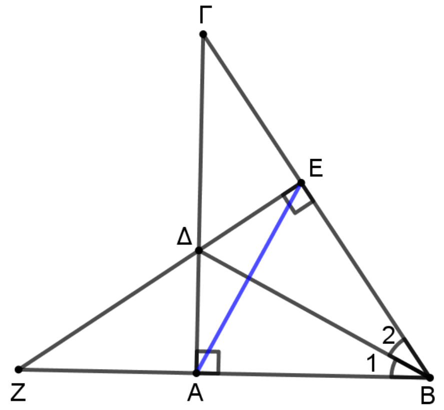
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$, ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ και ΔΕ το κάθετο τμήμα στη ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΒΑ στο Ζ.

α)



Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΔ έχουν:

- $\widehat{A} = \widehat{E} = 90°$ (Υπόθεση και ΔΕ⊥ΒΓ)
- ΒΔ κοινή πλευρά
- $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της $\widehat{B}$.

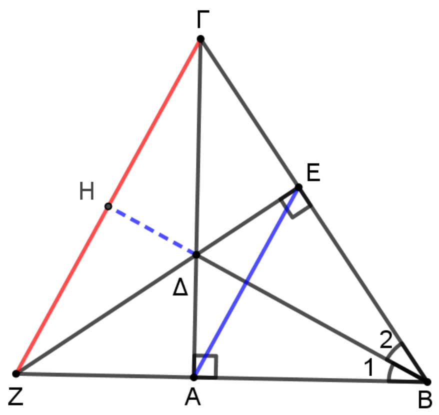
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση. Οπότε θα είναι ίσες και οι κάθετες πλευρές ΑΒ και ΒΕ στις οποίες είναι προσκείμενες οι ίσες γωνίες $\widehat{B}_1$ και $\widehat{B}_2$ αντίστοιχα. Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ έχουν:

- $\widehat{A} = \widehat{E} = 90°$
- ΑΒ=ΒΕ (ΑΒΕ ισοσκελές – α) ερώτημα)
- $\widehat{B}$ κοινή γωνία

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίση μία κάθετη πλευρά τους και την προσκείμενη οξεία γωνία ίση.

γ)



Ισχύει ότι:

- ΒΑ = ΒΕ (ΑΒΕ ισοσκελές) (1)
- ΔΑ = ΔΕ (τριγ ΑΔΒ = τριγ ΒΔΕ από α) ερώτημα)

Άρα τα σημεία Β και Δ ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος ΑΕ, οπότε η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΕ. Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΕΖ είναι ίσα, από το β) ερώτημα, θα έχουν ίσες υποτείνουσες, δηλαδή ΒΓ = ΒΖ (2). Άρα το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές. Η διχοτόμος ΒΔ της γωνίας $\widehat{\mathrm{B}}$ στο τρίγωνο ΒΖΓ τέμνει την πλευρά ΓΖ στο σημείο Η και επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση την ΓΖ, το τμήμα ΒΗ είναι ύψος και διάμεσός της πλευράς ΓΖ. Δηλαδή η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΓΖ.

δ) Επειδή ΑΕ $\perp$ ΒΔ και ΖΓ $\perp$ ΒΔ, είναι ΑΕ // ΖΓ. Επίσης οι ΖΑ και ΓΕ δεν είναι παράλληλες αφού τέμνονται στο Β. Άρα το ΑΕΓΖ είναι τραπέζιο. Ισχύει ότι: ΕΓ = ΒΓ – ΒΕ = ΒΖ – ΑΒ = ΑΖ (από τις ισότητες (1) και (2)). Συνεπώς το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.