

Δείγμα Θεμάτων – στην Άλγεβρα Α' Λυκείου

Ύλη: Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους, Διάταξη, Τετραγωνική Ρίζα, Εξισώσεις

Επιμέλεια: Χρονόπουλος Τάκης

1. α) Να αποδείξετε ότι $(2x-1)^3 - (x-2)^2 = 8x^3 - 13x^2 + 10x - 5$.
β) Να αποδείξετε ότι $(2x-1)(3x^2 - 4x + 2) = 6x^3 - 11x^2 + 8x - 2$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $6x^3 - 11x^2 + 8x - 2 = 0$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $(2x-1)^3 - (x-2)^2 - 2x^3 + 3 = (2x-1)(3x^2 - 4x + 2)$.
ε) Να αποδείξετε ότι $(2x-1)^3 - (x-2)^2 \leq 8x^3 + 12x^2 - 4$.
2. α) Να αποδείξετε ότι: $6x^3 - 5x^2 - 21x - 10 = (3x+2)(2x^2 - 3x - 5)$
β) Να αποδείξετε ότι:
$$(2023-5x)^3 + 3(2023-5x)^2(5x-2021) + 3(2023-5x)(5x-2021)^2 + (5x-2021)^3 = 8$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση:
$$6x^3 - 5x^2 - 21x - 2 = (2023-5x)^3 + 3(2023-5x)^2(5x-2021) + 3(2023-5x)(5x-2021)^2 + (5x-2021)^3$$
3. α) Να αποδείξετε ότι $6 - 3\sqrt{3} > 0$.
β) Έστω $M = \sqrt{6+3\sqrt{3}} - \sqrt{6-3\sqrt{3}}$. Να αποδείξετε ότι:
i) $M > 0$ ii) $M^2 = 6$ iii) $M = \sqrt{6}$ iv) $\sqrt{6+3\sqrt{3}} - \sqrt{6-3\sqrt{3}} + 5 < 2\sqrt{5} + 3$
γ) Έστω $N = \frac{\sqrt{6}\sqrt{6+3\sqrt{3}} - \sqrt{6}\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{3 - 2\sqrt{6+3\sqrt{3}} + 2\sqrt{6-3\sqrt{3}}}$.
i) Να αποδείξετε ότι $N = \frac{6}{3 - 2\sqrt{6}}$. ii) Να γίνει ρητοποίηση παρονομαστή στο κλάσμα N.
δ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{24} + \sqrt{6+3\sqrt{3}} = \sqrt{54} + \sqrt{6-3\sqrt{3}}$
4. α) Να αποδείξετε ότι $4x^2 + y^2 + 13 \geq 8x + 6y$. Πότε ισχύει το ίσον;
β) Να αποδείξετε ότι $4x^2 + y^2 + 14 \geq 8x + 6y$. Πότε ισχύει το ίσον;
γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x,y όταν $4x^2 + y^2 + 13 = 8x + 6y$.
δ) Αν $-2 < \alpha < 5$ και $-3 < \beta < 2$. Να αποδείξετε ότι
i) $1994 < 3\alpha + 2000 < 2015$ ii) $1 < 5 - 2\beta < 11$
iii) $\frac{1994}{11} < \frac{3\alpha + 2000}{5 - 2\beta} < 2015$ iv) $3\alpha + 2000 \neq 5 - 2\beta$
v) $1 < (\alpha - \beta + 5)^2 < 169$ vi) $-125 < \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 < 343$
vii) $1 < \alpha + 3 < 8$ viii) $1 < \alpha^2 + 6\alpha + 9 < 64$
ix) $-8 < \alpha^2 + 6\alpha < 55$ x) $1 < \alpha\beta + 3\beta + 4\alpha + 12 < 48$
xi) $-11 < \alpha\beta + 3\beta + 4\alpha < 36$ xii) $-15 < \alpha\beta < 10$