

εξίσωση με αντικατάσταση

Όταν μια παράσταση επαναλαμβάνεται πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν βοηθητικό άγνωστο για να λύσουμε πιο εύκολα την δοθείσα εξίσωση, μετασχηματίζοντας την. Θέτουμε, λύνουμε την νέα εξίσωση και επιστρέφουμε τις λύσεις όπου θέσαμε για να βρούμε τον αρχικό άγνωστο. Το ίδιο θα κάνουμε και σε ανισώσεις. [Βήματα: **θέτω - λύνω - ξεθέτω**]

πχ.1. Εξίσωση με πολλές φορές το ίδιο απόλυτο, που ανάγεται σε εξίσωση α' βαθμού

$$\frac{|2x-6|-3}{2} - \frac{|3x-9|+1}{3} - 5 = \frac{|3-x|-6}{6} - |21-7x| \Leftrightarrow \frac{2|x-3|-3}{2} - \frac{3|x-3|+1}{3} - 5 = \frac{|3-x|-6}{6} - 7|3-x|$$

θέτω $\omega = |x-3| = |3-x|$ και η εξίσωση γίνεται $\frac{2\omega-3}{2} - \frac{3\omega+1}{3} - 5 = \frac{\omega-6}{6} - 7\omega$, **λύνω** και βρίσκω $\omega = \frac{35}{41}$

οπότε [**ξεθέτω**] $|x-3| = \frac{35}{41} \Leftrightarrow x-3 = \pm \frac{35}{41} \Leftrightarrow x = 3 \pm \frac{35}{41} \Leftrightarrow x = \frac{158}{41}$ ή $x = \frac{88}{41}$

πχ.2. Διτετράγωνη $5x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ επειδή $x^4 = (x^2)^2$, **θέτω** $y = x^2$ οπότε $5y^2 - 3y - 2 = 0$

λύνω και βρίσκω $y = 1$ ή $y = -\frac{2}{5}$ [**ξεθέτω**] $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$ ή $x^2 = -\frac{2}{5}$ αδύνατη διότι $x^2 \geq 0$

Διτετράγωνη εξίσωση λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής $ax^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ [χωρίς x] και $a \neq 0$, η οποία με τον μετασχηματισμό $x^2 = y$, ανάγεται στην δευτεροβάθμια εξίσωση, ως προς y , $ay^2 + \beta y + \gamma = 0$.

πχ. εξισώσεις που ανάγονται κατόπιν αντικατάστασης στην δευτεροβάθμια $5y^2 - 3y - 2 = 0$.

$5(x^2 - x)^2 - 3(x^2 - x) - 2 = 0$, **θέτω** $y = x^2 - x$

$5\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{2}{x}\right) - 2 = 0$, **θέτω** $y = x + \frac{2}{x}$

* $5x^4 - 3x^2 - 2 = 0$, επειδή $x^4 = (x^2)^2$, **θέτω** $y = x^2$

* $5x^2 - 3|x| - 2 = 0$, επειδή $x^2 = |x|^2$, **θέτω** $y = |x|$

$5x^{10} - 3x^5 - 2 = 0$, επειδή $x^{10} = x^{5 \cdot 2} = (x^5)^2$, **θέτω** $y = x^5$

$5x^{60} - 3x^{30} - 2 = 0$, επειδή $x^{60} = x^{30 \cdot 2} = (x^{30})^2$, **θέτω** $y = x^{30}$

* $5x - 3\sqrt{x} - 2 = 0$, ορίζεται όταν $x \geq 0$, επειδή $x = \sqrt{x}^2$ για $x \geq 0$, **θέτω** $y = \sqrt{x}$

$5\sqrt{x^2} - 3\sqrt{x} - 2 = 0$, ορίζεται όταν $x \geq 0$, επειδή $\sqrt{x^2} = x^{\frac{2}{2}} = \sqrt{x}^2$ για $x \geq 0$, **θέτω** $y = \sqrt{x}$

$5\sqrt{x} - 3^{2\sqrt{x}} - 2 = 0$, ορίζεται όταν $x \geq 0$, επειδή $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^2 = 2\sqrt{x}^2$ για $x \geq 0$, **θέτω** $y = 2\sqrt{x}$

$5(x-4)^2 - 3\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 2 = 0$, επειδή $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{(x-4)^2} = |x-4|$, $(x-4)^2 = |x-4|^2$, **θέτω** $y = |x-4|$

γενικά στην μορφή $5f^2(x) - 3f(x) - 2 = 0$, επειδή $f^2(x) = [f(x)]^2$, **θέτω** $y = f(x)$

προσοχή: (για $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$)

$$\sqrt[\nu]{x^{2\mu}} = |x|^{\frac{2\mu}{\nu}} \text{ με } x \in \mathbb{R} \quad (\mu \geq 1)$$

$$\sqrt[\nu]{x^{2\mu+1}} = x^{\frac{2\mu+1}{\nu}} \text{ με } x \geq 0 \quad (\mu \geq 0)$$

$$\sqrt[\nu]{x}^{\mu} = x^{\frac{\mu}{\nu}} \text{ με } x \geq 0 \quad (\mu \geq 1)$$

παραμετρική εξίσωση α' βαθμού

Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο ότι κάθε εξίσωση α' βαθμού έχει:

- είτε **μοναδική λύση** (δηλ. μία και μόνο μια, όταν βρίσκουμε το x διαιρώντας με τον συντελεστή του αγνώστου, στην περίπτωση που δεν είναι μηδέν, όταν δηλαδή καταλήγουμε $x = \text{κάτι}$)
- είτε είναι **αδύνατη** (δεν έχει λύση)
- είτε $x \in R$, έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς, δηλ. άπειρες λύσεις, παλιά γράφαμε αόριστη, πλέον θα γράφουμε $x \in R$, γιατί μας νοιάζει ποιοι αριθμοί ακριβώς είναι λύση, και όχι η ποσότητα (είναι μόνο η εξίσωση $0x = 0$) [το άπειρες λύσεις δεν είναι σωστό σαν διατύπωση, ως ασαφές]

Κάθε εξίσωση α' βαθμού ως προς x, μπορεί, μετά από πράξεις, να οδηγηθεί στην μορφή $Ax = B$ με $A, B \in R$ [χωρίς x]. Αν η εξίσωση περιέχει και άλλες μεταβλητές πλην του x, αυτές ονομάζονται **παράμετροι** και τις μεταχειριζόμαστε σαν γνωστές ποσότητες, μιας και άγνωστος θεωρείται μόνο το x. Κάθε εξίσωση (αλλά κι ανίσωση) με παραμέτρους ονομάζεται **παραμετρική**. Λύνουμε την εξίσωση, **διακρίνοντας περιπτώσεις**, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων (ίσως έχω περισσότερες από μια). Η διαδικασία διάκρισης των περιπτώσεων, γενικώς, ονομάζεται **διερεύνηση**.

Δηλαδή από την μορφή $Ax = B$ με $A, B \in R$ συνεχίζουμε ως εξής:

- [1^η περίπτωση] Αν $A \neq 0$, τότε $\frac{Ax}{A} = \frac{B}{A} \Leftrightarrow x = \frac{B}{A}$, **μοναδική λύση** [εφόσον δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής]

- [2^η περίπτωση] Αν $A = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = B$, τότε [συνεχίζουμε εξετάζοντας αν μηδενίζεται το B]
 -και $B = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = 0$, οπότε έχει λύση όλο το R [άπειρες λύσεις] και **γράφουμε** $x \in R$.
 -και $B \neq 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x = B \neq 0$, οπότε είναι **αδύνατη** [δηλαδή έχει 0 λύσεις].

Πχ. Να λυθεί η εξίσωση $\lambda^2(x-3) - (4\lambda + 10x+4) = 2(\lambda - 3x-2)$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.
λύση

[με σχόλια στις αγκύλες]

$$\lambda^2(x-3) - (4\lambda + 10x+4) = 2(\lambda - 3x-2)$$

[την πάμε στην μορφή $Ax=B$ με $A, B \in R$]

[αφού κάνουμε επιμεριστικές]

$$\Leftrightarrow \lambda^2 x - 3\lambda^2 - 4\lambda - 10x - 4 = 2\lambda - 6x - 4$$

[χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους]

[ο,τι δεν έχει x θεωρείται γνωστός]

$$\Leftrightarrow \lambda^2 x - 10x + 6x = 3\lambda^2 + 4\lambda + 4 + 2\lambda - 4$$

[αναγωγή ομοίων όρων σε κάθε μέλος]

$$\Leftrightarrow \lambda^2 x - 4x = 3\lambda^2 + 6\lambda$$

[βγάζουμε το x κοινό παράγοντα στο α' μέλος]

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 4)x = 3\lambda^2 + 6\lambda$$

[όταν φθάσουμε στην μορφή $Ax=B$ με $A, B \in R$]

[παραγοντοποιούμε τα A,B κι ονομάζουμε την εξίσωση] $\Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+2)x = 3\lambda(\lambda+2)$ (1)

[διακρίνουμε περιπτώσεις για το A]

[πρώτα αν $A \neq 0$, λύνουμε το $\neq$, $AB \neq 0 \Leftrightarrow (A \neq 0 \text{ και } B \neq 0)$] Αν $(\lambda-2)(\lambda+2) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-2 \neq 0 \text{ και } \lambda+2 \neq 0) \Leftrightarrow (\lambda \neq 2 \text{ και } \lambda \neq -2)$

[διαιρούμε και τα 2 μέλη με το A, απλοποιούμε, αν είναι εφικτό]

$$\left[\frac{(\lambda-2)(\lambda+2)x}{(\lambda-2)(\lambda+2)} = \frac{3\lambda(\lambda+2)}{(\lambda-2)(\lambda+2)} \right]$$

[γράφουμε το συμπέρασμα, να υπάρχει η λέξη μοναδική] η εξίσωση (1) έχει **μοναδική** λύση, την $x = \left[\frac{B}{A} \right] = \frac{3\lambda}{\lambda-2}$

[συνεχίζουμε να δούμε τι γίνεται στις άλλες περιπτώσεις] Για $\lambda=2$, η εξίσωση (1) γίνεται $0x=24$, **αδύνατη**.

[με αντικατάσταση στην (1) των τιμών που μηδενίζουν το A] Για $\lambda=-2$, η εξίσωση (1) γίνεται $0x=0$, **άρα** $x \in R$.

[είτε θα βγει αδύνατη είτε $0x=0$ και τότε θα γράψουμε $x \in R$]

κλασματική εξίσωση

Μια εξίσωση με πηλίκια (κλάσματα) πολυωνύμων, ονομάζεται κλασματική αρκεί να εμφανίζεται τουλάχιστον ένα μη σταθερό πολυώνυμο σε παρονομαστή. Πρακτικά είναι μια εξίσωση με πολυώνυμα και x σε παρονομαστές.

Βήματα: περιορισμοί – απαλοιφή παρονομαστών – την λύνουμε – έλεγχος λύσεων με βάση περιορισμούς
Εφόσον έχουμε παρονομαστές, έχουμε και περιορισμούς, πρέπει κάθε παρονομαστής να μην μηδενίζεται, για συντομία δεν χρειάζεται να εξετάσουμε όλους τους παρονομαστές ξεχωριστά, αλλά εξετάζουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών (πρέπει $\text{ΕΚΠ} \neq 0$). Κατόπιν κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, απλοποιούμε παρονομαστές, κάνουμε επιμεριστικές με τους αριθμητές που θα μείνουν και καταλήγουμε σε μια εξίσωση που ξέρουμε πως λύνεται, είτε α βαθμού, είτε β' βαθμού, είτε γ' βαθμού ή ανωτέρου.

αφού την λύσουμε, πρέπει να ελέγξουμε τις λύσεις με βάση τους περιορισμούς:

Αν δεν βρούμε λύσεις στην τελική εξίσωση, τότε η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν βρούμε μερικές λύσεις στην τελική, ελέγχουμε κάθε μια αν είναι δεκτή ή απορρίπτεται με βάση τον περιορισμό που προήλθε από το ΕΚΠ. Ανάλογα την εξίσωση, μπορούμε να βρούμε πεπερασμένου πλήθους λύσεις. Αν όμως απορρίψουμε όσες λύσεις βρούμε (όταν είναι όλες ταυτόχρονα περιορισμοί), τότε η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν η τελική εξίσωση βγει $0x=0$, δηλαδή $x \in \mathbb{R}$, τότε η αρχική εξίσωση έχει ως λύση όλο το $\mathbb{R}$ πλην των περιορισμών.

Πχ. Να λυθεί η εξίσωση
$$\frac{3}{x^2 - 2x} + \frac{1-x}{3x^2} - \frac{3}{2x-4} = \frac{5}{6x}$$

λύση

[παραγοντοποιούμε ξεχωριστά κάθε παρονομαστή για να βρω το ΕΚΠ τους]

$$x^2 - 2x = x(x-2)$$

[την παράσταση που διαιρείται με όλους τους παρονομαστές]

$$3x^2$$

[για το ΕΚΠ των μεταβλητών διαλέγουμε κάθε όρο της μορφής $(x-a)$]

$$2x-4 = 2(x-2)$$

[όπου a αριθμό, στην μεγαλύτερη εμφανιζόμενη δύναμη]

$$6x$$

[το ΕΚΠ $(2,3,6)=6$, το ΕΚΠ των $x(x-2)$, x^2 , $(x-2)$, x πρέπει να περιέχει x^2 και $(x-2)$]

$$\text{ΕΚΠ} = 6x^2(x-2)$$

περιορισμός [πρέπει $\text{ΕΚΠ} \neq 0$, προσοχή: $AB \neq 0 \Leftrightarrow (A \neq 0 \text{ και } B \neq 0)$]

$$\text{πρέπει } \text{ΕΚΠ} \neq 0 \Leftrightarrow 6x^2(x-2) \neq 0$$

[λύνω τους περιορισμούς, βάζοντας "και" ανάμεσα]

$$\Leftrightarrow (6x^2 \neq 0 \text{ και } x-2 \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x \neq 2)$$

απαλοιφή παρονομαστών

[πολλαπλασιάζουμε τα πάντα με ΕΚΠ έχοντας παρονομαστές παραγοντοποιημένους κι απλοποιούμε κάθε κλάσμα]

$$6x^2 \cancel{(x-2)} \frac{3}{\cancel{x} \cancel{(x-2)}} + \cancel{6} \cancel{x^2} (x-2) \frac{1-x}{\cancel{3} \cancel{x^2}} - \cancel{6} \cancel{x^2} \cancel{(x-2)} \frac{3}{\cancel{2} \cancel{(x-2)}} = \cancel{6} \cancel{x^2} (x-2) \frac{5}{\cancel{6} \cancel{x}}$$

[τα ξαναγράφουμε βάζοντας παρενθέσεις στις θέσεις των αριθμητών και κάνουμε επιμεριστικές, μετά πράξεις]

$$6x(3) + 2(x-2)(1-x) - 3x^2(3) = x(x-2)(5)$$

$$18x + 2(x - x^2 - 2 + 2x) - 9x^2 = 5x(x-2) \Leftrightarrow 18x + 2x - 2x^2 - 4 + 4x - 9x^2 = 5x^2 - 10x$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 - 9x^2 - 5x^2 + 18x + 2x + 4x + 10x - 4 = 0 \Leftrightarrow -16x^2 + 34x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(-8x^2 + 17x - 2) = 0 \Leftrightarrow -8x^2 + 17x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = 2$$

έλεγχος λύσεων: Η λύση $x_1 = \frac{1}{8}$ είναι δεκτή. Η λύση $x_2 = 2$ απορρίπτεται, γιατί είναι περιορισμός. Τελικά $x = \frac{1}{8}$

πολυωνυμικές εξισώσεις (δίχως κλάσματα)

Α' Βαθμού

- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
- Αναγωγή ομοίων όρων
- Διαιρούμε με συντελεστή αγνώστου, αν δεν είναι 0
- Αλλιώς είναι ή αδύνατη ή αν βγει $0x = 0$ γράφουμε $x \in R$

Β' Βαθμού

- Όλα στο α' μέλος
- Αναγωγή ομοίων όρων
- Τριώνυμο

Γ' ή Ανωτέρου Βαθμού

- Όλα στο α' μέλος
- Αναγωγή ομοίων όρων
- Παραγοντοποίηση (κοινός παράγοντας, ομαδοποίηση)
προσοχή
 $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ή } B = 0$
 $A \cdot B \neq 0 \Rightarrow A \neq 0 \text{ και } B \neq 0$

στοιχειώδεις εξισώσεις

[παράδειγμα με αριθμό α: αρνητικό - μηδέν - θετικό (αντίστοιχα)]

εξίσωση $|x| = \alpha$

$ x = -3$	$ x = 0$	$ x = 8$
αδύνατη	$\Leftrightarrow x = 0$	$\Leftrightarrow x = \pm 8$
γιατί $ x \geq 0$		

εξίσωση $x^2 = \alpha$

$x^2 = -3$	$x^2 = 0$	$x^2 = 25$
αδύνατη	$\Leftrightarrow x = 0$	$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25}$
γιατί $x^2 \geq 0$		$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5^2}$ $\Leftrightarrow x = \pm 5$

εξίσωση $x^{2\nu} = \alpha$

$x^4 = -3$	$x^4 = 0$	$x^4 = 81$
αδύνατη	$\Leftrightarrow x = 0$	$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{81}$
γιατί $x^4 \geq 0$		$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{3^4}$ $\Leftrightarrow x = \pm 3$

εξίσωση $x^{2\nu+1} = \alpha$

$x^3 = -8$	$x^3 = 0$	$x^3 = 27$
$\Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8}$	$\Leftrightarrow x = 0$	$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27}$
$\Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2^3}$		$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3^3}$
$\Leftrightarrow x = -2$		$\Leftrightarrow x = 3$

εξίσωση $\sqrt{x} = \alpha$

$\sqrt{x} = -3$	$\sqrt{x} = 0$	$\sqrt{x} = 5$
αδύνατη	$\Leftrightarrow x = 0$	$\Leftrightarrow \sqrt{x}^2 = 5^2$
γιατί $\sqrt{x} \geq 0$		$\Leftrightarrow x = 25$

εξίσωση $\sqrt[\nu]{x} = \alpha$

$\sqrt[4]{x} = -3$	$\sqrt[4]{x} = 0$	$\sqrt[4]{x} = 5$
αδύνατη	$\Leftrightarrow x = 0$	$\Leftrightarrow \sqrt[4]{x}^4 = 5^4$
γιατί $\sqrt[4]{x} \geq 0$		$\Leftrightarrow x = 625$

ανίσωση με αντικατάσταση/ διτετράγωνη ανίσωση

Όταν μια παράσταση επαναλαμβάνεται πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν βοηθητικό άγνωστο για να λύσουμε πιο εύκολα την δοθείσα ανίσωση, μετασχηματίζοντας την. Θέτουμε, λύνουμε την νέα ανίσωση βρίσκοντας το κατάλληλο διάστημα λύσεων (ή ένωση διαστημάτων). Μετά ξεθέτουμε, μετατρέποντας το διάστημα λύσεων σε ανίσωση, και λύνουμε την ανίσωση για να βρούμε τον αρχικό άγνωστο. [Βήματα: **θέτω - λύνω** – (μετατρέπω διάστημα σε ανίσωση) - **ξεθέτω**]

πχ.1. Διτετράγωνη Ανίσωση $5x^4 - 3x^2 - 2 < 0$ επειδή $x^4 = (x^2)^2$,

θέτω $y = x^2$ οπότε $5y^2 - 3y - 2 < 0$

y	$-\infty$	$-2/5$	1	$+\infty$
$5y^2 - 3y - 2$		+	-	+

λύνω ανίσωση, αρχικά λύνω την εξίσωση και βρίσκω $y = 1$ ή $y = -\frac{2}{5}$

κατόπιν κάνω πινακάκι γιατί είναι ανίσωση και απαντάω για ποιες τιμές του x το τριώνυμο έχει πρόσημο μείον στο πινακάκι

άρα $y \in \left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \cup (1, +\infty)$, μετατρέπω το διάστημα των λύσεων σε ανίσωση

(ή την ένωση διαστημάτων σε 2 ανισώσεις όπως εδώ) $y < -\frac{2}{5}$ ή $y > 1$

[**ξεθέτω**]

$$y < -\frac{2}{5} \Leftrightarrow x^2 < -\frac{2}{5} \text{ αδύνατη γιατί } x^2 \geq 0$$

$$\text{ή } y > 1 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{1} \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

πχ.2. Διτετράγωνη Ανίσωση $5x^4 - 3x^2 - 2 \geq 0$, [ίδια διτετράγωνη με πριν, άλλη ανίσωση όμως]

θέτω $y = x^2$ οπότε $5y^2 - 3y - 2 \geq 0$

[**λύνω ανίσωση**] άρα $y \in \left[-\frac{2}{5}, 1\right]$ [μετατρέπω το διάστημα των λύσεων σε ανίσωση] $-\frac{2}{5} \leq y \leq 1$

[**ξεθέτω**] $-\frac{2}{5} \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{5} \leq x^2, \text{ που ισχύει διότι } x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in R \\ x^2 \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{1} \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

πχ. 3 Διτετράγωνη Ανίσωση $-x^4 + 5x^2 - 6 \geq 0$ επειδή $x^4 = (x^2)^2$

θέτω $y = x^2$ οπότε $-y^2 + 5y - 6 \geq 0$

[**λύνω ανίσωση**] άρα $y \in [2, 3]$

[μετατρέπω το διάστημα των λύσεων σε ανίσωση] $2 \leq y \leq 3$

y	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$-y^2 + 5y - 6$		-	+	-

[**ξεθέτω**] $2 \leq x^2 \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{2} \text{ ή } x \geq \sqrt{2} \\ x^2 \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$$

[στο τέλος κάναμε συναλήθευση, δηλαδή Κωστάκης - Μαιρούλα στον άξονα, αφού τα διατάξαμε στην σωστή σειρά]

παραμετρική εξίσωση β' βαθμού [διακρίνουσα στην διακρίνουσα]

Κάθε εξίσωση β' βαθμού ως προς x , μπορεί, μετά από πράξεις, να οδηγηθεί στην μορφή $Ax^2 + Bx + \Gamma = 0$ με $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$ [χωρίς x]. Αν η εξίσωση περιέχει και άλλες μεταβλητές πλην του x , αυτές ονομάζονται **παραμέτροι** και τις μεταχειριζόμαστε σαν γνωστές ποσότητες, μιας και άγνωστος θεωρείται μόνο το x . Κάθε εξίσωση (αλλά κι ανίσωση) με παραμέτρους ονομάζεται **παραμετρική**. Λύνουμε την εξίσωση, **διακρίνοντας περιπτώσεις**, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων (ίσως έχω περισσότερες από μια). Η διαδικασία διάκρισης των περιπτώσεων, γενικώς, ονομάζεται **διερεύνηση**.

Δηλαδή από την μορφή $Ax^2 + Bx + \Gamma = 0$ με $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$ συνεχίζουμε ως εξής:

- [1^η περίπτωση] Αν $A \neq 0$, τότε η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού ως προς x , οπότε ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας $\Delta = B^2 - 4A\Gamma$, έχουμε

- όταν $\Delta > 0$, **δυο άνισες πραγματικές ρίζες**, τις $x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$

- όταν $\Delta = 0$, **μία διπλή πραγματική ρίζα**, την $x = \frac{-B}{2A}$

- όταν $\Delta < 0$, **μηδέν πραγματικές ρίζες** (η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$)

- [2^η περίπτωση] Αν $A = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x^2 + Bx + \Gamma = 0 \Leftrightarrow Bx + \Gamma = 0$, τότε [συνεχίζουμε εξετάζοντας αν μηδενίζεται το B]

-και αν $B = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x + \Gamma = 0$,

οπότε αν $\Gamma = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x + 0 = 0$, έχει λύση όλο το $\mathbb{R}$ [άπειρες λύσεις]

και **γράφουμε** $x \in \mathbb{R}$.

ενώ αν $\Gamma \neq 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x + \Gamma \neq 0$, οπότε είναι **αδύνατη** [δηλ. έχει 0 λύσεις].

-και αν $B \neq 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $Bx + \Gamma = 0 \Leftrightarrow Bx = -\Gamma \Leftrightarrow \frac{Bx}{B} = \frac{-\Gamma}{B} \Leftrightarrow x = -\frac{\Gamma}{B}$, οπότε είναι **αδύνατη**

[δηλ. έχει 0 λύσεις].

[Η παραπάνω διερεύνηση δείχνει μακροσκελής, αλλά στην πράξη είναι πιο μικρή και προσιτή, γιατί αρχικά ελέγχουμε για πότε $A \neq 0$, και μελετάμε το πρόσημο της διακρίνουσας Δ με τον περιορισμούς που βρήκαμε από το $A \neq 0$ και κατόπιν κάνουμε αντικατάσταση κάθε μια τιμή του λ που μηδενίζει το A , και βλέπου τι κάνει η εξίσωση αν δηλαδή έχει μοναδική λύση, είναι αδύνατη ή έχει λύση όλο το $\mathbb{R}$.]

Πχ.1. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $(\lambda^2 + \lambda)x - (\lambda + 1)x - 2 = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

λύση

[με σχόλια στις αγκύλες]

$$(\lambda^2 + \lambda)x - (\lambda + 1)x - 2 = 0$$

[εφόσον έχουμε φθάσει στην μορφή

$$Ax^2 + Bx + \Gamma = 0 \text{ με } A, B, \Gamma \in \mathbb{R} \text{ (χωρίς } \lambda)]$$

Είναι της μορφής $Ax^2 + Bx + \Gamma = 0$ με $A = \lambda^2 + \lambda$, $B = -(\lambda + 1)$ και $\Gamma = -2$.

[παραγοντοποιούμε τα A, B κι ονομάζουμε την εξίσωση]

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 1)x - (\lambda + 1)x - 2 = 0 \quad (1)$$

[διακρίνουμε περιπτώσεις για το A]

[πρώτα αν $A \neq 0$, λύνουμε το $\neq$, $AB \neq 0 \Leftrightarrow (A \neq 0 \text{ και } B \neq 0)$]

$$\text{Αν } \lambda(\lambda + 1) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 0 \text{ και } \lambda + 1 \neq 0) \Leftrightarrow (\lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq -1)$$

[υπολογίζουμε την διακρίνουσα συναρτήσει του λ

και διακρίνουμε περιπτώσεις για το πρόσημό της]

Η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = B^2 - 4A\Gamma = (\lambda + 1)^2 - 4(\lambda^2 + \lambda)(-2) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 8(\lambda^2 + \lambda)$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 8\lambda^2 + 8\lambda = 9\lambda^2 + 10\lambda + 1$$

$$9\lambda^2 + 10\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = -\frac{1}{9}$$

[Αν $A \neq 0$ και $\Delta > 0$ έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες]

Για $A \neq 0$ και $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{9}, +\infty\right) - \{0\} = (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{9}, 0\right) \cup (0, +\infty)$,
η εξίσωση έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες

[αφαιρέσαμε από το διάστημα λύσεων που βρίσκουμε με βάση το πινακάκι, το διάστημα λύσεων]

[αν τις ζητάγε θα έπρεπε να τις βρούμε, οι ρίζες αυτές είναι

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{(\lambda+1) \pm \sqrt{9\lambda^2 + 10\lambda + 1}}{2(\lambda^2 + \lambda)} = \frac{(\lambda+1) \pm \sqrt{9\lambda^2 + 10\lambda + 1}}{2\lambda(\lambda+1)}$$

$$= \frac{\cancel{(\lambda+1)}}{2\lambda \cancel{(\lambda+1)}} \pm \frac{\sqrt{(9\lambda+1)(\lambda+1)}}{2\lambda(\lambda+1)} = \frac{1}{2\lambda} \pm \frac{\sqrt{(9\lambda+1)(\lambda+1)}}{2\lambda\sqrt{(\lambda+1)^2}} = \frac{1}{2\lambda} \pm \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{9\lambda+1}{\lambda+1}} = \frac{1}{2\lambda} \left(1 \pm \sqrt{\frac{9\lambda+1}{\lambda+1}} \right)$$

[Αν $A \neq 0$ και $\Delta = 0$ έχει μια διπλή πραγματική ρίζα]

Για $A \neq 0$ και $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{9}$,

η εξίσωση έχει 1 διπλή πραγματική ρίζα

[αν την ζητάγε, θα έπρεπε να την βρούμε, η ρίζα αυτή είναι $x = \frac{-B}{2A} = \frac{\cancel{\lambda+1}}{2\lambda \cancel{(\lambda+1)}} = \frac{1}{2\lambda} \stackrel{\lambda = -\frac{1}{9}}{=} = -\frac{9}{2}$]

[Αν $A \neq 0$ και $\Delta < 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες] Για $A \neq 0$ και $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left(-1, -\frac{1}{9}\right)$, είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

[συνεχίζουμε να δούμε τι γίνεται στις άλλες περιπτώσεις]

Για $\lambda = 0$, η εξίσωση (1) γίνεται $0x^2 - 1x - 0 = 0 \Leftrightarrow -1x = 0$

[με αντικατάσταση στην (1) των τιμών που μηδενίζουν το Α]

άρα έχει μοναδική λύση, την $x = 0$.

[είτε θα έχει μοναδική λύση είτε θα βγει αδύνατη]

Για $\lambda = -1$, η εξίσωση (1) γίνεται $0x^2 - 0x - 0 = 0 \Leftrightarrow 0x = 0$, **άρα** $x \in \mathbb{R}$.

[είτε $0x = 0$ και τότε θα γράψουμε $x \in \mathbb{R}$]

Πχ.2. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $(\lambda-1)x^2 - 2(\lambda-1)x + 3-2\lambda = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Είναι της μορφής $Ax^2 + Bx + \Gamma = 0$ με $A = \lambda - 1$, $B = -2(\lambda - 1)$ και $\Gamma = 3 - 2\lambda$.

Όταν $A \neq 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$: η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού, οπότε

$$\Delta = B^2 - 4A\Gamma = [-2(\lambda-1)]^2 - 4(\lambda-1)(3-2\lambda) = 2^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4(3\lambda - 2\lambda^2 - 3 + 2\lambda)$$

$$= 4[(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - (3\lambda - 2\lambda^2 - 3 + 2\lambda)] = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 3\lambda + 2\lambda^2 + 3 - 2\lambda) =$$

$$= 4(\lambda^2 + 2\lambda^2 - 2\lambda - 3\lambda - 2\lambda + 1 + 3) = 4(3\lambda^2 - 7\lambda + 4)$$

$$3\lambda^2 - 7\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = \frac{4}{3}$$

λ	$-\infty$	1	4/3	$+\infty$	
$3\lambda^2 - 7\lambda + 4$	+		-		+

- Για $A \neq 0$ και $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$,

η εξίσωση έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες

λ	$-\infty$	1	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$3\lambda^2 - 7\lambda + 4$	+	○	-	+

[αν τις ζητάγε, δηλαδή στο ερώτημα να λυθεί η εξίσωση, θα έπρεπε να τις βρούμε, οι ρίζες αυτές είναι

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{2(\lambda-1) \pm \sqrt{4(3\lambda^2 - 7\lambda + 4)}}{2(\lambda-1)} = \frac{\cancel{2}(\lambda-1) \pm \cancel{2}\sqrt{3\lambda^2 - 7\lambda + 4}}{\cancel{2}(\lambda-1)} = \frac{\lambda-1}{\lambda-1} \pm \frac{\sqrt{(3\lambda-4)(\lambda-1)}}{\sqrt{(\lambda-1)^2}} = 1 \pm \sqrt{\frac{3\lambda-4}{\lambda-1}}$$

- Για $A \neq 0$ και $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$, η εξίσωση έχει 1 διπλή πραγματική ρίζα, [η τιμή $\lambda=1$ απορρίπτεται γιατί είναι περιορισμός από το A, για να παραμένει τριώνυμο, δηλαδή εξίσωση δευτέρου βαθμού]

[αν την ζητάγε, δηλαδή στο ερώτημα να λυθεί η εξίσωση,

θα έπρεπε να την βρούμε, η ρίζα αυτή είναι $x = \frac{-B}{2A} = \frac{2(\lambda-1)}{2(\lambda-1)} = 1$]

- Για $A \neq 0$ και $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$, η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες [είναι αδύνατη στο R].

Όταν $A = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, η εξίσωση [που πλέον δεν είναι β' βαθμού] γράφεται [αντικαθιστώντας το $\lambda=1$]:

$$0x^2 - 2 \cdot 0x + 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow 0x = -1, \text{ που είναι αδύνατη.}$$

Πχ.3. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $x^2 - 2(\lambda-1)x + \lambda + 2 = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Είναι της μορφής $Ax^2 + Bx + \Gamma = 0$ με $A = 2$, $B = -2(\lambda-1)$ και $\Gamma = \lambda + 2$.

Επειδή $A=2>0$ είναι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ εξίσωση β' βαθμού.

$$\Delta = B^2 - 4A\Gamma = [-2(\lambda-1)]^2 - 4(\lambda+2) = 2^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4(\lambda+2) \\ = 4[(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - (\lambda+2)] = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \lambda - 2) = 4(\lambda^2 - 3\lambda - 1)$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

- Για $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right)$,

η εξίσωση έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες

- Για $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$, η εξίσωση έχει 1 διπλή πραγματική ρίζα

- Για $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$, η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες

λ	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$
$\lambda^2 - 3\lambda - 1$	+	○	-	+

παραμετρική ανίσωση β' βαθμού

[διακρίνουσα στην διακρίνουσα και συναλήθευση με το α]

Συνοπτικά το πρόσημο τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$ έχει τις εξής μορφές, ανάλογα το πρόσημο του α και το πλήθος ριζών της εξίσωσης, σύμφωνα με το πρόσημο της διακρίνουσας Δ:

$a > 0$		$a < 0$		
$\frac{x}{f(x)}$	$\frac{\quad}{+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +}$	$\frac{x}{f(x)}$	$\frac{\quad}{- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -}$	$\Delta > 0$
$\frac{x}{f(x)}$	$\frac{\quad}{+ \quad 0 \quad +}$	$\frac{x}{f(x)}$	$\frac{\quad}{- \quad 0 \quad -}$	$\Delta = 0$
$\frac{x}{f(x)}$	$\frac{\quad}{+}$	$\frac{x}{f(x)}$	$\frac{\quad}{-}$	$\Delta < 0$

Η συνηθισμένη άσκηση είναι τότε μια ανίσωση δευτέρου βαθμού, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ σημαίνει ότι στο πινακάκι δεν αλλάζει πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$ είτε θα είναι πάντα θετική είτε θετική ή 0 είτε πάντα αρνητική είτε πάντα αρνητική ή 0.

Συνοπτικά οι περιπτώσεις είναι παρακάτω 4, για το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$.

1. Αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ανίσωση $f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
2. Αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ανίσωση $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
3. Αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ανίσωση $f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
4. Αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ανίσωση $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

[δηλ. θετικό τριώνυμο ισοδυναμεί με θετικό α και η διακρίνουσα αρνητική,

ενώ θετικό ή μηδενικό ένα τριώνυμο ισοδυναμεί με θετικό α και η διακρίνουσα είτε αρνητική είτε μηδενική]

πχ. 1β. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η ανίσωση $(\lambda^2 + \lambda)x - (\lambda + 1)x - 2\lambda < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

Είναι της μορφής $Ax^2 + Bx + \Gamma < 0$ με $A = \lambda^2 + \lambda$, $B = -(\lambda + 1)$ και $\Gamma = -2$.

[Αρχικά ελέγχουμε, τι γίνεται όταν δεν είναι δευτέρου βαθμού]

όταν $A = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } \lambda + 1 = 0) \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = -1)$

Για $\lambda = 0$, η ανίσωση γίνεται $0x^2 - x - 0 < 0 \Leftrightarrow x > 0$,

απορρίπτεται [η περίπτωση αυτή, αφού δεν βρήκαμε $x \in \mathbb{R}$]

Για $\lambda = -1$, η ανίσωση γίνεται $0x^2 - 0x + 2 < 0 \Leftrightarrow 2 < 0$, αδύνατη,

άρα απορρίπτεται [η περίπτωση αυτή, αφού δεν βρήκαμε $x \in \mathbb{R}$]

Αν $A \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -1$, είναι ανίσωση δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα [δείτε άσκηση 1] $\Delta = 9\lambda^2 + 10\lambda + 1$

Πρέπει

$$\begin{cases} A < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + \lambda < 0 \\ 9\lambda^2 + 10\lambda + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in (-1, 0) \\ \lambda \in \left(-1, -\frac{1}{9}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in \left(-1, -\frac{1}{9}\right)$$

[στο τέλος κάναμε συναλήθευση των δυο ανισώσεων, δηλαδή Κωστάκης - Μαιρούλα στον άξονα, αφού τα διατάξαμε στην σωστή σειρά, τα αποτελέσματα από τα πινακάκια τους]

λ	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$\lambda^2 + \lambda$	+		-	 +

λ	$-\infty$	-1	$-1/9$	$+\infty$	
$9\lambda^2+10\lambda+1$	$+$		$-$		$+$

[αν ζήταγε $(\lambda^2 + \lambda)x^2 - (\lambda + 1)x - 2\lambda \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{θα βρίσκαμε } \begin{cases} A < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + \lambda < 0 \\ 9\lambda^2 + 10\lambda + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in (-1, 0) \\ \lambda \in \left[-1, -\frac{1}{9}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in \left[-1, -\frac{1}{9}\right]$$

Οι περιπτώσεις $\lambda = 0$ και $\lambda = -1$ πάλι απορρίπτονται, αφού οδηγούν στις $x \geq 0$ και $2 \leq 0$ αντίστοιχα, που δεν ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Άρα, τελικά } \lambda \in \left[-1, -\frac{1}{9}\right]$$

[αν ζήταγε $(\lambda^2 + \lambda)x^2 - (\lambda + 1)x - 2\lambda > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{θα βρίσκαμε } \begin{cases} A > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + \lambda > 0 \\ 9\lambda^2 + 10\lambda + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \\ \lambda \in \left(-1, -\frac{1}{9}\right) \end{cases}, \text{αδύνατο}$$

Η περίπτωση $\lambda = 0$ απορρίπτεται, αφού οδηγεί στη $x < 0$ που δεν ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η περίπτωση $\lambda = -1$ είναι δεκτή, αφού οδηγεί στην $2 > 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα τελικά $\lambda = -1$.]

[αν ζήταγε $(\lambda^2 + \lambda)x^2 - (\lambda + 1)x - 2\lambda \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{θα βρίσκαμε } \begin{cases} A > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 + \lambda > 0 \\ 9\lambda^2 + 10\lambda + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \\ \lambda \in \left[-1, -\frac{1}{9}\right] \end{cases}, \text{ αδύνατο}$$

Η περίπτωση $\lambda = 0$ απορρίπτεται, αφού οδηγεί στη $x \geq 0$, που δεν ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η περίπτωση $\lambda = -1$ είναι δεκτή, αφού οδηγεί στην $2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα τελικά $\lambda = -1$.]

πχ. 2β. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η ανίσωση $(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 3 - 2\lambda < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

Είναι της μορφής $Ax^2 + Bx + \Gamma < 0$ με $A = \lambda - 1$, $B = -2(\lambda - 1)$ και $\Gamma = 3 - 2\lambda$.

[Αρχικά ελέγχουμε, τι γίνεται όταν δεν είναι δευτέρου βαθμού]

$$\text{όταν } A = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$, η ανίσωση γίνεται $0x^2 - 0x + 3 - 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < 0$, που δεν ισχύει, απορρίπτεται

Αν $A \neq 1 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$: είναι ανίσωση δευτέρου βαθμού
με διακρίνουσα [δείτε άσκηση 2] $\Delta = 4(3\lambda^2 - 7\lambda + 4)$

λ	$-\infty$	1	$4/3$	$+\infty$	
$3\lambda^2 - 7\lambda + 4$	+		-		+

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} A < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 1 < 0 \\ 4(3\lambda^2 - 7\lambda + 4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 1 \\ \lambda \in \left(1, \frac{4}{3}\right) \end{cases}, \text{ αδύνατο}$$

Άρα δεν υπάρχουν τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ανίσωση να είναι αληθής για για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

[αν ζήταγε $(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 3 - 2\lambda \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{θα βρίσκαμε } \begin{cases} A < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 1 < 0 \\ 4(3\lambda^2 - 7\lambda + 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 1 \\ \lambda \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \end{cases}, \text{ αδύνατο}$$

Η περίπτωση $\lambda = 1$ απορρίπτεται, αφού οδηγεί στη $1 \leq 0$ που δεν ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα δεν υπάρχουν τιμές του λ .]

[αν ζήταγε $(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 3 - 2\lambda > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{θα βρίσκαμε } \begin{cases} A > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 1 > 0 \\ 4(3\lambda^2 - 7\lambda + 4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 1 \\ \lambda \in \left(1, \frac{4}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$$

Η περίπτωση $\lambda = 1$ είναι δεκτή, αφού οδηγεί στη $1 > 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα τελικά $\lambda = 1$.]

[αν ζητάγε $(\lambda-1)x^2 - 2(\lambda-1)x + 3 - 2\lambda \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{θα βρίσκαμε } \begin{cases} A > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 1 > 0 \\ 4(3\lambda^2 - 7\lambda + 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 1 \\ \lambda \in \left[1, \frac{4}{3}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in \left(1, \frac{4}{3}\right]$$

Η περίπτωση $\lambda=1$ είναι δεκτή, αφού οδηγεί στη $1 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα τελικά $\lambda \in \left(1, \frac{4}{3}\right]$

πχ. 3β. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η ανίσωση $x^2 - 2(\lambda-1)x + \lambda + 2 > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

Είναι της μορφής $Ax^2 + Bx + \Gamma > 0$ με $A = 2$, $B = -2(\lambda-1)$ και $\Gamma = \lambda + 2$.

Επειδή $A = 2 \neq 0$, είναι πάντοτε πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς x .

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} A > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}, \text{ Είναι } A = 2 > 0$$

[οπότε δεν χρειάζεται συναλήθευση]

[υπολογίζω όπως στην άσκηση 3, την διακρίνουσα και κάνω πινακάκι για την διακρίνουσα της διακρίνουσας γιατί θέλω το πρόσημό της]

λ	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$	
$\lambda^2-3\lambda-1$	$+$		$-$		$+$

$$\Delta = 4(\lambda^2 - 3\lambda - 1) < 0 \quad \text{Άρα } \Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$[\text{αν ζητάγε } x^2 - 2(\lambda-1)x + \lambda + 2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ θα βρίσκαμε } \Delta \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left[\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]]$$

[αν ζητάγε $x^2 - 2(\lambda-1)x + \lambda + 2 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα λέγαμε μεμιας ότι είναι αδύνατο εφόσον $A=2>0$]

[αν ζητάγε $x^2 - 2(\lambda-1)x + \lambda + 2 \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα λέγαμε μεμιας ότι είναι αδύνατο εφόσον $A=2>0$]

πχ. 4. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η ανίσωση $\lambda x^2 - (\lambda-1)x + \lambda - 1 \leq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

Είναι της μορφής $Ax^2 + Bx + \Gamma > 0$ με $A = \lambda$, $B = -(\lambda-1)$ και $\Gamma = \lambda - 1$.

Όταν $A=0 \Leftrightarrow \lambda=0$: η ανίσωση γίνεται $0x^2 + 1x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, απορρίπτεται

Αν $A \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$: είναι ανίσωση δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = [-(\lambda-1)]^2 - 4\lambda(\lambda-1) = -3\lambda^2 + 2\lambda + 1$

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} A < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 0 \\ \lambda \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Άρα [με συναλήθευση βρίσκω]} \lambda \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$$

λ	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$-3\lambda^2+2\lambda+1$	-		+		-

$$[\text{αν ζητάγε } \lambda x^2 - (\lambda-1)x + \lambda - 1 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ θα βρίσκαμε } \begin{cases} A > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \end{cases} \Rightarrow \lambda \in \left(0, \frac{1}{3}\right]. \text{ Το } \lambda=0 \text{ πάλι απορρίπτεται.}]$$

εξισώσεις κι ανισώσεις με $|x|$

$|x| \geq 0$ με το ίσον να ισχύει όταν $x = 0$

$|x| = -3$
αδύνατη

$|x| = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0$
γιατί $|x| \geq 0$

$|x| = 8$
 $\Leftrightarrow x = \pm 8$

$|x| < -3$
αδύνατη

$|x| < 0$
αδύνατη
γιατί $|x| \geq 0$

$|x| < 8$
 $\Leftrightarrow -8 < x < 8$
γιατί $|x| \geq 0$

$|x| > -3$
αληθές

$|x| > 0$
 $\Leftrightarrow x \neq 0$

$|x| > 8$
 $\Leftrightarrow x < -8 \text{ ή } x > 8$

γιατί $|x| \geq 0$

άρα $x \in \mathbb{R}$

πρόσημο πρωτοβάθμιου: $ax + \beta$

x	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$ax + \beta$	E		O

O = ομόσημο του α
E = ετερόσημο του α
 ρ = ρίζα εξίσωσης
 $ax + \beta = 0$

πχ.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$2x - 6$	-		+

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-2x + 6$	+		-

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$3x + 12$	-		+

x	$-\infty$	-7	$+\infty$
$-x - 7$	+		-

Κατηγορίες ασκήσεων στα απόλυτα

1. Με τον ορισμό: $|A| = \begin{cases} A, A \geq 0 \\ -A, A < 0 \end{cases} = \begin{cases} A, A > 0 \\ 0, A = 0 \\ -A, A < 0 \end{cases}$

(γεωμετρικά) $|A|$ = απόσταση του A από το 0 στον άξονα

$$A = |-2| - |x^2 + 3| + 2|x^2 - 2x + 1| - 3|-x^2 + 9x - 1| = \begin{matrix} -2 \\ - \end{matrix} \begin{matrix} x^2 + 3 \\ + \end{matrix} + 2 \begin{matrix} (x-1)^2 \\ + \end{matrix} \begin{matrix} -3 \\ - \end{matrix} \begin{matrix} (x-3)^2 \\ - \end{matrix}$$

$$= -(-2) - (x^2 + 3) + 2(x-1)^2 + 3(x-3)^2 = \dots \text{διότι } -2 < 0, x^2 \geq 0, 3 > 0, (x-1)^2 \geq 0, -(x-3)^2 \leq 0$$

2. Εξίσωση $|x| = A$ (απόσταση του x από το 0 είναι A) $|x| = A \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm A, A > 0 \\ x = 0, A = 0 \\ \text{αδυνατη}, A < 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{l|l} |2x-1|=5 \Leftrightarrow 2x-1=\pm 5 & |2x-1|=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \\ 2x-1=5 & \Leftrightarrow 2x=1 \\ 2x=1+5 & \Leftrightarrow \frac{2x}{2}=\frac{1}{2} \\ \frac{2x}{2}=\frac{6}{2} & \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \\ x=3 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 2x-1=-5 & \\ 2x=1-5 & \\ \frac{2x}{2}=\frac{-4}{2} & \\ x=-2 & \end{array} \quad \begin{array}{l} |2x-1|=-3, \\ \text{αδύνατη διότι } |2x-1| \geq 0 \end{array}$$

3. Ανίσωση $|x| < A$ (απόσταση του x από το 0 μικρότερη από A) $|x| < A \Leftrightarrow \begin{cases} -A < x < A, A > 0 \\ \text{αδύνατη}, A = 0 \\ \text{αδύνατη}, A < 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} |2x-1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x-1 < 5 \\ \xrightarrow{+1} \Leftrightarrow -5+1 < 2x-1+1 < 5+1 \\ \Leftrightarrow -4 < 2x < 6 \\ \xrightarrow{+2} \Leftrightarrow \frac{-4}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{6}{2} \\ \Leftrightarrow -2 < x < 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} |2x-1| < 0, \\ \text{αδύνατη διότι } |2x-1| \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} |2x-1| < -3, \\ \text{αδύνατη διότι } |2x-1| \geq 0 \end{array}$$

Αναλόγως και $|x| \leq A$ (απόσταση του x από το 0 μικρότερη ή ίση από A) $|x| \leq A \Leftrightarrow \begin{cases} -A \leq x \leq A, A > 0 \\ x = 0, A = 0 \\ \text{αδύνατη}, A < 0 \end{cases}$

4. Ανίσωση $|x| > A$ (απόσταση του x από το 0 μεγαλύτερη από A) $|x| > A \Leftrightarrow \begin{cases} x < -A \text{ ή } x > A, A > 0 \\ x \neq 0, A = 0 \\ x \in R, A < 0 \end{cases}$

Αναλόγως και $|x| \geq A$ (απόσταση του x από το 0 μεγαλύτερη ή ίση από A) $|x| \geq A \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -A \text{ ή } x \geq A, A > 0 \\ x \in R, A = 0 \\ x \in R, A < 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{lll} |2x-1| > 5 \Leftrightarrow & |2x-1| > 0, & \\ 2x-1 < -5 \text{ ή } 2x-1 > 5 & 2x-1 \neq 0 & \\ 2x < 1-5 & 2x > 1+5 & 2x \neq 1 \\ \cancel{2}x < \cancel{2}-4 & \cancel{2}x > \cancel{2}6 & \cancel{2}x \neq \cancel{2}1 \\ x < -2 & x > 3 & x \neq \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} |2x-1| \geq -3, \\ x \in R \text{ διότι } |2x-1| \geq 0 \end{array}$$

5. διπλή ανίσωση, ισοδυναμεί με την συναλήθευση 2 μονών ανισώσεων, όπως παραπάνω

$$A < |x| < B \Leftrightarrow \begin{cases} A < |x| \\ |x| < B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > A \\ |x| < B \end{cases}, \text{ ομοίως και οι } A \leq |x| < B, A < |x| \leq B, A \leq |x| \leq B$$

6. $|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$ (2 αριθμοί με την ίδια απόλυτη τιμή είναι ίσοι ή αντίθετοι)

$$\begin{array}{lll} \text{πχ. } |2x-5| = |3x+7| \Leftrightarrow (2x-5) = \pm(3x+7) \Leftrightarrow & \begin{array}{l} 2x-5 = (3x+7) \\ 2x-5 = 3x+7 \\ 2x-3x = 5+7 \\ -x = 12 \\ x = -12 \end{array} & \begin{array}{l} 2x-5 = -(3x+7) \\ 2x-5 = -3x-7 \\ 2x+3x = 5-7 \\ \cancel{2}x = \cancel{2}-2 \\ \cancel{2}x = \cancel{2}-2 \\ x = -\frac{2}{5} \end{array} \end{array}$$

7. $|A| < |B| \Leftrightarrow |A|^2 < |B|^2 \Leftrightarrow A^2 < B^2$ (διότι $|A|^2 = A^2$)

$$\text{πχ. } |2x-5| < |2x+3| \Leftrightarrow |2x-5|^2 < |2x+3|^2 \Leftrightarrow (2x-5)^2 < (2x+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{4}x^2 - 10x + 25 < \cancel{4}x^2 - 12x + 9 \Leftrightarrow -10x + 12x < -25 + 9 \Leftrightarrow 2x < -16 \Leftrightarrow \cancel{2}x < \cancel{2}-16 \Leftrightarrow x < -8$$

8. $|A| = A \Leftrightarrow A \geq 0$, αναλόγως $|A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0$

πχ. $|3x-5| = 3x-5 \Leftrightarrow 3x-5 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 5 \Leftrightarrow \frac{3x}{3} \geq \frac{5}{3} \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$

πχ. $|2x-3| = 3-2x \Leftrightarrow |2x-3| = -(2x-3) \Leftrightarrow 2x-3 \leq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$

9. $|A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

πχ. $|2x+3| + |3y-4| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3=0 \\ 3y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-3 \\ 3y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{2}x = \frac{-3}{\cancel{2}} \\ \cancel{3}y = \frac{4}{\cancel{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$

10. Παράσταση με 1 απόλυτο [απαραίτητα πινακάκι πρωτοβάθμιου]

Πχ. Να γραφεί η παράσταση $A = |2x-8| - 3x + 4$ χωρίς απόλυτα

x	$-\infty$	4	$+\infty$
2x-8	-		+

[λύνω την εξίσωση μέσα στο απόλυτο για να βρω την ρίζα του πρωτοβάθμιου, τον αριθμό που το μηδενίζει]

$$2x-8=0 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{8}{2} \Leftrightarrow x=4$$

[τα πρόσημα στο πινακάκι πάνε ΕΟ, ετερόσημο - ομόσημο του α, όπου α ο συντελεστής του x στην μορφή αx+β]

[διακρίνω περιπτώσεις με βάση το διάστημα για το x, όπου το πρόσημο είναι "συν" βγαίνει με παρένθεση, όπου είναι "μειον" βγαίνει με παρένθεση και μείον έξω από την παρένθεση, όπως στον ορισμό του απολύτου]

▪ Αν $x \in (-\infty, 4)$: $2x-8 < 0 \Rightarrow |2x-8| = -(2x-8)$

Άρα $A = -(2x-8) - 3x + 4 = -2x + 8 - 3x + 4 = -2x - 3x + 8 + 4 = -5x + 12$

▪ Αν $x \in [4, +\infty)$: $2x-8 \geq 0 \Rightarrow |2x-8| = +(2x-8)$

Άρα $A = (2x-8) - 3x + 4 = 2x - 8 - 3x + 4 = 2x - 3x - 8 + 4 = -x - 4$

▪ Συνοψίζοντας $A = \begin{cases} -5x+12 & , x \in (-\infty, 4) \\ -x-4 & , x \in [4, +\infty) \end{cases}$

εξίσωση / ανίσωση με διαφορετικά απόλυτα

Για να λυθεί μια εξίσωση / ανίσωση που περιέχει διαφορετικά απόλυτα, όταν το ένα απόλυτο δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου απόλυτου, κατασκευάζουμε πολλαπλό πινακάκι προσήμων των παραστάσεων μέσα στα απόλυτα, για να βγουν διακρίνοντας περιπτώσεις. Κατόπιν λύνουμε την εκάστοτε περίπτωση, στο διάστημά της .

- Στην περίπτωση της εξίσωσης ελέγχουμε αν στο διάστημα που είμαστε οι λύσεις είναι δεκτές η απορρίπτονται. Αν απορριφθούν όλες οι λύσεις, η εξίσωση είναι αδύνατη. Αν βγει $0x=0$, τότε λύσεις είναι όλο το διάστημα που είμαστε.
- Στην περίπτωση της ανίσωσης, κάνουμε συναλήθευση των λύσεων που βρήκαμε με το διάστημα που είμαστε. Αν σε κανένα διάστημα δεν υπάρχουν κοινές λύσεις, η ανίσωση είναι αδύνατη. Αν βγει ανισότητα που ισχύει πχ. $0x \leq 0$, $0x < 5$, $0x > -2$, τότε λύσεις είναι όλο το διάστημα που είμαστε.

Πχ. Να λυθεί $|x+2| - 2|-x+3| \leq -x-4$ (1)

[Μηδενίζουμε τις παραστάσεις μέσα στα απόλυτα για να βρούμε τις ρίζες τους]

$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$-x+3=0 \Leftrightarrow -x=-3 \Leftrightarrow x=3$$

[Διατάσσουμε τις ρίζες -2, 3 στον άξονα και σε κάθε γραμμή

βάζουμε τα πρόσημα κάθε πρωτοβάθμιου παράγοντα

και τα μηδενικά στο διπλό πινακάκι μπαίνουν ως εξής:

το -2 μηδενίζει τον 1^ο πρωτοβάθμιο παράγοντα, το 3 μηδενίζει τον άλλο πρωτοβάθμιο παράγοντα, τα πρόσημα μπαίνουν συμφώνα με τον κανόνα προσήμων Ε-Ο (Ετερόσημο – Ομόσημο του α)]

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+
$-x+3$	+	+	0	-

[Το -2 και το 3 χωρίζουν το R σε 3 ξένα διαστήματα (χωρίς κοινά σημεία, στα οποία κάθε πρωτοβάθμιος παράγοντας είτε διατηρεί ένα πρόσημο είτε μηδενίζεται), οπότε θα διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για να το λύσουμε και το εκάστοτε διάστημα θα είναι ο περιορισμός της ανίσωσης στο διάστημα αυτή, οπότε με ο,τι βρω θα κάνω συναλήθευση με αυτόν]

[Τα τρία διαστήματα είναι τα $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$, $(3, +\infty)$ και μένει να βάζουμε κλειστό διάστημα σε 2 ανοικτά άκρα για να συμπεριλάβουμε το -2 και το 3, για ευκολία, βάζουμε κλειστό στα άκρα του μεσαίου διαστήματος, οπότε έχουμε τα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $[-2, 3]$, $(3, +\infty)$, εναλλακτικά θα μπορούσαμε να είχαμε τα $(-\infty, -2]$, $(-2, 3)$, $[3, +\infty)$ ή τα $(-\infty, -2]$, $(-2, 3]$, $(3, +\infty)$ ή τα $(-\infty, -2)$, $[-2, 3)$, $[3, +\infty)$, όπου βάζουμε κλειστό διάστημα συμπεριλαμβάνουμε την περίπτωση που μηδενίζεται το απόλυτο]

Αν $x \in (-\infty, -2)$: [1^η περίπτωση]

$$x+2 < 0 \Rightarrow |x+2| = -(x+2)$$

$$-x+3 > 0 \Rightarrow |-x+3| = -x+3$$

[δηλαδή το πρώτο απόλυτο στην σειρά φεύγει και γράφεται με παρένθεση και μείον απέξω,

ενώ το δεύτερο απόλυτο φεύγει και μένει παρένθεση με σύν απέξω, δηλαδή σκέτο παρένθεση]

$$|x+2| - 2|-x+3| \leq -x-4 \Leftrightarrow -(x+2) - 2(-x+3) \leq -x-4$$

$$\Leftrightarrow -x-2+2x-6 \leq -x-4 \Leftrightarrow -x+2x+x \leq 2+6-4 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} \leq \frac{4}{2} \Leftrightarrow x \leq 2$$

$$\text{οπότε έχουμε } \begin{cases} x \leq 2 \\ x \in (-\infty, -2) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -2)$$

[κάναμε συναλήθευση της ανίσωσης $x \leq 2$ και του περιορισμού του διαστήματος $x \in (-\infty, -2)$, με τον γνωστό τρόπο Κωστάκης – Μαιρούλα πάνω στον άξονα και βρήκαμε $x \in (-\infty, -2)$]

Αν $x \in [-2, 3]$: [2^η περίπτωση]

$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow |x + 2| = x + 2$$

$$-x + 3 \geq 0 \Rightarrow |-x + 3| = -x + 3$$

[επειδή έχουμε κλειστά διαστήματα, συμπεριλαμβάνεται και η τιμή που μηδενίζει κάθε απόλυτο, για αυτό και όταν γράφουμε το πρόσημο κάθε όρου αντί για σκέτο μικρότερο (ή μεγαλύτερο) γράφουμε μικρότερο ή ίσο του μηδενός (μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός) αντίστοιχα]

$$|x + 2| - 2|-x + 3| \leq -x - 4 \Leftrightarrow (x + 2) - 2(-x + 3) \leq -x - 4$$

$$\Leftrightarrow x + 2 + 2x - 6 \leq -x - 4 \Leftrightarrow x + 2x + x \leq -2 + 6 - 4 \Leftrightarrow 4x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{4} \leq \frac{0}{4} \Leftrightarrow x \leq 0$$

$$\text{οπότε έχουμε } \begin{cases} x \in [-2, 3] \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2, 0]$$

[κάναμε συναλήθευση της ανίσωσης $x \leq 0$ και του περιορισμού του διαστήματος $x \in [-2, 3]$ και δεν βρήκαμε κοινές λύσεις στον άξονα το διάστημα $[-2, 0]$, με τον γνωστό τρόπο Κωστάκης - Μαιρούλα]

Αν $x \in (3, +\infty)$: [3^η περίπτωση]

$$x + 2 > 0 \Rightarrow |x + 2| = x + 2$$

$$-x + 3 < 0 \Rightarrow |-x + 3| = -(-x + 3)$$

$$|x + 2| - 2|-x + 3| \leq -x - 4 \Leftrightarrow (x + 2) + 2(-x + 3) \leq -x - 4$$

[το -2 έξω από το (-x+3) έγινε +2 επειδή $-2(-1)(-x+3)=2(x+3)$]

$$\Leftrightarrow x + 2 - 2x + 6 \leq -x - 4 \Leftrightarrow x - 2x + x \leq -2 - 6 - 4 \Leftrightarrow 0x \leq -10 \text{ αδύνατη}$$

$$\text{[οπότε έχουμε } \begin{cases} x \in (3, +\infty) \\ \text{αδύνατη} \end{cases} \Rightarrow \text{αδύνατη, εφόσον στο διάστημα αυτή βγήκε αδύνατη, κοινές λύσεις με το διάστημα δεν υπάρχουν, άρα η ανίσωση παραμένει αδύνατη στο διάστημα αυτό, είναι περιττό να ψάξουμε κοινές λύσεις, γι' αυτό και αρκεί το αδύνατη, ο,τι είναι στην αγκύλη δεν είναι υποχρεωτικό άλλωστε, παρά επεξηγήσεις]}$$

υπάρχουν, άρα η ανίσωση παραμένει αδύνατη στο διάστημα αυτό, είναι περιττό να ψάξουμε κοινές λύσεις, γι' αυτό και αρκεί το αδύνατη, ο,τι είναι στην αγκύλη δεν είναι υποχρεωτικό άλλωστε, παρά επεξηγήσεις]

$$\text{Συνοψίζοντας } x \in (-\infty, -2) \cup [-2, 0] = (-\infty, 0]$$

[βάζουμε ένωση στα αποτελέσματα και προσπαθούμε να το γράψουμε σαν ένα διάστημα, αν μπορεί να γίνει, αυτό γίνεται μόνο σε διαδοχικά διαστήματα με κοινό σημείο όταν το ένα διάστημα έχει κλειστό άκρο και το άλλο ανοικτό με τον ίδιο αριθμό]

λυμένη φυλλαδίου μεθόδευσης, δίχως τα ενδιαμέσα σχόλια
[ο,τι είναι στην αγκύλη μπορεί να παραλειφθεί]

Πχ.1. Να λυθεί $|x+2|-2|-x+3| \leq -x-4$

$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$-x+3=0 \Leftrightarrow -x=-3 \Leftrightarrow x=3$$

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+
$-x+3$	+	+	0	-

$$\text{Av } x \in (-\infty, -2): \left[\begin{array}{l} x+2 < 0 \Rightarrow |x+2| = -(x+2) \\ -x+3 > 0 \Rightarrow |-x+3| = -x+3 \end{array} \right]$$

$$\underset{-}{|x+2|} - \underset{+}{2} \underset{+}{|-x+3|} \leq -x-4 \Leftrightarrow -(x+2) - 2(-x+3) \leq -x-4$$

$$\Leftrightarrow -x-2+2x-6 \leq -x-4 \Leftrightarrow -x+2x+x \leq 2+6-4 \Leftrightarrow \cancel{2}x \leq \frac{4}{\cancel{2}} \Leftrightarrow x \leq 2$$

$$\text{άρα } \begin{cases} x \leq 2 \\ x \in (-\infty, -2) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -2)$$

$$\text{Av } x \in [-2, 3]: \left[\begin{array}{l} x+2 \geq 0 \Rightarrow |x+2| = x+2 \\ -x+3 \geq 0 \Rightarrow |-x+3| = -x+3 \end{array} \right]$$

$$\underset{+}{|x+2|} - \underset{+}{2} \underset{+}{|-x+3|} \leq -x-4 \Leftrightarrow (x+2) - 2(-x+3) \leq -x-4$$

$$\Leftrightarrow x+2+2x-6 \leq -x-4 \Leftrightarrow x+2x+x \leq -2+6-4 \Leftrightarrow 4x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{\cancel{4}} \leq \frac{0}{\cancel{4}} \Leftrightarrow x \leq 0$$

$$\text{άρα } \begin{cases} x \in [-2, 3] \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2, 0]$$

$$\text{Av } x \in (3, +\infty): \left[\begin{array}{l} x+2 > 0 \Rightarrow |x+2| = x+2 \\ -x+3 < 0 \Rightarrow |-x+3| = -(-x+3) \end{array} \right]$$

$$\underset{+}{|x+2|} - \underset{-}{2} \underset{-}{|-x+3|} \leq -x-4 \Leftrightarrow (x+2) + 2(-x+3) \leq -x-4$$

$$\Leftrightarrow x+2-2x+6 \leq -x-4 \Leftrightarrow x-2x+x \leq -2-6-4 \Leftrightarrow 0x \leq -10 \text{ αδύνατη}$$

$$\text{Συνοψίζοντας } x \in (-\infty, -2) \cup [-2, 0] = (-\infty, 0]$$

άλλες λυμένες

[ο,τι είναι στην αγκύλη μπορεί να παραλειφθεί]

Πχ.2. Να λυθεί $|x-2|+2|-x-3| \leq 3x+4$

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$-x-3=0 \Leftrightarrow -x=3 \Leftrightarrow x=-3$$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+
$-x-3$	+	0	-	-

$$\text{Av } x \in (-\infty, -3): \begin{cases} x-2 < 0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) \\ -x-3 > 0 \Rightarrow |-x-3| = -x-3 \end{cases}$$

$$|x-2|+2|-x-3| \leq 3x+4 \Leftrightarrow (x-2)+2(-x-3) \leq 3x+4 \Leftrightarrow x-2-2x-6 \leq 3x+4$$

$$\Leftrightarrow x-2x-3x \leq 2+6+4 \Leftrightarrow -5x \leq 12 \Leftrightarrow \frac{-5x}{-5} \geq \frac{12}{-5} \Leftrightarrow x \geq -\frac{12}{5}$$

$$\text{άρα } \begin{cases} x \geq -\frac{12}{5} \\ x \in (-\infty, -3) \end{cases} \Rightarrow \text{αδύνατη} \quad \left[\text{αφού } -3 < -\frac{12}{5} \right]$$

$$\text{Av } x \in [-3, 2]: \begin{cases} x-2 \leq 0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) \\ -x-3 \leq 0 \Rightarrow |-x-3| = -(-x-3) \end{cases}$$

$$|x-2|+2|-x-3| \leq 3x+4 \Leftrightarrow -(x-2)-2(-x-3) \leq 3x+4 \Leftrightarrow -x+2+2x+6 \leq 3x+4$$

$$\Leftrightarrow -x+2x-3x \leq -2-6+4 \Leftrightarrow -2x \leq -4 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} \geq \frac{-4}{-2} \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\text{άρα } \begin{cases} x \geq 2 \\ x \in [-3, 2] \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Av } x \in (2, +\infty): \begin{cases} x-2 > 0 \Rightarrow |x-2| = x-2 \\ -x-3 < 0 \Rightarrow |-x-3| = -(-x-3) \end{cases}$$

$$|x-2|+2|-x-3| \leq 3x+4 \Leftrightarrow (x-2)-2(-x-3) \leq 3x+4 \Leftrightarrow x-2+2x+6 \leq 3x+4$$

$$\Leftrightarrow x+2x-3x \leq 2-6+4 \Leftrightarrow 0x \leq 2, \text{ που ισχύει, άρα } x \in R$$

$$\text{άρα } \begin{cases} x \in R \\ x \in (2, +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (2, +\infty)$$

$$\text{Συνοψίζοντας } x \in \{2\} \cup (2, +\infty) = [2, +\infty)$$

Πχ.3. Να λυθεί $2|x+1|-3|x+2| \leq x-3$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

$$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$x+1$	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+

$$\text{Av } x \in (-\infty, -2): \begin{cases} x+1 < 0 \Rightarrow |x+1| = -(x+1) \\ x+2 < 0 \Rightarrow |x+2| = -(x+2) \end{cases}$$

$$2|x+1|-3|x+2| \leq x-3 \Leftrightarrow -2(x+1)+3(x+2) \leq x-3 \Leftrightarrow -2x-2+3x+6 \leq x-3$$

$$\Leftrightarrow -2x+3x-x \leq -2+6-3 \Leftrightarrow -2x \leq -7 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} \geq \frac{-7}{-2} \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{2}$$

$$\text{άρα } \begin{cases} x \geq \frac{7}{2} \\ x \in (-\infty, -2) \end{cases} \Rightarrow \text{αδύνατη}$$

$$\text{Av } x \in [-2, -1]: \begin{cases} x+1 \leq 0 \Rightarrow |x+1| = -(x+1) \\ x+2 \geq 0 \Rightarrow |x+2| = x+2 \end{cases}$$

$$2|x+1|-3|x+2| \leq x-3 \Leftrightarrow -2(x+1)-3(x+2) \leq x-3 \Leftrightarrow -2x-2-3x-6 \leq x-3$$

$$\Leftrightarrow -x-2x-3x \leq 2+6-3 \Leftrightarrow -6x \leq 5 \Leftrightarrow \frac{-6x}{-6} \geq \frac{5}{-6} \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{6}$$

$$\text{άρα } \begin{cases} x \geq -\frac{5}{6} \\ x \in [-2, -1] \end{cases} \Rightarrow \text{αδύνατη} \quad \left[\text{αφού } -1 < -\frac{5}{6} \right]$$

$$\text{Av } x \in (-1, +\infty): \begin{cases} x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1 \\ x+2 > 0 \Rightarrow |x+2| = x+2 \end{cases}$$

$$2|x+1|-3|x+2| \leq x-3 \Leftrightarrow 2(x+1)-3(x+2) \leq x-3 \Leftrightarrow 2x+2-3x-6 \leq x-3$$

$$\Leftrightarrow -x+2x-3x \leq -2+6-3 \Leftrightarrow -2x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} \geq \frac{1}{-2} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{άρα } \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \in (-1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \quad \left[\text{αφού } -1 < -\frac{1}{2} \right]$$

$$\text{Συνοψίζοντας } x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Πχ.4. Να λυθεί $2|-x+1|-3|x-2|\leq 5x-10$

$$-x+1=0 \Leftrightarrow -x=-1 \Leftrightarrow x=1$$

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$-x+1$	+	0	-	-
$x-2$	-	-	0	+

$$\text{Av } x \in (-\infty, 1): \begin{cases} -x+1 > 0 \Rightarrow |-x+1| = -x+1 \\ x-2 < 0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) \end{cases}$$

$$2 \underset{+}{|-x+1|} - 3 \underset{-}{|x-2|} \leq 5x-10 \Leftrightarrow 2(-x+1) + 3(x-2) \leq 5x-10 \Leftrightarrow -2x+2+3x-6 \leq 5x-10$$

$$\Leftrightarrow -2x+3x-5x \leq -2+6-10 \Leftrightarrow -4x \leq -6 \Leftrightarrow \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} \geq \frac{-6}{-4} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{άρα } \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \in (-\infty, 1) \end{cases} \Rightarrow \text{αδύνατη} \quad \left[\text{αφού } 1 < \frac{3}{2} \right]$$

$$\text{Av } x \in [1, 2]: \begin{cases} -x+1 \leq 0 \Rightarrow |-x+1| = -(-x+1) \\ x-2 \leq 0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) \end{cases}$$

$$2 \underset{-}{|-x+1|} - 3 \underset{-}{|x-2|} \leq 5x-10 \Leftrightarrow -2(-x+1) + 3(x-2) \leq 5x-10 \Leftrightarrow 2x-2+3x-6 \leq 5x-10$$

$$\Leftrightarrow 2x+3x-5x \leq 2+6-10 \Leftrightarrow 0x \leq -2, \text{ αδύνατη}$$

$$\text{Av } x \in (2, +\infty): \begin{cases} -x+1 < 0 \Rightarrow |-x+1| = -(-x+1) \\ x-2 > 0 \Rightarrow |x-2| = x-2 \end{cases}$$

$$2 \underset{-}{|-x+1|} - 3 \underset{+}{|x-2|} \leq 5x-10 \Leftrightarrow -2(-x+1) - 3(x-2) \leq 5x-10 \Leftrightarrow 2x-2-3x+6 \leq 5x-10$$

$$\Leftrightarrow -5x+2x-3x \leq 2-6-10 \Leftrightarrow -6x \leq -14 \Leftrightarrow \frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} \geq \frac{-14}{-6} \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{3}$$

$$\text{άρα } \begin{cases} x \geq \frac{7}{3} \\ x \in (2, +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{7}{3}, +\infty \right) \quad \left[\text{αφού } 2 < \frac{7}{3} \right]$$

$$\text{Συνοψίζοντας } x \in \left[\frac{7}{3}, +\infty \right)$$