varphi 9^0 - \epsilon\varphi 27^0 - \epsilon\varphi 63^0 + \epsilon\varphi 81^0 &= \frac{\eta\mu 9}{\sigma\upsilon\nu 9} + \frac{\eta\mu 81}{\sigma\upsilon\nu 81} - \frac{\eta\mu 27}{\sigma\upsilon\nu 27} - \frac{\eta\mu 63}{\sigma\upsilon\nu 63} = \\
&= \frac{\eta\mu 9\sigma\upsilon\nu 81 + \sigma\upsilon\nu 9\eta\mu 81}{\sigma\upsilon\nu 9\sigma\upsilon\nu 81} - \frac{\eta\mu 27\sigma\upsilon\nu 63 + \sigma\upsilon\nu 27\eta\mu 63}{\sigma\upsilon\nu 27\sigma\upsilon\nu 63} = \\
&= \frac{\eta\mu 90}{\sigma\upsilon\nu 9\sigma\upsilon\nu 81} - \frac{\eta\mu 90}{\sigma\upsilon\nu 27\sigma\upsilon\nu 63} = \frac{1}{\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu 90 + \sigma\upsilon\nu 72)} - \frac{1}{\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu 90 + \sigma\upsilon\nu 36)} = \\
&= 2\frac{\sigma\upsilon\nu 36 - \sigma\upsilon\nu 72}{\sigma\upsilon\nu 36\sigma\upsilon\nu 72} = 4\frac{\eta\mu 54\eta\mu 18}{\sigma\upsilon\nu 36\sigma\upsilon\nu 72} = 4
\end{aligned}$$

13. Δείξτε $\epsilon\varphi(\alpha - \beta) + \epsilon\varphi(\beta - \gamma) + \epsilon\varphi(\gamma - \alpha) = \epsilon\varphi(\alpha - \beta)\epsilon\varphi(\beta - \gamma)\epsilon\varphi(\gamma - \alpha)$

Λύση:

Είναι $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) = -(\gamma - \alpha)$. Άρα

$$\epsilon\varphi((\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)) = \epsilon\varphi(-(\gamma - \alpha))$$

$$\frac{\epsilon\varphi(\alpha - \beta) + \epsilon\varphi(\beta - \gamma)}{1 - \epsilon\varphi(\alpha - \beta)\epsilon\varphi(\beta - \gamma)} = -\epsilon\varphi(\gamma - \alpha)$$

$$\epsilon\varphi(\alpha - \beta) + \epsilon\varphi(\beta - \gamma) + \epsilon\varphi(\gamma - \alpha) = \epsilon\varphi(\alpha - \beta)\epsilon\varphi(\beta - \gamma)\epsilon\varphi(\gamma - \alpha)$$

14. Αν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ δείξτε $\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta + \epsilon\varphi\gamma = \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta\epsilon\varphi\gamma$

Λύση:

$$\text{Είναι } \alpha + \beta = \pi - \gamma \text{ άρα } \epsilon\varphi(\alpha + \beta) = \epsilon\varphi(\pi - \gamma) \Rightarrow \frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta}{1 - \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta} = -\epsilon\varphi\gamma$$

$$\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta + \epsilon\varphi\gamma = \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta\epsilon\varphi\gamma$$

15. Αν $\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta + \epsilon\varphi\gamma = \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta\epsilon\varphi\gamma$, ποια σχέση συνδέει τα α, β, γ ;

Λύση:

$$\text{Από τη δοσμένη, } \epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta = -\epsilon\varphi\gamma(1 - \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta) \quad (1)$$

Αν $1 - \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta = 0$ δηλαδή $\epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta = 1$, τότε από την (1) έχουμε $\epsilon\varphi\alpha = -\epsilon\varphi\beta$ οπότε $\epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta = -\epsilon\varphi^2\beta < 0$, άτοπο. Άρα, $1 - \epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta \neq 0$. Άρα η (1) δίνει

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} = -\varepsilon\varphi\gamma \Rightarrow \varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \varepsilon\varphi(\pi - \gamma) \Rightarrow \alpha + \beta = \kappa\pi + (\pi - \gamma) \Rightarrow$$

$$\alpha + \beta + \gamma = (\kappa + 1)\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \lambda\pi, \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

$$16. \text{ Αν } \alpha + \beta + \gamma = \pi, \text{ δείξτε ότι } \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2} + \varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2} + \varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = 1$$

Λύση:

$$\text{Είναι } \alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ άρα } \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\frac{\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} + \varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}}{1 - \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2}}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}\varepsilon\varphi\frac{\beta}{2} + \varepsilon\varphi\frac{\beta}{2}\varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2} + \varepsilon\varphi\frac{\gamma}{2}\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = 1$$

$$17. \text{ Αν } \alpha + \beta + \gamma = \pi \text{ τότε } \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\gamma + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma = 1$$

Λύση:

$$\text{Είναι } \alpha + \beta = \pi - \gamma \text{ οπότε } \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu(\pi - \gamma) = -\sigma\upsilon\nu\gamma$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta = -\sigma\upsilon\nu\gamma$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma = \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

$$(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma)^2 = \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\gamma + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma = \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta$$

$$= (1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)(1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta) =$$

$$= 1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\gamma + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma = 1$$

18. Αν ισχύει $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 1$, ποια σχέση συνδέει τα α, β, γ ;

Λύση:

Η δοσμένη γράφεται: $\sin^2 \gamma + 2\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 1 = 0$

που είναι τριώνυμο ως προς $\sin \gamma$. Αν Δ η διακρίνουσα έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{4} &= \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta + 1 = \\ (1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \beta) &= \eta \mu^2 \alpha \eta \mu^2 \beta \geq 0\end{aligned}$$

Άρα οι ρίζες του τριωνύμου είναι

$$\sin \gamma = -\sin \alpha \sin \beta \pm \eta \mu \alpha \eta \mu \beta = -\sin(\alpha \pm \beta)$$

Άρα $\alpha \pm \beta = \pm(\pi - \gamma) + 2\kappa\pi \Rightarrow \alpha \pm \beta \pm \gamma = (2\kappa + 1)\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.

19. Αν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, τότε $\eta \mu^2 \alpha + \eta \mu^2 \beta + \eta \mu^2 \gamma - 2\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 2$

Λύση:

Έχουμε $\alpha + \beta = \pi - \gamma \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin(\pi - \gamma)$

$$\sin \alpha \sin \beta - \eta \mu \alpha \eta \mu \beta = -\sin \gamma$$

$$\sin \alpha \sin \beta + \sin \gamma = \eta \mu \alpha \eta \mu \beta$$

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \eta \mu^2 \alpha \eta \mu^2 \beta$$

$$(1 - \eta \mu^2 \alpha)(1 - \eta \mu^2 \beta) + (1 - \eta \mu^2 \gamma) + 2\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \eta \mu^2 \alpha \eta \mu^2 \beta$$

$$1 - \eta \mu^2 \alpha - \eta \mu^2 \beta + 1 - \eta \mu^2 \gamma + 2\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 0$$

$$\eta \mu^2 \alpha + \eta \mu^2 \beta + \eta \mu^2 \gamma - 2\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 2$$

20. Αν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, τότε $\sigma \varphi \frac{\alpha}{2} + \sigma \varphi \frac{\beta}{2} + \sigma \varphi \frac{\gamma}{2} = \sigma \varphi \frac{\alpha}{2} \sigma \varphi \frac{\beta}{2} \sigma \varphi \frac{\gamma}{2}$

Λύση: Έχουμε $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \Rightarrow$

$$\sigma \varphi \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = \sigma \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) = \varepsilon \varphi \left(\frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1}{\sigma \varphi \frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}\sigma\varphi\frac{\beta}{2}-1}{\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}+\sigma\varphi\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{\sigma\varphi\frac{\gamma}{2}}$$

$$\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}+\sigma\varphi\frac{\beta}{2}+\sigma\varphi\frac{\gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}\sigma\varphi\frac{\beta}{2}\sigma\varphi\frac{\gamma}{2}$$

21. Αν $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, τότε $\sigma\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\beta + \sigma\varphi^2\gamma \geq 1$

Λύση: Έχουμε:

$$(\sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi\beta)^2 \geq 0$$

$$(\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\gamma)^2 \geq 0$$

$$(\sigma\varphi\gamma - \sigma\varphi\alpha)^2 \geq 0$$

Αναπτύσσουμε και προσθέτουμε κατά μέλη

$$2(\sigma\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\beta + \sigma\varphi^2\gamma) \geq 2(\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\beta\sigma\varphi\gamma + \sigma\varphi\gamma\sigma\varphi\alpha) \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } \alpha + \beta = \pi - \gamma \Rightarrow \sigma\varphi(\alpha + \beta) = \sigma\varphi(\pi - \gamma) \Rightarrow \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta} = -\sigma\varphi\gamma \Rightarrow$$

$$\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\beta\sigma\varphi\gamma + \sigma\varphi\gamma\sigma\varphi\alpha = 1$$

Άρα η (1) δίνει $\sigma\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\beta + \sigma\varphi^2\gamma \geq 1$.

22. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$.

Λύση:

$$36 + 54 = 90$$

$$36 = 90 - 54$$

$$\eta\mu 36 = \eta\mu(90 - 54)$$

$$\eta\mu 36 = \sigma\upsilon\nu 54$$

$$\eta\mu(2 \cdot 18) = \sigma\upsilon\nu(3 \cdot 18)$$

$$2\eta\mu 18\sigma\upsilon\nu 18 = 4\sigma\upsilon\nu^3 18 - 3\sigma\upsilon\nu 18$$

$$2\eta\mu 18 = 4\sigma\nu\nu^2 18 - 3$$

$$4\eta\mu^2 18 + 2\eta\mu 18 = 1$$

$$4\eta\mu^2 18 + 2\eta\mu 18 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\left(2\eta\mu 18 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\left|2\eta\mu 18 + \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$2\eta\mu 18 + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\eta\mu 18 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$23. \text{ Δείξτε ότι } \sigma\nu\nu^2\alpha + \sigma\nu\nu^2(\alpha + 120^0) + \sigma\nu\nu^2(\alpha - 120^0) = \frac{3}{2}$$

Λύση

$$\begin{aligned} & \sigma\nu\nu^2\alpha + \sigma\nu\nu^2(\alpha + 120^0) + \sigma\nu\nu^2(\alpha - 120^0) = \\ & \frac{1 + \sigma\nu\nu 2\alpha}{2} + \frac{1 + \sigma\nu\nu(2\alpha + 240)}{2} + \frac{1 + \sigma\nu\nu(2\alpha - 240)}{2} = \\ & \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\sigma\nu\nu 2\alpha + \sigma\nu\nu(2\alpha + 240) + \sigma\nu\nu(2\alpha - 240)) = \\ & \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\sigma\nu\nu 2\alpha + 2\sigma\nu\nu 2\alpha \sigma\nu\nu 240) = \\ & \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\sigma\nu\nu 2\alpha + 2\sigma\nu\nu 2\alpha (-\sigma\nu\nu 60)) = \\ & \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\sigma\nu\nu 2\alpha - 2\frac{1}{2}\sigma\nu\nu 2\alpha\right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$*24. \text{ Δείξτε } \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma - \eta\mu(\alpha + \beta + \gamma) = 4\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2}\eta\mu\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

Λύση

$$\begin{aligned} & \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma - \eta\mu(\alpha + \beta + \gamma) = \\ & 2\eta\mu\frac{\alpha + \beta}{2}\sigma\nu\nu\frac{\alpha - \beta}{2} + 2\eta\mu\frac{\gamma - \alpha - \beta - \gamma}{2}\sigma\nu\nu\frac{\gamma + \alpha + \beta + \gamma}{2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\eta\mu \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha - \beta}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{2\gamma + \alpha + \beta}{2} \right) = \\
& 2\eta\mu \frac{\alpha + \beta}{2} 2\eta\mu \frac{\alpha - \beta + 2\gamma + \alpha + \beta}{4} \eta\mu \frac{2\gamma + \alpha + \beta - \alpha + \beta}{2} = \\
& 4\eta\mu \frac{\alpha + \beta}{2} \eta\mu \frac{\beta + \gamma}{2} \eta\mu \frac{\alpha + \gamma}{2}
\end{aligned}$$

*25. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν

α) $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 4\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$

β) $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1 + 4\eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2} \eta\mu \frac{\Gamma}{2}$

γ) $\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma = 4\eta\mu A \eta\mu B \eta\mu \Gamma$

Λύση

α) $\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + \eta\mu \Gamma = 2\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} =$

$$2\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \left(\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + \eta\mu \frac{\Gamma}{2} \right) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} \left(\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \right) =$$

$$2\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} 2\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} = 4\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$$

β) $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} + 1 - 2\eta\mu^2 \frac{\Gamma}{2} =$

$$1 + 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \left(\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} - \eta\mu \frac{\Gamma}{2} \right) = 1 + 2\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \left(\sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \right) =$$

$$1 + 4\eta\mu \frac{\Gamma}{2} \eta\mu \frac{A}{2} \eta\mu \frac{B}{2}$$

γ) $\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma = 2\eta\mu \frac{2A+2B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{2A-2B}{2} + \eta\mu 2\Gamma =$

$$2\eta\mu(A+B)\sigma\upsilon\nu(A-B) + 2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma =$$

$$2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu(A-B) + 2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma =$$

$$2\eta\mu\Gamma(\sigma\upsilon\nu(A-B) + \sigma\upsilon\nu\Gamma) =$$

$$2\eta\mu\Gamma(\sigma\upsilon\nu(A-B) - \sigma\upsilon\nu(A+B)) =$$

$$4\eta\mu\Gamma\eta\mu A \eta\mu B$$

$$26. \text{ Δείξτε } I = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{15} \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{15} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{15} \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{15} \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{15} \sigma\upsilon\nu \frac{6\pi}{15} \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{15} = \frac{1}{2^7}$$

Λύση

Ισχύει $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ άρα $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha}$. Έτσι,

$$I = \frac{\eta\mu \frac{2\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{\pi}{15}} \frac{\eta\mu \frac{4\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{2\pi}{15}} \frac{\eta\mu \frac{6\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{3\pi}{15}} \frac{\eta\mu \frac{8\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{4\pi}{15}} \frac{\eta\mu \frac{10\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{5\pi}{15}} \frac{\eta\mu \frac{12\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{6\pi}{15}} \frac{\eta\mu \frac{14\pi}{15}}{2\eta\mu \frac{7\pi}{15}} =$$

$$\frac{1}{2^7} \frac{\eta\mu \frac{8\pi}{15} \eta\mu \frac{10\pi}{15} \eta\mu \frac{12\pi}{15} \eta\mu \frac{14\pi}{15}}{\eta\mu \frac{\pi}{15} \eta\mu \frac{3\pi}{15} \eta\mu \frac{5\pi}{15} \eta\mu \frac{7\pi}{15}} = \frac{1}{2^7}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την $\eta\mu\omega = \eta\mu\varphi$ αν $\varphi + \omega = \pi$.

*27. Δείξτε ότι

$$S = \eta\mu\alpha + \eta\mu(\alpha + \omega) + \eta\mu(\alpha + 2\omega) + \dots + \eta\mu(\alpha + (v-1)\omega) = \frac{\eta\mu\left(\alpha + \frac{v-1}{2}\omega\right)\eta\mu\frac{v\omega}{2}}{\eta\mu\frac{\omega}{2}}$$

Λύση

$$S = \eta\mu\alpha + \eta\mu(\alpha + \omega) + \eta\mu(\alpha + 2\omega) + \dots + \eta\mu(\alpha + (v-1)\omega) \Rightarrow$$

$$2S\eta\mu\frac{\omega}{2} = 2\eta\mu\alpha\eta\mu\frac{\omega}{2} + 2\eta\mu(\alpha + \omega)\eta\mu\frac{\omega}{2} + \dots + 2\eta\mu(\alpha + (v-1)\omega)\eta\mu\frac{\omega}{2}$$

Αλλά

$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)$$

$$2\eta\mu(\alpha + \omega)\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{3\omega}{2}\right)$$

... ..

$$2\eta\mu(\alpha + (v-1)\omega)\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{2v-3}{2}\omega\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{2v-1}{2}\omega\right)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη

$$2S\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{2v-1}{2}\omega\right) = 2\eta\mu\left(\alpha + \frac{v-1}{2}\omega\right)\eta\mu\frac{v\omega}{2}$$

που δίνει το ζητούμενο.

28. Να κάνετε γινόμενο τις παραστάσεις:

ι) $A = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sqrt{3}\eta\mu\alpha$ και

ιι) $B = 1 + \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{ι) } A &= \sigma\upsilon\nu\alpha + \sqrt{3}\eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha + \frac{\eta\mu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}\eta\mu\alpha = \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \eta\mu\alpha\eta\mu\frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}} = \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \frac{\pi}{3})}{\frac{1}{2}} = 2\sigma\upsilon\nu(\alpha - \frac{\pi}{3})$$

$$\text{ιι) } B = 1 + \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha = 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} + 1 + \sigma\upsilon\nu\alpha =$$

$$2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} + 1 + 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - 1 =$$

$$2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\left(\eta\mu\frac{\alpha}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\right)$$

Τώρα από Θεωρία 18, $\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\eta\mu\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

οπότε $\eta\mu\frac{\alpha}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\eta\mu(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ)$

Τελικά, $B = 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\eta\mu(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ)$

29. Δείξτε ότι

(α) $\varepsilon\varphi 3\alpha - \varepsilon\varphi 2\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi 3\alpha\varepsilon\varphi 2\alpha\varepsilon\varphi\alpha$

(β) $\frac{\sigma\varphi\alpha}{\sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi 3\alpha} + \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi 2\alpha\varepsilon\varphi\alpha} = 1$

Λύση

(α) $\varepsilon\varphi 3\alpha = \varepsilon\varphi(2\alpha + \alpha) = \frac{\varepsilon\varphi 2\alpha + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi 2\alpha\varepsilon\varphi\alpha}$

(β) $\frac{\sigma\varphi\alpha}{\sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi 3\alpha} + \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi 2\alpha\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi 3\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha(\varepsilon\varphi 3\alpha - \varepsilon\varphi\alpha)} + \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi 2\alpha\varepsilon\varphi\alpha} = 1$

$$30. \text{ Δείξτε } \left(1 + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{8}\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

Λύση

$$\begin{aligned} & \left(1 + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{8}\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{8}\right) = \\ & \left(1 + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}\right)\left(1 + \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}\right)\left(1 - \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}\right)\left(1 - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}\right) = \\ & \left(1 - \sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8}\right)\left(1 - \sigma\upsilon\nu^2\frac{3\pi}{8}\right) = \\ & \eta\mu^2\frac{\pi}{8}\eta\mu^2\frac{3\pi}{8} = \\ & \eta\mu^2\frac{\pi}{8}\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \\ & \eta\mu^2\frac{\pi}{8}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8} = \\ & \frac{1}{4}\left(\eta\mu\frac{2\pi}{8}\right)^2 = \\ & \frac{1}{4}\frac{2}{4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$31. \text{ Δείξτε ότι } 1 + \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta > \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

Λύση

Ισοδύναμα $\eta\mu^2\alpha - \eta\mu\alpha(1 + \eta\mu\beta) + \eta\mu^2\beta - \eta\mu\beta + 1 > 0$, που είναι τριώνυμο ως προς $\eta\mu\alpha$.

Είναι

$$\Delta = (1 + \eta\mu\beta)^2 - 4(\eta\mu^2\beta - \eta\mu\beta + 1) = -3\eta\mu^2\beta - 3 + 6\eta\mu\beta = -3(\eta\mu\beta - 1)^2 < 0$$

Άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του 1 δηλαδή θετικό για κάθε $\eta\mu\alpha$.

$$*32. \text{ Να γίνει γινόμενο η } I = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^22\theta + \sigma\upsilon\nu^23\theta + \sigma\upsilon\nu^24\theta - 2$$

Λύση

Έχουμε $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu2\alpha+1}{2}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\sigma\upsilon\nu 2\theta + 1}{2} + \frac{\sigma\upsilon\nu 4\theta + 1}{2} + \frac{\sigma\upsilon\nu 6\theta + 1}{2} + \frac{\sigma\upsilon\nu 8\theta + 1}{2} - 2 = \\
&\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu 2\theta + \sigma\upsilon\nu 4\theta + \sigma\upsilon\nu 6\theta + \sigma\upsilon\nu 8\theta) = \\
&\frac{1}{2}(\sigma\upsilon\nu 2\theta + \sigma\upsilon\nu 8\theta + \sigma\upsilon\nu 4\theta + \sigma\upsilon\nu 6\theta) = \\
&\frac{1}{2}\left(2\sigma\upsilon\nu \frac{2\theta + 8\theta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{8\theta - 2\theta}{2} + 2\sigma\upsilon\nu \frac{4\theta + 6\theta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{6\theta - 4\theta}{2}\right) = \\
&\frac{1}{2}(2\sigma\upsilon\nu 5\theta \sigma\upsilon\nu 3\theta + 2\sigma\upsilon\nu 5\theta \sigma\upsilon\nu \theta) = \\
&\sigma\upsilon\nu 5\theta(\sigma\upsilon\nu 3\theta + \sigma\upsilon\nu \theta) = \\
&\sigma\upsilon\nu 5\theta(2\sigma\upsilon\nu 2\theta \sigma\upsilon\nu \theta)
\end{aligned}$$

33. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν:

A) $\alpha = \beta \sigma\upsilon\nu \Gamma + \gamma \sigma\upsilon\nu B$

B) $\alpha(\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma) = 2(\beta + \gamma)\eta\mu^2 \frac{A}{2}$

Γ) $\beta \sigma\upsilon\nu B + \gamma \sigma\upsilon\nu \Gamma = \alpha \sigma\upsilon\nu(B - \Gamma)$

Δ) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 4E \sigma\phi A$, όπου $E = (AB\Gamma)$ το εμβαδό του τριγώνου

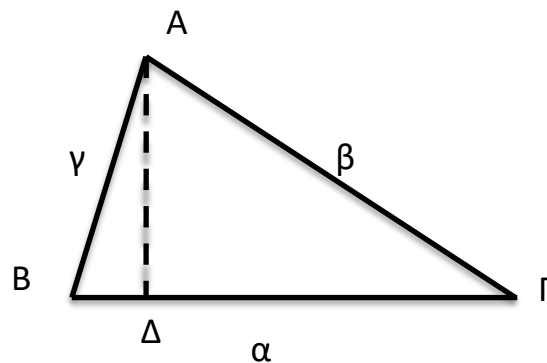
Ε) $\frac{\alpha \eta\mu(B-\Gamma)}{\beta^2 - \gamma^2} = \frac{\beta \eta\mu(\Gamma-A)}{\gamma^2 - \alpha^2}$

ΣΤ) $\eta\mu \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$, όπου τ η ημπερίμετρος του τριγώνου.

Ζ) $\beta \eta\mu \Gamma = \gamma \eta\mu B$

Λύση

A)



$$\text{Εδώ } \alpha = B\Delta + \Delta\Gamma = \gamma\sigma\upsilon\nu B + \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$\text{Β)} \quad \alpha(\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma) = 2(\beta + \gamma)\eta\mu^2 \frac{A}{2}$$

$$\alpha\sigma\upsilon\nu B + \alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma = (\beta + \gamma)(1 - \sigma\upsilon\nu A)$$

$$\alpha\sigma\upsilon\nu B + \alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma = \beta + \gamma - \beta\sigma\upsilon\nu A - \gamma\sigma\upsilon\nu A$$

$$(\alpha\sigma\upsilon\nu B + \beta\sigma\upsilon\nu A) + (\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu A) = \beta + \gamma$$

που ισχύει λόγω του (Α).

$$\text{Γ)} \alpha\sigma\upsilon\nu(B - \Gamma) = (\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B)(\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu B\eta\mu\Gamma) =$$

$$\beta\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu^2\Gamma + \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma\eta\mu B\eta\mu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu^2 B\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B\eta\mu B\eta\mu\Gamma =$$

$$\beta\sigma\upsilon\nu B - \beta\sigma\upsilon\nu B\eta\mu^2\Gamma + \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma\eta\mu B\eta\mu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma - \gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma\eta\mu^2 B + \gamma\sigma\upsilon\nu B\eta\mu B\eta\mu\Gamma =$$

$$(\beta\sigma\upsilon\nu B + \gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma) + (-\beta\sigma\upsilon\nu B\eta\mu^2\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B\eta\mu B\eta\mu\Gamma) + (\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma\eta\mu B\eta\mu\Gamma - \gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma\eta\mu^2 B)$$

$$= (\beta\sigma\upsilon\nu B + \gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma) + (-\gamma\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B\eta\mu B\eta\mu\Gamma)$$

$$+ (\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma\eta\mu B\eta\mu\Gamma - \beta\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma\eta\mu B)$$

$$= \beta\sigma\upsilon\nu B + \gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

όπου χρησιμοποίησαμε $\beta\eta\mu\Gamma = \gamma\eta\mu B$, $\gamma\eta\mu B = \beta\eta\mu\Gamma$ (βλ. Ζ)

$$\text{Δ)} \text{Θέλουμε } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 4E\sigma\varphi A$$

$$\text{Γνωρίζουμε το νόμο Συνημιτόνων: } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε $-4E\sigma\varphi A = -2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$, ισοδύναμα

$$2E\sigma\upsilon\nu A = \beta\gamma\sigma\upsilon\nu A\eta\mu A$$

$$\text{Αλλά } E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A, \text{ (βλ. Άσκ. 35), οπότε } 2E\sigma\upsilon\nu A = 2\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A\sigma\upsilon\nu A = \beta\gamma\sigma\upsilon\nu A\eta\mu A.$$

Ε) Έστω R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Τότε από το Νόμο Ημιτόνων και Συνημιτόνων

$$\frac{\eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu(\Gamma-A)} = \frac{\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma - \eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu A - \eta\mu A\sigma\upsilon\nu\Gamma} = \frac{2R\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma - 2R\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B}{2R\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu A - 2R\eta\mu A\sigma\upsilon\nu\Gamma} = \frac{\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma - \gamma\sigma\upsilon\nu B}{\gamma\sigma\upsilon\nu A - \alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma} =$$

$$\frac{\beta \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} - \gamma \frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}}{\gamma \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} - \alpha \frac{\beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}} =$$

$$\frac{\beta(\beta^2 - \gamma^2)}{\alpha(\gamma^2 - \alpha^2)}$$

$$\Sigma\Gamma) \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \sigma\upsilon\nu A \Rightarrow \sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \Rightarrow$$

$$1 - 2\eta\mu^2 \frac{A}{2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \Rightarrow$$

$$2\eta\mu^2 \frac{A}{2} = \frac{2\beta\gamma - \beta^2 - \gamma^2 + \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)}{2\beta\gamma} =$$

$$\frac{4(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{2\beta\gamma}$$

$$\text{Ζ)} \beta\eta\mu\Gamma = A\Delta = \gamma\eta\mu B.$$

*34. Σε κάθε τρίγωνο ισχύουν:

$$\text{Α)} \frac{\beta - \gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} \quad \text{Β)} \frac{\beta + \gamma}{2} \sigma\varphi \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B - \Gamma}{2} \quad \text{Γ)} \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} \sigma\varphi \frac{A}{2} = \varepsilon\varphi \frac{B - \Gamma}{2}$$

Λύση

$$\text{Α)} \frac{\beta - \gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \frac{2R\eta\mu B - 2R\eta\mu\Gamma}{2R\eta\mu A} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \frac{\eta\mu B - \eta\mu\Gamma}{\eta\mu A} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \frac{2\eta\mu \frac{B - \Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{2}}{2\eta\mu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \eta\mu \frac{B - \Gamma}{2},$$

$$\text{αφού } \frac{A}{2} + \frac{(B + \Gamma)}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Β)} \frac{\beta + \gamma}{2} \eta\mu \frac{A}{2} = \frac{2R\eta\mu B + 2R\eta\mu\Gamma}{2R\eta\mu A} \eta\mu \frac{A}{2} = \frac{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma}{\eta\mu A} \eta\mu \frac{A}{2} = \frac{2\eta\mu \frac{B + \Gamma}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{B - \Gamma}{2}}{2\eta\mu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}} \eta\mu \frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{B - \Gamma}{2}$$

Γ) Διαιρούμε κατά μέλη τις αποδείξεις.

35. Σε κάθε τρίγωνο ισχύουν:

$$1) \text{ Εμβαδό τριγώνου } E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma = \frac{1}{2}\alpha\gamma\eta\mu B$$

$$2) \alpha\beta\gamma = 4ER, \text{ όπου } R \text{ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου}$$

$$3) E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}, \text{ τύπος του Ήρωνα για το εμβαδό.}$$

Λύση

$$1) \text{ Στο σχήμα της άσκησης 33, } E = \frac{1}{2}\alpha(A\Delta) = \frac{1}{2}\alpha(\beta\eta\mu\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$$

$$2) E = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma \text{ και νόμος ημιτόνων } \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R \text{ δίνουν } E = \frac{1}{2}\alpha\beta\frac{\gamma}{2R} \Rightarrow 4ER = \alpha\beta\gamma$$

$$3) E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\beta\gamma 2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \beta\gamma\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\beta\gamma}}\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την 33 για το $\eta\mu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\beta\gamma}}$ από το οποίο προκύπτει και το

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}.$$

36. Σε κάθε τρίγωνο ισχύει: $\beta^2\eta\mu 2\Gamma + \gamma^2\eta\mu 2B = 4E$, όπου E το εμβαδόν.

Λύση

$$\beta^2\eta\mu 2\Gamma + \gamma^2\eta\mu 2B = 2\beta^2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma + 2\gamma^2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B =$$

$$2\beta^2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma + 2\gamma\beta\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B =$$

$$2\beta\eta\mu\Gamma(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B) =$$

$$2\beta\eta\mu\Gamma \cdot \alpha = 2\alpha\beta\eta\mu\Gamma = 4E$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\gamma\eta\mu B = \beta\eta\mu\Gamma$ και $\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B = \alpha$, βλ. Άσκ. 33.

37. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\alpha = 2\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$ τότε είναι ισοσκελές.

Λύση

$$\alpha = 2\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma \Rightarrow 2R\eta\mu A = 2(2R\eta\mu B)\sigma\upsilon\nu\Gamma \Rightarrow \eta\mu A = 2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$\eta\mu(B + \Gamma) = 2\eta\mu B \sigma\upsilon\nu\Gamma \Rightarrow \eta\mu B \sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu\Gamma \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu B \sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$\eta\mu(B - \Gamma) = 0 \Rightarrow B - \Gamma = \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

κι επειδή είμαστε σε τρίγωνο, $B - \Gamma = 0$.

38. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο αν αληθεύει ένα από τα παρακάτω

$$1) \eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma, \quad 2) \eta\mu\Gamma = \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B \quad 3) \eta\mu A = \frac{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma}$$

Λύση

$$1) \eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma \Rightarrow (2R\eta\mu A)^2 = (2R\eta\mu B)^2 + (2R\eta\mu\Gamma)^2 \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

$$2) \eta\mu\Gamma = \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B \Rightarrow \eta\mu^2 \Gamma = \sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \Rightarrow$$

$$1 - \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma = \sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B = 1$$

Αλλά από την άσκηση 17, $\sigma\upsilon\nu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^2 \beta + \sigma\upsilon\nu^2 \gamma + 2\sigma\upsilon\nu \alpha \sigma\upsilon\nu \beta \sigma\upsilon\nu \gamma = 1$, οπότε

$$\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B (\sigma\upsilon\nu \Gamma - 1) = 0$$

$$A = 90 \text{ ή } B = 90.$$

$$3) \text{ Λόγω του Νόμου ημιτόνων η ζητούμενη } \eta\mu A = \frac{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma} \text{ γίνεται}$$

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma} \Rightarrow \alpha(\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma) = \beta + \gamma \Rightarrow$$

$$\alpha \sigma\upsilon\nu B + \alpha \sigma\upsilon\nu\Gamma = \beta + \gamma \Rightarrow$$

$$\alpha \sigma\upsilon\nu B + \beta \sigma\upsilon\nu A + \alpha \sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma \sigma\upsilon\nu A = \beta + \gamma + \beta \sigma\upsilon\nu A + \gamma \sigma\upsilon\nu A$$

$$\gamma + \beta = \beta + \gamma + (\beta + \gamma) \sigma\upsilon\nu A$$

$$\sigma\upsilon\nu A = 0$$

$$A = 90.$$

39. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\alpha^2 + \gamma^2 = 2\beta^2$, τότε $\sigma\varphi A + \sigma\varphi \Gamma = 2\sigma\varphi B$

Λύση

Από το Νόμο συνημιτόνων, η δοσμένη $\alpha^2 + \gamma^2 = 2\beta^2$ γίνεται

$$\beta^2 + 2\alpha\gamma\sigma\eta\nu B = 2\beta^2$$

$$2\alpha\gamma\sigma\eta\nu B = \beta^2$$

$$2\alpha\gamma\sigma\varphi B = \frac{\beta^2}{\eta\mu B}$$

οπότε χρησιμοποιώντας και το νόμο ημιτόνων,

$$2\sigma\varphi B = \frac{\beta^2}{\alpha\gamma\eta\mu B} = \frac{4R^2\eta\mu^2 B}{\alpha\gamma\eta\mu B} = \frac{\eta\mu B}{\eta\mu A\eta\mu \Gamma} = \frac{\eta\mu(A + \Gamma)}{\eta\mu A\eta\mu \Gamma} = \sigma\varphi A + \sigma\varphi \Gamma$$

40. Να επιλυθεί η εξίσωση $\varepsilon\varphi(45 + \alpha) - \varepsilon\varphi(45 - \alpha) = 2\sqrt{3}$, $\alpha \in [0, 180^\circ]$

Λύση

$$\varepsilon\varphi(45 + \alpha) - \varepsilon\varphi(45 - \alpha) = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha} - \frac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha} = 2\sqrt{3}$$

$$(1 + \varepsilon\varphi\alpha)^2 - (1 - \varepsilon\varphi\alpha)^2 = 2\sqrt{3}(1 - \varepsilon\varphi^2\alpha)$$

$$4\varepsilon\varphi\alpha = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\varepsilon\varphi^2\alpha$$

$$2\sqrt{3}\varepsilon\varphi^2\alpha + 4\varepsilon\varphi\alpha - 2\sqrt{3} = 0$$

$$2\sqrt{3}\omega^2 + 4\omega - 2\sqrt{3} = 0$$

$$\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{l} \varepsilon\varphi\alpha \neq \pm 1, \\ \sigma\eta\nu\alpha \neq 0 \end{array}$$

$$\omega = \varepsilon\varphi\alpha$$

$$\text{Άρα } \varepsilon\varphi\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ή, } \varepsilon\varphi\alpha = -\sqrt{3} = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \alpha = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Αλλά } 0 \leq \alpha \leq \pi. \text{ Άρα πρέπει } 0 \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \leq \pi \text{ ή } 0 \leq \kappa\pi - \frac{\pi}{3} \leq \pi \Rightarrow \kappa = 0, 1$$

Άρα $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ή $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ ή $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, όχι σε αντίφαση με τους περιορισμούς.

$$41. \text{ Να λυθεί η εξίσωση } 3\eta\mu^2\alpha - 2\sqrt{3}\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 0$$

Λύση

Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha = 0$ τότε η εξίσωση δίνει $\eta\mu\alpha = 0$, αδύνατο. Άρα $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$. Άρα $\alpha \neq 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$

$$\text{Η εξίσωση γράφεται } 3\varepsilon\varphi^2\alpha - 2\sqrt{3}\varepsilon\varphi\alpha + 1 = 0$$

Είναι τριώνυμο, θέτοντας $\omega = \varepsilon\varphi\alpha$ προκύπτει $\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$ οπότε $\alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

$$42. \text{ Να λυθεί η εξίσωση } \eta\mu\alpha - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu\alpha + 1 = 0$$

Λύση

$$\text{Γραφεται } \frac{1}{2}\eta\mu\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu\alpha + \frac{1}{2} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\eta\mu\alpha - \eta\mu\frac{\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\eta\mu\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\alpha = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \text{ ή } \alpha = (2\kappa + 1)\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$43. \text{ Να λυθεί η εξίσωση } 3\eta\mu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu\alpha = 2$$

Λύση

Καταρχάς $\alpha \neq 2\kappa\pi \pm \pi$, αλλιώς η δοσμένη δίνει $-2 = 2$, άτοπο.

Επίσης $\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = \frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$ και $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$ (βλ. Άσκηση 15). Έτσι,

$$3\eta\mu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu\alpha = 2$$

$$\frac{6\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{2\left(1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}} = 2$$

Μετά τις πράξεις παίρνουμε $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}\left(2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} - 3\right) = 0$ και συνεχίζουμε κατά τα γνωστά.

2^{ος} τρόπος

Σύμφωνα με τη Θεωρία 18, $\rho = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ και $\eta\mu\varphi = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ άρα η εξίσωση γράφεται $\sqrt{13}\eta\mu(\alpha + \varphi) = 2$ οπότε $\eta\mu(\alpha + \varphi) = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ και συνεχίζουμε και με τη βοήθεια τριγ. Πινάκων.

44. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\frac{x}{2})$. 1) Ποια είναι η μέγιστη και ποιά η ελάχιστη τιμή της; 2) Πόσες θέσεις μεγίστου και ελαχίστου υπάρχουν; 3) Ποιά είναι η περίοδος της; 4) Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση αυτή.

Λύση

1) Μέγιστη τιμή είναι το 1 και ελάχιστη το -1 .

2) Υπάρχουν άπειρες θέσεις μεγίστου και ελαχίστου. Πχ, οι θέσεις μεγίστου είναι οι $x = \pi + κ\pi, κ \in \mathbb{Z}$.

3) Η περίοδος είναι $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$ (βλ. Θεωρία 23).

4) Πινακάκι

Βοηθητική γραμμή	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	π	2π	3π	4π
$f(x)$	0	1	0	-1	0

