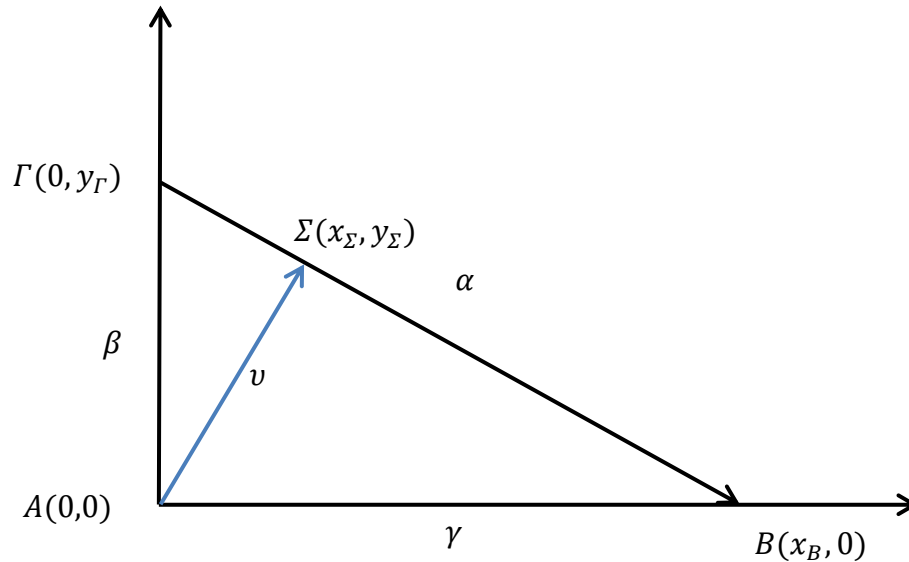


ΑΣΚΗΣΗ 31 ΛΥΣΗ -- 2^{ος} ΤΡΟΠΟΣ (ΜΕ ΑΞΟΝΕΣ)

Αποδείξτε ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές β, γ και ύψος προς την υποτείνουσα ν ισχύει: $\frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$

ΛΥΣΗ



Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με αρχή το $A(0,0)$ και τα σημεία-κορυφές του τριγώνου με συντεταγμένες $B(x_B, 0), \Gamma(0, y_\Gamma)$. Έστω AS το ύψος στην υποτείνουσα και έστω (x_Σ, y_Σ) οι συντεταγμένες του Σ .

Άρα, $\overrightarrow{\Gamma\Sigma} = (x_\Sigma, y_\Sigma - y_\Gamma)$ και $\overrightarrow{\Sigma B} = (x_B - x_\Sigma, -y_\Sigma)$ και $\overrightarrow{\Gamma B} = (x_B, -y_\Gamma)$

Έχουμε $\overrightarrow{\Gamma\Sigma} \parallel \overrightarrow{\Sigma B}$ άρα $\det(\overrightarrow{\Gamma\Sigma}, \overrightarrow{\Sigma B}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_\Sigma & y_\Sigma - y_\Gamma \\ x_B - x_\Sigma & -y_\Sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$-x_\Sigma y_\Sigma - x_B y_\Sigma + x_B y_\Gamma + x_\Sigma y_\Sigma - x_\Sigma y_\Gamma = 0 \Rightarrow$$

$$-x_B y_\Sigma + x_B y_\Gamma - x_\Sigma y_\Gamma = 0 \Rightarrow$$

$$y_\Gamma x_\Sigma + x_B y_\Sigma = x_B y_\Gamma \quad (1)$$

Επίσης $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{\Gamma B}$. Άρα, $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} = 0 \Rightarrow (x_\Sigma, y_\Sigma) \cdot (x_B, -y_\Gamma) = 0 \Rightarrow$

$$x_B x_\Sigma - y_\Gamma y_\Sigma = 0 \quad (2)$$

Οι (1), (2) θεωρούνται σύστημα ως προς x_Σ, y_Σ .

$$\text{Ορίζουσα συστήματος } D = \begin{vmatrix} y_{\Gamma} & x_B \\ x_B & -y_{\Gamma} \end{vmatrix} = x_B^2 + y_{\Gamma}^2$$

$$\text{και } D_{x_{\Sigma}} = \begin{vmatrix} x_B y_{\Gamma} & x_B \\ 0 & -y_{\Gamma} \end{vmatrix} = -x_B y_{\Gamma}^2 \text{ και } D_{y_{\Sigma}} = \begin{vmatrix} y_{\Gamma} & x_B y_{\Gamma} \\ x_B & 0 \end{vmatrix} = -x_B^2 y_{\Gamma}.$$

$$\text{Άρα } x_{\Sigma} = \frac{D_{x_{\Sigma}}}{D} = \frac{-x_B y_{\Gamma}^2}{x_B^2 + y_{\Gamma}^2} \text{ και } y_{\Sigma} = \frac{-x_B^2 y_{\Gamma}}{x_B^2 + y_{\Gamma}^2}.$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} &= \frac{1}{x_{\Sigma}^2 + y_{\Sigma}^2} = \frac{1}{\left(\frac{-x_B y_{\Gamma}^2}{x_B^2 + y_{\Gamma}^2}\right)^2 + \left(\frac{-x_B^2 y_{\Gamma}}{x_B^2 + y_{\Gamma}^2}\right)^2} = \\ &= \frac{(x_B^2 + y_{\Gamma}^2)^2}{x_B^2 y_{\Gamma}^4 + x_B^4 y_{\Gamma}^2} = \frac{(x_B^2 + y_{\Gamma}^2)^2}{x_B^2 y_{\Gamma}^2 (x_B^2 + y_{\Gamma}^2)} = \\ &= \frac{x_B^2 + y_{\Gamma}^2}{x_B^2 y_{\Gamma}^2} = \frac{1}{x_B^2} + \frac{1}{y_{\Gamma}^2} = \\ &= \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2}. \end{aligned}$$

3ος ΤΡΟΠΟΣ ΜΕ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Εμβαδό τριγώνου $ΑΓΒ$ είναι $E = \frac{1}{2} \alpha \cdot v$ αλλά και $E = \frac{1}{2} \beta \gamma$. Άρα $\alpha \cdot v = \beta \cdot \gamma$.

Με το πυθαγόρειο έχουμε:

$$\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta^2 \gamma^2} = \frac{\alpha^2}{(\beta \gamma)^2} = \frac{\alpha^2}{(\alpha \cdot v)^2} = \frac{1}{v^2}$$

Ο πιο εύκολος τρόπος είναι με ευκλείδεια γεωμετρία! Όλοι οι μηχανισμοί ανάλυσης που χρησιμοποιήσαμε στους προηγούμενους τρόπους δυσκόλευαν τα πράγματα, σε αντίθεση με άλλες ασκήσεις. Έτσι κανείς δεν είναι σίγουρος ποιον τρόπο να ακολουθήσει.