

Συμπληρωματικές Ασκήσεις στα Διανύσματα

1. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία διανύσματα και έστω ότι τα σημεία A, B, Γ έχουν διανύσματα θέσεως ως προς την αρχή των αξόνων O τα $\vec{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\gamma}$, $\vec{OB} = 3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{O\Gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ότι το Γ είναι το μέσο του AB .

2. Έστω $AB\Gamma$ τρίγωνο και P, M δύο σημεία τέτοια ώστε $\vec{AP} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{A\Gamma}$ και $\vec{AM} = \beta\vec{AB} + \alpha\vec{A\Gamma}$, $\alpha, \beta \in R$. Να δείξετε ότι:

ι) Για κάθε $\alpha, \beta \in R$ τα διανύσματα $\vec{PM}$ και $\vec{B\Gamma}$ είναι συγγραμμικά.

ιι) Αν E είναι το μέσο του PM και Δ το μέσο του $B\Gamma$ τότε τα σημεία A, Δ, E είναι συνευθειακά.

3. Δίνονται τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και τα διανύσματα $\vec{u} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{w} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

I) Αποδείξτε ότι τα $\vec{u}, \vec{w}$ δεν είναι συγγραμμικά.

II) Να γράψετε το $\vec{v}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}$ και $\vec{w}$.

4. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα και $\lambda, \mu, x, y \in R$.

I) Αν $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = x\vec{\alpha} + y\vec{\beta}$, δείξτε ότι $\lambda = x$, $\mu = y$.

II) Αν $\vec{u} = (1 + 2x)\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{w} = \left(8 + \frac{x^2}{2}\right)\vec{\alpha} + (4 + x)\vec{\beta}$ και $\vec{u}$ παράλληλο του $\vec{w}$, να βρείτε τον αριθμό x .

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (-2, 1)$. Τα διανύσματα θέσεως των σημείων A, B, Γ ως προς την αρχή των αξόνων O είναι αντίστοιχα:

$$\vec{u} = (\mu + 1)\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \quad \vec{v} = 2\mu\vec{\alpha} + (3\mu - 1)\vec{\beta}, \quad \vec{w} = -\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}.$$

I) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$.

II) Αν τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά να βρείτε τον αριθμό μ .

6. Να βρείτε σημείο M του άξονα $x'x$ ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του M από τα σημεία $A(2,1)$ και $B(4,3)$ να είναι ελάχιστο.
7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (3, -1)$ και $\vec{v} = (0,1)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$ ώστε $\vec{\alpha} = \vec{u} + |\alpha|\vec{v}$.
8. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 1)$ και $\vec{\beta} = (-y^2 + 4y - 5, x + 2)$ είναι συγγραμμικά να βρείτε τους αριθμούς $x, y \in R$.
9. I) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ όχι μηδενικά αλλά συγγραμμικά διανύσματα με $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}\vec{\gamma}$, δείξτε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$.
II) Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ όχι μηδενικά και όχι συγγραμμικά διανύσματα με $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}\vec{\gamma}$ και με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\gamma}|$ δείξτε ότι το $\vec{\beta}$ είναι παράλληλο με τη διχοτόμο της γωνίας που σχηματίζουν τα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$.
10. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ να δείξετε ότι $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$. Αποδείξτε την άσκηση με δύο τρόπους, ένα γεωμετρικό και ένα αναλυτικό.