

Ακολουθίες

3.1 Αριθμητική Πρόοδος

Ας θεωρήσουμε την ακολουθία (α_n) με όρους:

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 6, \alpha_4 = 8, \alpha_5 = 10, \dots$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 2$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + 2$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 + 2$$

Και γενικά:
$$\alpha_{v+1} = \alpha_v + 2 \quad \text{ή} \quad \alpha_{v+1} - \alpha_v = 2$$

❖ Η παραπάνω ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος με διαφορά 2**.

Ορισμός

Μία ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος (α.π.)** , αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο του (*) με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

› δηλαδή η ακολουθία (α_n) είναι **α.π. με διαφορά ω** αν και μόνο αν

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \omega \quad \text{ή} \quad \alpha_{n+1} - \alpha_n = \omega$$



(*) εκτός από τον πρώτο όρο

Γενικός (ή ν-οστός) όρος α.π.

› Έχουμε:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 + \omega \\ \alpha_3 = \alpha_2 + \omega \\ \alpha_4 = \alpha_3 + \omega \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{v-1} = \alpha_{v-2} + \omega \\ \alpha_v = \alpha_{v-1} + \omega \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 + \omega \\ \alpha_3 = \alpha_2 + \omega \\ \alpha_4 = \alpha_3 + \omega \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{v-1} = \alpha_{v-2} + \omega \\ \alpha_v = \alpha_{v-1} + \omega \end{array}} \right\} v - 1 \text{ ισότητες}$$

Προσθέτουμε τις ανισότητες κατά μέλη και προκύπτει ότι:

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1) \cdot \omega$$

Επομένως:

π

Ο n -οστός όρος μιας α.π. με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι: $\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1) \cdot \omega$

Πχ Ας θεωρήσουμε την α.π.

2 , 5 , 8 , 11 , ...

Έχουμε:

$$\alpha_1 = 2$$

$$\omega = 5 - 2 = 3$$

- Ο n -οστός όρος είναι

$$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1) \cdot \omega \Leftrightarrow \alpha_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 \Leftrightarrow \alpha_n = 2 + 3n - 3 \Leftrightarrow \alpha_n = 3n - 1$$

- Ο 10-οστός όρος είναι

$$\alpha_{10} = 2 + (10 - 1) \cdot 3 = \dots = 29$$

Αριθμητικός μέσος

π

Θεωρούμε τρεις διαδοχικούς όρους α , β , γ μιας α.π με διαφορά ω .

Έχουμε:

$$\begin{cases} \beta - \alpha = \omega \\ \gamma - \beta = \omega \end{cases} \Rightarrow \beta - \alpha = \gamma - \beta \Rightarrow \beta + \beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \frac{2\beta}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Εύκολα αποδεικνύεται και το αντίστροφο

Ο αριθμός β λέγεται
αριθμητικός μέσος
των α , γ .



Συμπέρασμα:

❖ Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων α.π.

Θεωρώ

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

το άθροισμα των πρώτων ν διαδοχικών όρων μιας α.π.

Αποδεικνύεται ότι:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{ή} \quad S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1) \cdot \omega]$$

Ιδιότητες α.π



➤ αν $\omega > 0$ τότε: $\alpha_{v+1} - \alpha_v > 0 \Leftrightarrow \alpha_{v+1} > \alpha_v$ (οι όροι αυξάνονται)

➤ αν $\omega < 0$ τότε: $\alpha_{v+1} - \alpha_v < 0 \Leftrightarrow \alpha_{v+1} < \alpha_v$ (οι όροι μειώνονται)

➤ αν $\omega = 0$ τότε: $\alpha_{v+1} - \alpha_v = 0 \Leftrightarrow \alpha_{v+1} = \alpha_v$ (σταθερή α.π.)

Ας θεωρήσουμε την α.π. με όρους:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{\lambda-2}, \alpha_{\lambda-1}, \alpha_{\lambda},$$

› Αποδεικνύεται ότι : $\alpha_1 + \alpha_{\lambda} = \alpha_2 + \alpha_{\lambda-1} = \alpha_3 + \alpha_{\lambda-2}, \dots$

Δηλαδή:

❖ Σε κάθε α.π. οι όροι που ισαπέχουν από τα άκρα έχουν το ίδιο άθροισμα.

