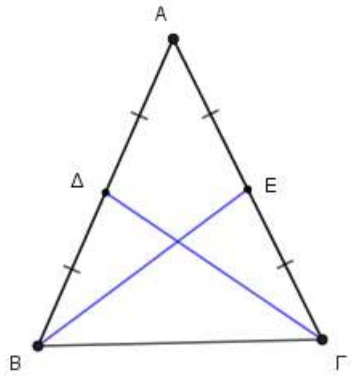
α) Έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και ΒΕ, ΓΔ οι διάμεσοι $μ_β$, $μ_γ$ αντίστοιχα. Θα εξετάσουμε αν είναι $μ_β$ = $μ_γ$.



Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:

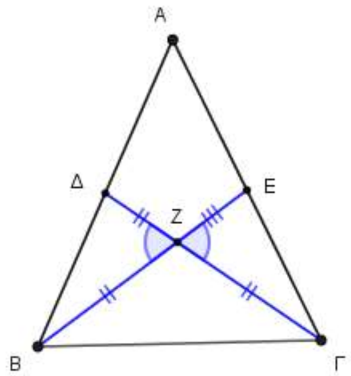
- ΒΔ = ΕΓ, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους ίσα, άρα και ΒΕ = ΔΓ, δηλαδή $μ_β$ = $μ_γ$.

β) Η αντίστροφη πρόταση της Π διατυπώνεται ως εξής:

«Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοι του $μ_β$, $μ_γ$ είναι ίσες, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β = γ».

Έστω ότι στο τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοί του $μ_β$, $μ_γ$, δηλαδή οι ΒΕ , ΓΔ αντίστοιχα, είναι ίσες. Θα εξετάσουμε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β = γ, δηλαδή ΑΒ = ΑΓ.



Έστω Ζ το σημείο τομής των διαμέσων ΒΕ και ΓΔ. Άρα το Ζ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ και συνεπώς θα ισχύουν:

ΔΖ = $\frac{1}{3}$ΓΔ (1) και ΖΕ = $\frac{1}{3}$ ΒΕ (2) αλλά και ΓΖ = $\frac{2}{3}$ΓΔ (3) και ΒΖ=$\frac{2}{3}$ ΒΕ (4).

Αφού είναι ΓΔ = ΒΕ (από την υπόθεση), από τις (1) και (2) θα είναι ΔΖ = ΖΕ (5) και από τις σχέσεις (3) και (4) θα είναι ΓΖ=ΒΖ (6).

Τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΖΓ έχουν:

- ΔΖ = ΖΕ , λόγω της σχέσης (5)
- ΒΖ = ΓΖ , λόγω της σχέσης (6)
- $\Delta\hat{Z}B = E\hat{Z}\Gamma$, ως γωνίες κατακορυφήν

Επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΕΖΓ θα είναι ίσα οπότε θα έχουν και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους ίσα. Άρα θα είναι ΔΒ = ΕΓ οπότε και 2ΔΒ = 2ΕΓ δηλαδή ΑΒ = ΑΓ.

Επομένως, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Συνεπώς, η πρόταση «Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοι του μ_β, μ_γ είναι ίσες, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β = γ» είναι αληθής.

γ) Εφόσον, από τα ερωτήματα α) και β) η πρόταση Π και η αντίστροφή της είναι αληθής μπορούμε να τις διατυπώσουμε ως την ενιαία πρόταση: «Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με β = γ αν και μόνο αν οι διάμεσοί του μ_β, μ_γ είναι ίσες».