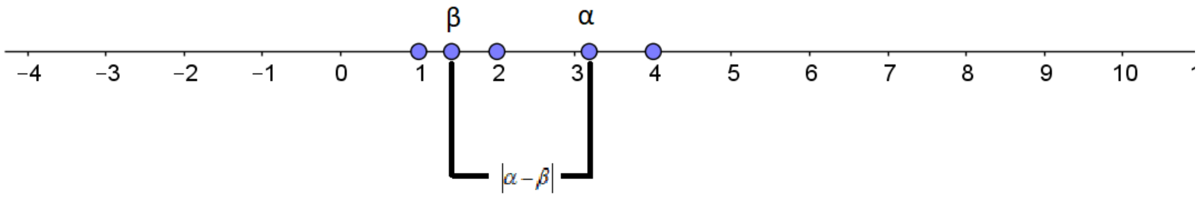
ΛΥΣΗ

α) Η απόσταση $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$ των αριθμών α και β πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



i. Από τον άξονα και αφού ο β δεν μπορεί να πάρει τιμή μικρότερη (πιο αριστερά) του 1 και ο α δεν μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη (πιο δεξιά) του 4, συμπεραίνουμε ότι η μεγαλύτερη τιμή της $d(\alpha,\beta)$ είναι 3 (μάλιστα $d(\alpha,\beta)=3$ όταν $\beta=1$ και $\alpha=4$), δηλαδή $d(\alpha,\beta)\le 3$.

ii. Είναι $1\le\beta\le 2 \Leftrightarrow -1\ge-\beta\ge-2 \Leftrightarrow -2\le-\beta\le-1$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των $2\le\alpha\le 4$, $-2\le-\beta\le-1$ έχουμε ότι $2-2\le\alpha-\beta\le 4-1 \Leftrightarrow 0\le\alpha-\beta\le 3$.

Αφού $0\le\alpha-\beta$ είναι $|\alpha-\beta|=\alpha-\beta\le 3$ οπότε $d(\alpha,\beta)\le 3$.

β)

i. Δεδομένου ότι $1\le\beta\le 2$ και $2\le\alpha\le 4$ έχουμε ότι οι αριθμοί α,β είναι θετικοί και αφού $\beta\le 2\le\alpha$ είναι και $\beta\le\alpha$.

Έτσι αφού $\beta\le\alpha$ και $\beta>0$ έχουμε ότι $\frac{\beta}{\beta}\le\frac{\alpha}{\beta}$ δηλαδή $1\le\frac{\alpha}{\beta}$.

Επίσης αφού $\beta\le\alpha$ και $\alpha>0$ έχουμε ότι $\frac{\beta}{\alpha}\le\frac{\alpha}{\alpha}$ δηλαδή $\frac{\beta}{\alpha}\le 1$.

Τελικά $\frac{\beta}{\alpha}\le 1\le\frac{\alpha}{\beta}$.

ii. Αφού δείξαμε ότι $\frac{\beta}{\alpha}\le 1\le\frac{\alpha}{\beta}$ έχουμε ότι $1-\frac{\beta}{\alpha}\ge 0$ οπότε $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right|=1-\frac{\beta}{\alpha}$ και

$\frac{\alpha}{\beta}-1\ge 0$ οπότε $\left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|=\frac{\alpha}{\beta}-1$.

Συνεπώς

$$\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right| \Leftrightarrow$$

$$1-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}-1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta-\alpha\beta\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\alpha\beta\cdot\frac{\alpha}{\beta}-\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2-\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$0=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$0=(\alpha-\beta)^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha=\beta.$$

Όμως $1\le\beta\le 2\le\alpha\le 4$, οπότε για να είναι $\alpha=\beta$ θα πρέπει $\alpha=\beta=2$.