

ΑΣΚΗΣΗ 31 – ΛΥΣΗ ΦΥΛΛΑΔΙΟ

Έστω $\vec{u}, \vec{v}$ μη συγγραμμικά διανύσματα. ι) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός λ ώστε το διάνυσμα $\vec{w} = (1-\lambda)\vec{u} + \lambda\vec{v}$ να είναι κάθετο στο $\vec{u} - \vec{v}$, ιι) Αν είναι $\vec{w} \perp \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{v}$, δείξτε ότι: $\frac{1}{|\vec{w}|^2} = \frac{1}{|\vec{u}|^2} + \frac{1}{|\vec{v}|^2}$. ιiii) Αποδείξτε (με τη βοήθεια του ιι) ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές β, γ και ύψος προς την υποτείνουσα v ισχύει: $\frac{1}{v^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$

ΛΥΣΗ

ι) Δίνονται $\vec{w} = (1-\lambda)\vec{u} + \lambda\vec{v}$ και $\vec{w} \perp (\vec{u} - \vec{v})$. Άρα,

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$$

$$((1-\lambda)\vec{u} + \lambda\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$$

$$(1-\lambda)\vec{u}^2 - (1-\lambda)\vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} - \lambda\vec{v}^2 = 0$$

$$\vec{u}^2 - \lambda\vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} - \lambda\vec{v}^2 = 0$$

$$\vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2)$$

$$\vec{u}(\vec{u} - \vec{v}) = \lambda(\vec{u} - \vec{v})^2$$

$$\lambda = \frac{\vec{u}(\vec{u} - \vec{v})}{(\vec{u} - \vec{v})^2}.$$

$$\vec{u} \neq \vec{v}$$

ιι) Αν τώρα, $\vec{w} \perp (\vec{u} - \vec{v})$ και $\vec{u} \perp \vec{v}$, θέλουμε $\frac{1}{|\vec{w}|^2} = \frac{1}{|\vec{u}|^2} + \frac{1}{|\vec{v}|^2}$.

Από το ι) έχουμε

$$\lambda = \frac{\vec{u}(\vec{u} - \vec{v})}{(\vec{u} - \vec{v})^2} = \frac{\vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}} = \frac{\vec{u}^2 - 0}{\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 0} = \frac{\vec{u}^2}{\vec{u}^2 + \vec{v}^2} \text{ και}$$

$$1 - \lambda = 1 - \frac{\vec{u}^2}{\vec{u}^2 + \vec{v}^2} = \frac{\vec{v}^2}{\vec{u}^2 + \vec{v}^2}$$

Άρα για το $\vec{w}$ έχουμε

$$\vec{w}^2 = [(1-\lambda)\vec{u} + \lambda\vec{v}]^2 = (1-\lambda)^2\vec{u}^2 + 2(1-\lambda)\lambda\vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda^2\vec{v}^2 =$$

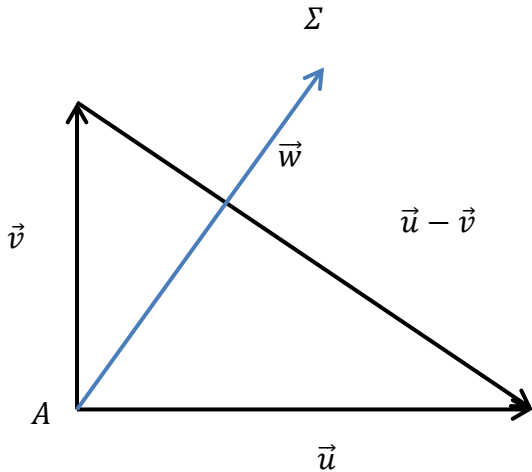
$$(1-\lambda)^2\vec{u}^2 + \lambda^2\vec{v}^2 = \left(\frac{\vec{v}^2}{\vec{u}^2 + \vec{v}^2}\right)^2 \vec{u}^2 + \left(\frac{\vec{u}^2}{\vec{u}^2 + \vec{v}^2}\right)^2 \vec{v}^2 =$$

$$\frac{|\vec{v}|^4 |\vec{u}|^2}{(\vec{u}^2 + \vec{v}^2)^2} + \frac{|\vec{u}|^4 |\vec{v}|^2}{(\vec{u}^2 + \vec{v}^2)^2} = \frac{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 (\vec{v}^2 + \vec{u}^2)}{(\vec{u}^2 + \vec{v}^2)^2} = \frac{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2}{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2}$$

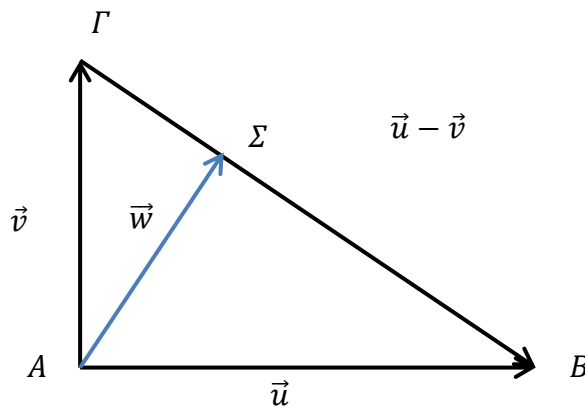
Αριθμοί όλα

δηλαδή καταλήξαμε: $|\vec{w}|^2 = \frac{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2}{|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2}$. Έτσι, $\frac{1}{|\vec{w}|^2} = \frac{|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2}{|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2}$ που δίνει $\frac{1}{|\vec{w}|^2} = \frac{1}{|\vec{u}|^2} + \frac{1}{|\vec{v}|^2}$.

iii) Με τις υποθέσεις του ii) το σχήμα φαίνεται να είναι έτσι:



Δεν είναι όμως. Θα δείξουμε ότι είναι όπως παρακάτω:



Μ' άλλα λόγια, το πέρας του $\vec{w}$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ορίζουν τα πέρατα των $\vec{u}, \vec{v}$. Δηλαδή ο γραμμικός συνδυασμός $\vec{w} = (1 - \lambda) \vec{u} + \lambda \vec{v}$ των $\vec{u}, \vec{v}$ έχει το πέρας του πάνω στην ευθεία που ορίζουν τα πέρατα των $\vec{u}, \vec{v}$ ακριβώς επειδή οι συντελεστές $1 - \lambda$ και λ έχουν άθροισμα 1.

Απόδειξη:

Πρέπει $\vec{\Gamma\Sigma} \parallel \vec{\Sigma B}$.

Έχουμε: $\vec{\Gamma\Sigma} = \vec{w} - \vec{v} = (1 - \lambda) \vec{u} + \lambda \vec{v} - \vec{v} = (1 - \lambda)(\vec{u} - \vec{v})$

και $\vec{\Sigma B} = \vec{u} - \vec{w} = \vec{u} - ((1 - \lambda) \vec{u} + \lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} - \vec{v})$

Άρα $\overrightarrow{\Gamma\Sigma} \parallel \overrightarrow{\Sigma B}$.

Τώρα παρατηρούμε ότι το συμπέρασμα στο ερώτημα ι) γράφεται

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{w}|^2} &= \frac{1}{|\vec{u}|^2} + \frac{1}{|\vec{v}|^2} \\ \frac{1}{|\overrightarrow{AS}|^2} &= \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|^2} + \frac{1}{|\overrightarrow{AF}|^2} \\ \frac{1}{v^2} &= \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\beta^2} .\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Ένας γραμμικός συνδυασμός $\vec{w} = (1 - \lambda) \vec{u} + \lambda \vec{v}$ των $\vec{u}, \vec{v}$ έχει το πέρας του πάνω στην ευθεία που ορίζουν τα πέρατα των $\vec{u}, \vec{v}$ πάντα, χωρίς απαραίτητα $\vec{w} \perp (\vec{u} - \vec{v})$. Δηλαδή ο τύπος

$$\vec{w} = (1 - \lambda) \vec{u} + \lambda \vec{v}$$

όταν το λ «τρέχει» μέσα στο $[0,1]$, παριστάνει όλο το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$.

