**Διανύσματα**

**Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα**

**2.18603.**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε του επιπέδου τέτοια, ώστε και . 

**α)** Να γράψετε το διάνυσμα  ως γραμμικό συνδυασμό των  και . Μονάδες 13

**β)** Να δείξετε ότι τα διανύσματα  και  είναι παράλληλα. Μονάδες 12

**2.18604.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε,Ζ σημεία τέτοια ώστε : 

**α)** Να γράψετε τα διανύσματα  και  ως γραμμικό συνδυασμό των  και  .

 Μονάδες 13

**β)** Να αποδείξτε ότι τα σημεία B , Z και E είναι συνευθειακά. Μονάδες 12

**2.20054**.Θεωρούμε τα σημεία Ρ, Λ, Κ και Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση:

 .

**α)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά. Μονάδες 10

**β)** Για τα παραπάνω σημεία Κ, Λ και Μ να δείξετε ότι ισχύει:

, όπου Α και Β είναι σημεία του επιπέδου.

 Μονάδες 15

**2.22518**.Θεωρούμε τα διανύσματα και τυχαίο σημείο Ο. Αν ,

 και , τότε:

**α)** να εκφράσετε τα διανύσματα συναρτήσει των διανυσμάτων . Μονάδες 13

**β)** να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Μονάδες 12

**4.22561.**Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι  και . Θεωρούμε σημεία Ε,Ζ στην ΑΔ και τη διαγώνιο ΑΓ αντίστοιχα, ώστε  και . Να αποδείξετε ότι:

**α)**  Μονάδες 8

**β)**  και να υπολογίσετε με τη βοήθεια των το . Μονάδες 12

**γ)** τα σημεία Ε,Ζ,Β είναι συνευθειακά. Μονάδες 5

**Συντεταγμένες στο επίπεδο**

**2.18605.**Δίνονται τα διανύσματα   και  όπου  και  είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων  και  αντίστοιχα.

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες των  και . Μονάδες 12

**β)** Να εξετάσετε αν τα σημεία  και  μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου. Μονάδες 13

**2.20055**.Θεωρούμε τα σημεία και Γ (-4, 5α+4), α.

**α)** Να βρείτε τα διανύσματα  και . Μονάδες 8

**β)** Να βρείτε για ποια τιμή του α, τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Μονάδες 10

**γ)** Αν , να βρείτε αριθμό λ ώστε . Μονάδες 7

**2.20061.**Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τρεις κορυφές τα σημεία Α(1,1), Γ(4, 3) και

Δ(2, 3) .

**α)** Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓΔ. Μονάδες 9

**β)** Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Κ των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής Β. Μονάδες 16

**2.20071**.Θεωρούμε τα σημεία και , .

**α)** Να γράψετε το  συναρτήσει του α και να βρείτε το α ώστε . Μονάδες 12

**β)** Έστω . Να βρείτε σημείο Μ του άξονα x΄x ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι

ισοσκελές με βάση την ΑΒ. Μονάδες 13

**2.20073**.Δίνονται τα σημεία και .

**α)** Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο. Μονάδες 8

**β)** Να βρείτε το συμμετρικό Δ του Β ως προς το μέσο Μ της ΑΓ. Μονάδες 10

**γ)** Τι σχήμα είναι το ΑΒΓΔ; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. Μονάδες 7

**2.20148 .**Δίνονται τα διανύσματα  και .

**α)** Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  είναι συγγραμικά ανά δύο. Μονάδες 10

**β)** Να γραφεί το διάνυσμα  ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων  και .

 Μονάδες 15

**Συντεταγμένες διανύσματος**

**2.22530.** Θεωρούμε τα σημεία Α,Β,Γ ώστε  και .

**α)** Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο και να βρείτε αν η γωνία Α του τριγώνου είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία. Μονάδες 15

**β)** Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου. Μονάδες 10

**Εσωτερικό γινόμενο**

**2.18556.**Δίνονται τα διανύσματα , με  και ,.

**α)** Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο . Μονάδες 8

**β)** Αν τα διανύσματα  και  είναι κάθετα, να βρείτε την τιμή του κ.

 Μονάδες 10

**γ)** Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος . Μονάδες 7

 **2.18558.**Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι: 

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος ,όπου ΑΜ είναι η διάμεσος

 του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 7

**β)** Να αποδείξετε ότι η γωνία  είναι οξεία. Μονάδες 10

**γ)** Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ επιπλέον ισχύει Α(3,1), να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών

 του Β και Γ. Μονάδες 8

**2.18581.**Έστω τα διανύσματα  και  για τα οποία ισχύει : και  .

**α)** Να αποδείξετε ότι  Μονάδες 10

**β)** Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων  και  Μονάδες 15

**2.18598.**Δίνονται τα διανύσματα  και  , όπου .

**α)** Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο . Μονάδες 8

**β)** Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα  να είναι κάθετα. Μονάδες 9

**γ)** Για κ =1 να βρείτε το διάνυσμα  . Μονάδες 8

**2.20053**.Δίνονται τα διανύσματα , με και .

**α)** Να υπολογίσετε τη γωνία . Μονάδες 10

**β)** Να αποδείξετε ότι . Μονάδες 15

**2.20056.**Έστω  και  δύο διανύσματα με , και  και .

**α)** Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα  και  . Μονάδες 16

**β)** Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  . Μονάδες 9

**2.20070**.Έστω , δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν: και .

**α)** Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων , και το εσωτερικό γινόμενο .

 Μονάδες 12

**β)** Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος . Μονάδες 13

**2.20057.**Δίνονται τα διανύσματα  και  , και . Να υπολογίσετε τα εξής:

**α)** το εσωτερικό γινόμενό των διανυσμάτων  και  και κατόπιν την τιμή της παράστασης: . Μονάδες 10

**β)** Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  και . Μονάδες 15

**2.20058.**Δίνονται τα διανύσματα  και . Να υπολογίσετε:

**α)** τη γωνία  Μονάδες 10

**β)** το διάνυσμα  Μονάδες 15

**2.20059.**Δίνονται τα διανύσματα  και 

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  Μονάδες 10

**β)** Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα  και  είναι κάθετα. Μονάδες 15

**2.22505** .Δίνονται τα διανύσματα  και ,  για τα οποία ισχύουν:  και .

**α)** Να αποδείξετε ότι . Μονάδες 12

**β)** Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  και  είναι αντίρροπα και ότι .

 Μονάδες 13

**2.22517**.Έστω δυο διανύσματα  για τα οποία ισχύουν:  και .

**α)** Να γράψετε το διάνυσμα ως συνάρτηση του μ. Μονάδες 10

**β)** Αν μ=2, τότε:

 **i.** να αποδείξετε ότι  και ότι το είναι κάθετο στο . Μονάδες 10

 **ii.** να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων  Μονάδες 5

**2.22524**. Έστω  και  δύο διανύσματα.

**α)** Να βρείτε το  και να απλοποιήσετε την παράσταση . Μονάδες 13

**β)** Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος . Μονάδες 12

**2.22527**. **α)** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα ισχύει: . Μονάδες 12

**β)** Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με τη μονάδα και . Αν η διαγώνιος του ΑΓ έχει μήκος , να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ. Μονάδες 13

**4.18606.**Δίνονται τα διανύσματα και , όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

**α)** Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα και είναι κάθετα. Μονάδες 4

**β)** Αν Γ (α, β) είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β , τότε:

 **i)** να αποδείξετε ότι: και  Μονάδες 5

 **ii)** να αποδείξετε ότι: 4α + 3β = 10 Μονάδες 6

 **iii)** αν επιπλέον τα διανύσματα  είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες

 του σημείου Γ . Μονάδες 10

**4.18616.**Δίνονται τα διανύσματα  και  για τα οποία ισχύουν:  ,  ,  και  , όπου  .

**α)** Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  Μονάδες 3

**β)** Αν ισχύει  , τότε:

 **i)** να αποδείξετε ότι: κ = −2 Μονάδες 6

 **ii)** να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  Μονάδες 8

 **iii)** να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  και  είναι κάθετα. Μονάδες 8

 **4.18618. α)** Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: και  **.** Μονάδες 10

**β)** Δίνονται τα διανύσματα , για τα οποία ισχύουν:  και 

 **i)** Να αποδείξετε ότι: και  Μονάδες 8

 **ii)** Να αποδείξετε ότι:  Μονάδες 7

**Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα**

**2.20050**.Δίνονται τα διανύσματα  και .

**α)** Να βρεθεί η προβολή του  πάνω στο . Μονάδες 10

**β)** Να αναλύσετε το σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες. από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο . Μονάδες 15

**2.20052**.Δίνονται τα διανύσματα , με ,  και .

**α)** Να υπολογίσετε τα  και . Μονάδες 6

**β)** Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος . Μονάδες 9

**γ)** Να βρείτε την προβολή του  στο διάνυσμα . Μονάδες 10

**2.20069.** Δίνονται τα διανύσματα  και .

**α)** Να βρείτε τη προβολή του  πάνω στο . Μονάδες 10

**β)** Να αναλύσετε το  σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη

με το . Μονάδες 15

**2.20050.**Δίνονται τα διανύσματα και .

**α)** Να βρεθεί η προβολή του  πάνω στο . Μονάδες 10

**β)** Να αναλύσετε το σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο . Μονάδες 15

**Ευθεία**

**Εξίσωση ευθείας**

**2.18575.**Δίνονται τα σημεία Α(1,2) και Β (5,6 ) .

**α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και B . Μονάδες 10

**β)** Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος ε του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έχει εξίσωση την

  Μονάδες 15

**2.18600.**Θεωρούμε την ευθεία  που τέμνει τους άξονες χ′ χ και ψ′ ψ στα σημεία  αντίστοιχα.

**α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας . Μονάδες 8

**β)** Αν είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην,

 τότε να βρείτε:

 **i)** την εξίσωση της ευθείας . Μονάδες 9

 **ii)** τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών και . Μονάδες 8

**2.18601.**Έστω Μ (3, 5) το μέσο ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με Α(1,1) .

**α)** Να βρείτε:

 **i)** τις συντεταγμένες του σημείου Β . Μονάδες 6

 **ii)** την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β . Μονάδες 7

**β)** Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Κ του άξονα χ΄χ έτσι ώστε να ισχύει .

 Μονάδες 12

**2.18602.**Δίνεται η ευθεία (ε): και το σημείο .

**α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην (ε). Μονάδες 10

**β)** Να βρείτε την προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε). Μονάδες 15

**2.20060.**Δίνονται τα διανύσματα  και .

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος . Μονάδες 10

**β)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης 

και διέρχεται από το σημείο  . Μονάδες 15

**2.20063**.Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μέσο Μ και , .

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β . Μονάδες 10

**β)** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ε του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ,

καθώς και τα κοινά σημεία αυτής με τους άξονες x΄x και y΄y . Μονάδες 15

**2.20066**.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία  και .

**α)** Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ . Μονάδες 7

**β)** Να βρείτε τις εξισώσεις του ύψους ΒΔ και της διαμέσου ΑΜ. Μονάδες 18

**2.20068.**Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(−5,4) , Β(−1,6) , Γ(4,1) και σημείο Μ της πλευράς ΑΒ για το οποίο ισχύει .

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος . Μονάδες 6

**β)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ. Μονάδες 9

**γ)** Αν το σημείο Μ έχει συντεταγμένες , να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ, Μ. Μονάδες 10

**2.22517.**Θεωρούμε τα σημεία Α(6, μ) και Β(μ+2, μ+1), μ .

**α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε μ , τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα Α και Β. Μονάδες 15

**β)** Να βρείτε για ποια τιμή του μ , το σημείο Γ(4, 2) περιέχεται στην ευθεία ΑΒ. Μονάδες 10

**4.22563.** Θεωρούμε το σημείο Μ(-3, -2) και ευθεία που διέρχεται από το Μ και τέμνει τους αρνητικούς ημιάξονες στα σημεία Α, Β.

**α)** Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας είναι αρνητικός. Μονάδες 10

**β)** Έστω Ε(λ) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

**i.** Να αποδείξετε ότι για κάθε . Μονάδες 10

**ii.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει με τους ημιάξονες τρίγωνο με

ελάχιστο εμβαδόν. Μονάδες 5

**4.20147.**Δίνονται τα σημεία  και , .

**α)** Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ. Μονάδες 7

**β)** Αν το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ,να βρείτε την τιμή του λ. Μονάδες 8

**γ)** Για ,να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ να είναι ρόμβος. Μονάδες 10

**Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας**

**2.18584.**Δίνονται οι παράλληλες ευθείες ε1 : x – 2y − 8 = 0, ε2: 2x – 4y + 10 = 0 και το σημείο Α της ε1 που έχει τετμημένη το 4 .

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α . Μονάδες 5

**β)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη

 στην ευθεία ε1. Μονάδες 10

**γ)** Αν Β είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ε2 , τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του Β Μονάδες 10

**2.18587.**Δίνονται οι ευθείες  : και :οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ. Αν οι ευθείες  και  τέμνουν τον άξονα y΄y στα σημεία Α και B αντίστοιχα, τότε:

**α)** να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ, A και B. Μονάδες 10

**β)** αν Κ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ , να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του

 διανύσματος . Μονάδες 15

**2.18589.**Δίνονται οι ευθείες  και  οι οποίες τέμνονται στο σημείο .

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου και στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της

 ευθείας που διέρχεται από το  και είναι κάθετη στον άξονα . Μονάδες 10

**β)** Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το  και έχουν συντελεστή διεύθυνσης

  έχουν εξίσωση την: , όπου . Μονάδες 15

**2. 18592.**Δίνονται οι ευθείες  και 

**α)** Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  και  είναι κάθετες μεταξύ τους. Μονάδες 9

**β)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής  των ευθειών  και  Μονάδες 9

**γ)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  και την αρχή  των

 αξόνων. Μονάδες 7

**2.18595.**Δίνονται οι ευθείες  και 

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής  των ευθειών  και  Μονάδες 8

**β)** Αν η ευθεία  τέμνει τον άξονα  στο σημείο  και η ευθεία  τέμνει τον άξονα

 στο σημείο , τότε:

 **i)** να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων και  Μονάδες 8 **ii)** να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία και  έχει εξίσωση την

  Μονάδες 9

**2.20065**.Δίνεται η ευθεία ε : x + y + 2 = 0 και το σημείο Α(5,1) .

**α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας , η οποία διέρχεται από το Α και είναι κάθετη προς

την ευθεία ε . Μονάδες 9

**β)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας , η οποία διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη

προς τον άξονα x΄x . Μονάδες 7

**γ)** Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών και και την απόστασή του από την αρχή των αξόνων. Μονάδες 9

**2.20072**.Θεωρούμε μια ευθεία (ε) και ένα σημείο εκτός της (ε). Έστω  η προβολή του Α στην (ε). Να βρείτε:

**α)** Την εξίσωση της ευθείας (ε). Μονάδες 13

**β)** Το συμμετρικό του Α ως προς την (ε). Μονάδες 12

**2.22520.**Έστω Α(-1, 1), Β (2, 0) και Γ(-1, 3) τρία σημεία του επιπέδου.

**α)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y) ώστε:

 είναι η ευθεία ε: 5x-3y+1=0. Μονάδες 15

**β)** Να βρείτε ευθεία κάθετη στην (ε) που διέρχεται από το μέσο Κ του τμήματος ΑΓ.

 Μονάδες 10

**2.22531.**Θεωρούμε την εξίσωση , λ , (1)

**α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε λ , παριστάνει ευθεία. Μονάδες 10

**β)** Αν (ε1), (ε2) είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για λ=1, λ=2 αντίστοιχα,

να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν. Μονάδες 15

**2.22525.** Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι πλευρές του ΑΒ και ΑΔ βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις ε1: και ε2: αντίστοιχα. Αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ(-1, -2), τότε:

**α)** να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α και να αποδείξετε ότι Γ(0, -6). Μονάδες 12

**β)** να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΓΔ και τις συντεταγμένες της κορυφής Δ. Μονάδες 13

**4.22562.**Θεωρούμε τα σημεία .

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ. Μονάδες 5

**β)** Να δείξετε ότι το Μ κινείται σε ευθεία την οποία να προσδιορίσετε. Μονάδες 10

**γ)** Αν (ΑΒ)=d, να αποδείξετε ότι και κατόπιν να βρείτε τα Α, Β ώστε η απόσταση

(ΑΒ) να είναι ελάχιστη. Μονάδες 10

**4.22564.**Θεωρούμε τις εξισώσεις .

**α)** Να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις (ελ) παριστάνει ευθεία και κατόπιν ότι όλες οι

ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο. Μονάδες 10

**β)** Έστω και . Αν η (ελ) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α(α, 0) και

Β(0, β) αντίστοιχα, τότε:

**i.** να εκφράσετε τα α, β συναρτήσει του λ. Μονάδες 5

**ii.** να βρείτε την ευθεία της παραπάνω μορφής ώστε να ισχύει . Μονάδες 10

**4.22565.** Δίνεται η εξίσωση .

**α)** Να αποδείξετε ότι παριστάνει δυο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους. Μονάδες 8

Έστω και οι δυο ευθείες.

**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζεται από τους άξονες και

τις ευθείες. Μονάδες 7

**γ)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή Ο και τέμνει τις ε1

και ε2 στα σημεία Α, Β ώστε (ΑΒ)=2. Μονάδες 10

**Απόσταση σημείου από ευθεία - Εμβαδόν τριγώνου**

**2.18620.**Δίνονται οι ευθείες  ,  με  και το σημείο .

**α)** Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του  οι ευθείες τέμνονται. Μονάδες 7

**β)** Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο , να βρείτε την τιμή του . Μονάδες 10

**γ)** Έστω και  τα σημεία που οι  και  τέμνουν τον άξονα .Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου . Μονάδες 8

**2.20062.**Δίνονται τα σημεία Α(1, −2) και Β(2, 3).

**α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α, Β .

 Μονάδες 11

**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων και Κ, Λ είναι τα σημεία τομής της ε με τους άξονες xx΄ και yy΄ αντίστοιχα. Μονάδες 14

**2.20067**.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(3,2) , Β(−3,1) και Γ(4,0) .

**α)** Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΒ. Μονάδες 9

**β)** Να υπολογίσετε το ύψος ΓΔ καθώς και την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία

βρίσκεται αυτό. Μονάδες 16

**2.22506**. Θεωρούμε τα σημεία  και , όπου  και .

**α)** Να αποδείξετε ότι ΑΒ: . Μονάδες 7

**β)** Αν ε είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο και είναι κάθετη προς

την ευθεία ΑΒ , τότε:

**i)** να βρείτε την εξίσωση της ε. Μονάδες 9

**ii)** αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Κ και τον άξονα y΄y στο σημείο Λ , να αποδείξετε ότι ,όπου O είναι η αρχή των αξόνων. Μονάδες 9

**2.22521.** Θεωρούμε τα σημεία Α(λ+1, 2λ), Β(2-λ, 4) και Γ(-1, 2), λ.

**α)** Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ, τα σημεία σχηματίζουν τρίγωνο. Μονάδες 10

**β)** Έστω ότι για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει (ΑΒΓ)=3.

 **i.** Να αποδείξετε ότι λ=1 ή λ=2. Μονάδες 10

 **ii.** Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων  όταν λ=1. Μονάδες 5

 **2.22522.** Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε την ευθεία ε :  και τα σημεία Α(2, 0) και B(6, - 3) .

**α)** Να προσδιορίσετε σημείο Γ της ευθείας ε ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ. Μονάδες 15

**β)** Έστω Γ(1, 12) . Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 10

**2.22523.** Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνω Οxy θεωρούμε την ευθεία ε: , όπου κ θετικός ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας.

**α)** Να βρείτε με τη βοήθεια του κ, τα σημεία τομής Α, Β της ευθείας με τους άξονες x΄x, y΄y και το εμβαδόν του τριγώνου OAB. Μονάδες 13

**β)** Αν ισχύει (OAB) < 2 να αποδείξετε ότι κ=2. Μονάδες 12

**2.22529.**Θεωρούμε την ευθεία ε: και το σημείο Α(-2, 1).

**α)** Να αποδείξετε ότι το Α δεν ανήκει στην (ε) και να βρείτε την απόστασή του από αυτή.

 Μονάδες 10

**β)** Να βρείτε όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες στην (ε) και απέχουν από το Α απόσταση ίση με 3 μονάδες. Μονάδες 15

**2.22532.**Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο οποίο απεικονίζεται ο χάρτης του νομού Αρκαδίας. Τα χωριά Δόξα (Δ), Λευκοχώρι (Λ) και Κακουρέϊκα (Κ) έχουν αντίστοιχες συντεταγμένες Δ(-2, 2), Λ(2, -1) και Κ(-1, -10).

**α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα χωριά Δόξα (Δ) και Λευκοχώρι (Λ). Μονάδες 8

**β)** Να βρείτε την απόσταση του Κ από την ευθεία (ε). Μονάδες 8

**γ)** Να εξετάσετε, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, ποιο από τα χωριά Δόξα και Λευκοχώρι απέχει τη μικρότερη απόσταση από τα Κακουρέϊκα. Μονάδες 9

**2.22537.**  Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τα σημεία Α(λ-1, λ+2) και

Β(μ+3, μ), λ, μ.

**α)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β κινούνται στις ευθείες  και αντίστοιχα. Μονάδες 12

**β)** Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών ε1, ε2. Μονάδες 13

**2.22538.**Δίνονται τα σημεία Α(0,2), Β(1,5) και Γ(t–1, 3t–2), t.

**α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ. Μονάδες 7

**β)** Να δείξετε ότι η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ΑB καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ανεξάρτητα του t. Μονάδες 18

**4.22568.**Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τα σημεία Μ(x, y), Α(-1, 3) και

Β(2, -1)ώστε να σχηματίζουν τρίγωνο με εμβαδόν (ΜΑΒ)=4.

**α)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι δυο ευθείες ε1, ε2 παράλληλες

μεταξύ τους. Μονάδες 8

**β)** Να βρείτε την απόσταση των ε1, ε2. Μονάδες 5

**γ)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα Α, Β είναι η μεσοπαράλληλη των

ε1, ε2. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό; Μονάδες 12

**4.22571.**Δίνονται τα σημεία Α(1, 2), Β(-3, 4) και Γ(2λ+1, 1-λ), λ.

**α)** Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο

και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερό. Μονάδες 12

**β)** Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ κινείται σε ευθεία παράλληλη στην ΑΒ. Μονάδες 6

**γ)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με

υποτείνουσα την ΒΓ. Μονάδες 7

**4.22577.** Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τις ευθείες

.

**α)** Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο Μ. Μονάδες 7

**β)** Να αποδείξετε ότι  Μονάδες 8

**γ)** Να βρείτε ποια από τις ευθείες της παραπάνω μορφής απέχει την μέγιστη απόσταση

από το Ο. Μονάδες 10

**4.22588.** Θεωρούμε τα σημεία Α(2, 2), Β(-1, 0) και Γ(0, 2).

**α)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y) ώστε

είναι η ευθεία ε:. Μονάδες 10

**β)** Να βρείτε:

**i.** Σημείο Κ στον άξονα x΄x ώστε το συμμετρικό του ως προς την ευθεία του ερωτήματος α) να είναι σημείο Λ του άξονα y΄y. Μονάδες 10

**ii.** Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΣ όπου Σ είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον

άξονα y΄y. Μονάδες 5

**4.18609.**Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι , , όπου λ ≠ 0 και λ ≠ −2 , και Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ

**α)** Να αποδείξετε ότι . Μονάδες 7

**β)** Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα AΜ είναι κάθετο στο διάνυσμα

 . Μονάδες 8

**γ)** Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του

 τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 10

**4.18610.** Δίνονται οι ευθείες ε1 :  και ε2 :  , όπου 

**α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε1 και ε2

 τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους M. Μονάδες 7

**β)** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο M ανήκει στην

 ευθεία ε : 8x + y − 6 = 0 Μονάδες 7

**γ)** Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες χ΄χ και ψ′ψ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα,

 τότε:

 **i)** να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων

 και να αποδείξετε ότι είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ. Μονάδες 5

 **ii)** αν Κ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ, να αποδείξετε ότι .

 Μονάδες 6

**4.18611.**Δίνεται η ευθεία ε :  και τα σημεία Α( −2,4 ) και B (2,6)

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου M της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα

 σημεία A και B Μονάδες 7

**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ Μονάδες 8

**γ)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ ( x ,y) για τα οποία ισχύει (ΚΑΒ) = (ΜΑΒ) ανήκουν στις

 ευθείες με εξισώσεις τις:  και Μονάδες 10

**4.18612.**Δίνεται η εξίσωση: 

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε1 και ε2

 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους. Μονάδες 7

**β)** Αν  και , να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των

 ε1 και ε2 Μονάδες 8

**γ)** Αν Α είναι σημείο της ευθείας ε1 με τεταγμένη το 2 και Β σημείο της ευθείας ε2

 με τετμημένη το 1 , τότε:

 **i)** να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και Β Μονάδες 2

 **ii)** να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το

 τετράπλευρο ΑΓΒΔ να είναι τετράγωνο. Μονάδες 8

**4.18613.** Δίνεται η εξίσωση , με λ διαφορετικό του 0.

**α)** Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες

 μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1. Μονάδες 12

**β)** Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του

 ερωτήματος α) είναι ίσο με 2 , να βρείτε την τιμή του λ. Μονάδες 13

**4.18614.**Δίνονται οι ευθείες  και 

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε1 και ε2. Μονάδες 5

**β)** Αν η ευθεία ε1 τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο Β και η ευθεία ε2 τέμνει τον άξονα χ′χ

 στο σημείο Γ , τότε:

 **i)** να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ. Μονάδες 5

 **ii)** να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 5

**γ)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ ( χ ,ψ) για τα οποία ισχύει (ΚΒΓ ) = ( ΑΒΓ ) ανήκουν

 σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις. Μονάδες 10

**4.18615.**Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που είναι παράλληλο προς την ευθεία ε : y = x ,

με Α(x1 ,y1 ) , Β ( x2 ,y2 ) και x1 < x2.

Αν το σημείο Μ (3, 5) είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και το γινόμενο

των τετμημένων των σημείων Α και Β ισούται με 5, τότε:

**α)** να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β . Μονάδες 13

**β)** να αποδείξετε ότι (ΟΑΒ) = 4 , όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων. Μονάδες 5

**γ)** να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ ( x ,y) για τα οποία ισχύει (ΚΑΒ) = 2 (ΟΑΒ) ανήκουν στις

 ευθείες με εξισώσεις τις :  και  Μονάδες 7

**4.18617.**Δίνονται τα διανύσματα  και  με μέτρα 2 , 6 αντίστοιχα και φ∈ [0,π] η μεταξύ τους γωνία. Επίσης δίνεται η εξίσωση 

**α)** Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε φ∈ [0,π]. Μονάδες 3

**β)** Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα y΄y, να αποδείξετε ότι .

 Μονάδες 7

**γ)** Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ, να αποδείξετε ότι .

 Μονάδες 7

**δ)** Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των

 αξόνων, να αποδείξετε ότι  Μονάδες 8

**4.18621 .**Δίνονται οι ευθείες  και , όπου 

**α)** Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες. Μονάδες 10

**β)** Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες  και . Μονάδες 15

**4.18622.** Δίνονται τα σημεία , Β(2, - 1) και , όπου μ.

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  και  Μονάδες 8

**β)** Να αποδείξετε ότι για κάθε μ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα

 σημεία Α και Β. Μονάδες 8

**γ)** Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε . Μονάδες 6

**δ)** Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι (ΟΒΓ ) =1, όπου O είναι

 η αρχή των αξόνων. Μονάδες 3

**4. 18623.** Δίνονται τα σημεία Α(3,4) , B(5,7) και Γ (2μ +1,3μ −2) , όπου μ.

**α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  και  και , στη συνέχεια, να

 αποδείξετε ότι τα σημεία Α , B και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ.

 Μονάδες 8

**β)** Να αποδείξετε ότι:

 i) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δεν εξαρτάται από το μ. Μονάδες 5

 ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

 Μονάδες 7

**γ)** Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ παραμένει σταθερό,

 ανεξάρτητα από την τιμή του μ; Μονάδες 5

**Κύκλος**

**2.22507.**Δίνεται η εξίσωση :  (1)

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο 

και ακτίνα ρ = 3. Μονάδες 12

**β)** Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του παραπάνω κύκλου. Μονάδες 13

**2.22508.**Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο που διέρχεται από το σημείο και έχει κέντρο το .

**α)** Να αποδείξετε ότι ,και έπειτα να βρείτε την εξίσωση της

ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία O και K . Μονάδες 13

**β)** Από τα σημεία του κύκλου C να βρείτε τις συντεταγμένες:

**i)** του σημείου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. Μονάδες 6

**ii)** του σημείου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. Μονάδες 6

**2.22533.** Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία Α(x, y), B(3, 2) και Γ(1, 0) . Αν τα σημεία αυτά σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη ΒΓ, τότε:

**α)** Να αποδείξετε ότι το Α κινείται στον κύκλο . Μονάδες 13

**β)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του Α, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι και ισοσκελές.

 Μονάδες 12

**2.22534.**Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία K(2, - 1) και A(-6, 5) .

**α)** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο Κ που διέρχεται από το Α, έχει εξίσωση

  Μονάδες 12

**β)** Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο C στο σημείο Α και έχει ακτίνα ίση με το μισό της ακτίνας του C. Μονάδες 13

**2.22536**

 Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία A(1, 0), B(3, - 2) και την ευθεία

ε : .Nα βρείτε:

**α)** Την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος ΑΒ. Μονάδες 10

**β)** Την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και έχει το κέντρο του στην ευθεία ε. Μονάδες 15

**4.22557.**Έστω η εξίσωση:  όπου .

**α)** Τι παριστάνει γεωμετρικά σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy η εξίσωση (1) όταν λ = 2

και τι όταν λ = 6 ; Μονάδες 8

**β)** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ από το διάστημα (2,6) η εξίσωση (1) στο

καρτεσιανό επίπεδο Oxy παριστάνει κύκλο. Μονάδες 8

**γ)** Καθώς το λ μεταβάλλεται στο διάστημα (2,6) , να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων οι οποίοι προκύπτουν από την εξίσωση (1) ανήκουν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα από το οποίο εξαιρούνται τα άκρα του. Μονάδες 9

**4.22558.**Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τον κύκλο και μία τυχούσα διάμετρό του AB με και .

**α)** Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει  και ; Μονάδες 5

**β)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων N(κ,λ) για τα οποία ισχύει  είναι ο κύκλος . Μονάδες 12

**γ)** Στο καρτεσιανό επίπεδο να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων M( x,y) για τα

οποία ισχύει: . Μονάδες 8

**4.22581.**Δίνεται η εξίσωση . Να αποδείξετε ότι:

**α)** Η εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

 Μονάδες 8

**β)** Ο κύκλος C εφάπτεται στον άξονα x΄x και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους.

 Μονάδες 7

**γ)** Το σημείο M(2, - 1) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία Α, Β ώστε η χορδή AB του κύκλου να έχει μέσο το Μ. Μονάδες 10

**4.22584.**Δίνονται οι εξισώσεις (1) και (2) λ.

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με κέντρο την αρχή των αξόνων και

ακτίνα ρ=1. Μονάδες 8

**β)** Να αποδείξετε ότι, για κάθε λ η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία. Κατόπιν να

αποδείξετε ότι οι ευθείες που προκύπτουν από την (2) για τις διάφορες τιμές του λ

διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε. Μονάδες 10

**γ)** Έστω Α και Β τα σημεία τομής του κύκλου C με τους θετικούς ημιάξονες Ox και

Oy αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, ώστε η ευθεία ΑΒ να προκύπτει από

την εξίσωση (2). Μονάδες 7

**4.22586.**Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε την εξίσωση 

**α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε α, η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Κατόπιν, να βρείτε για

ποιες τιμές του α, ο κύκλος διέρχεται από την αρχή Ο. Μονάδες 10

**β)** Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση όταν α = 2 και y = λx, λ μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο C σε σημείο Α διαφορετικό από το Ο.

**i.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του Α συναρτήσει του λ. Μονάδες 10

**ii.** Να αποδείξετε ότι το μέσο Μ του τμήματος ΟΑ κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας ο

οποίος διέρχεται από το Ο. Μονάδες 5

**4.22587.**Σε καρτεσιανό σύστημα Οxy , θεωρούμε τα σημεία Μ(x, y) , A(-25, 0) και B(-1, 0) για τα

οποία ισχύει .

**α)** Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο . Μονάδες 10

**β)** Θεωρούμε το σημείο Σ(7, 1) .

**i.** Να εξετάσετε αν το σημείο Σ βρίσκεται στο εσωτερικό ή το εξωτερικό του κύκλου C .

 Μονάδες 5

**ii.** Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες, από το σημείο Σ προς τον κύκλο, είναι μεταξύ

τους κάθετες. Μονάδες 10

**4.22589.**Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία M(x, y) , A(-2, 0) και B(2, 0) ώστε να ισχύει 

**α)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι ο κύκλος  Μονάδες 10

**β)** Έστω Γ, Δ σημεία του κύκλου C ώστε 

**i.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ και η αρχή των αξόνων Ο, είναι συνευθειακά.

 Μονάδες 10

**ii.** Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  όταν το Μ κινείται στον

κύκλο. Μονάδες 5

**4.22590.** Δίνεται η εξίσωση .

**α)** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ, με , παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση, όταν λ = 5 . Μονάδες 12

**β)** Έστω οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση όταν λ = 3 και λ = 9 αντίστοιχα.

 **i.** Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι  και εφάπτονται εξωτερικά. Μονάδες 6

 **ii.** Να βρείτε το σημείο επαφής των κύκλων. Μονάδες 7

**Παραβολή**

**2.22511.**Θεωρούμε την παραβολή και την κατακόρυφη ευθεία ε: , όπου *p*

είναι η παράμετρος της παραβολής *C* .

**α)** Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής. Μονάδες 10

**β)** Αν η ευθεία *ε* τέμνει την παραβολή *C* στα σημεία της *Β* και *Γ* , τότε:

**i)** να βρείτε τις συντεταγμένες των *Β* και *Γ* , καθώς και τις εξισώσεις των εφαπτομένων και της παραβολής *C* στα σημεία της αυτά αντίστοιχα. Μονάδες 10

**ii)** να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των και ανήκει στη διευθετούσα της *C* .

 Μονάδες 5

**2.22512.**Δίνεται η εξίσωση:  (1)

**α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές και 

και να βρείτε για καθεμιά από αυτές την εστία και τη διευθετούσα της. Μονάδες 13

**β)** Αν  και είναι οι εστίες των παραβολών  και αντίστοιχα, να βρείτε την

εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα. Μονάδες 12



**2.22514**.Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται οι παραβολές και οι οποίες έχουν εστίες τα σημεία  και αντίστοιχα.

Η απόσταση των σημείων  και είναι ίση με 4 μονάδες.

**α)** Να βρείτε την εστία, τη διευθετούσα και την εξίσωση καθεμιάς από τις παραβολές  και . Μονάδες 15

**β)** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα .

 Μονάδες 10

**4.22559.**Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο  ο οποίος έχει το κέντρο του στην

ευθεία ε : x − y −1 = 0.Έστω επίσης A(5,3) και B(1,5) δύο σημεία του κύκλου .

**α)** Να αποδείξετε ότι . Μονάδες 9

**β)** Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής  που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων

και εστία το κέντρο του κύκλου . Μονάδες 7

**γ)** Αν M1 και M2 είναι τα σημεία τομής των και , τότε:

**i)** να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε1 και ε2 της παραβολής στα σημεία αυτά.

 Μονάδες 5

**ii)** να αποδείξετε ότι οι ε1 και ε2 τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο . Μονάδες 4

**4.22560.**Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από τα σημεία A(0,2) , B(−2,4) και Γ (0,6) .

**α)** Να αποδείξετε ότι  Μονάδες 10

**β)** Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου C . Μονάδες 9

**γ)** Αν M1 και M2είναι τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες του

ερωτήματος β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των

αξόνων και διέρχεται από τα σημεία M1 και M2. Μονάδες 6

**4.22579.**Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία A(-2, - 2) , B(0, - 4) , την παραβολή και έστω Μ(x, y) τυχαίο σημείο της παραβολής.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i. ** **ii. ** Μονάδες 10

**β)** Να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ ώστε το εμβαδόν (MAB) του τριγώνου ΜΑΒ να γίνεται ελάχιστο. Μονάδες 5

**γ)** Έστω ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν Μ(1, -2). Να εξετάσετε αν η

εφαπτομένη της παραβολής στο Μ είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΜΑΒ.

 Μονάδες 10

**Έλλειψη**

**2.22509.**Δίνονται οι ελλείψεις  και 

**α)** Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις  και έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Μονάδες 12

**β)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων  και ανήκουν στον κύκλο

 Μονάδες 13

**2.22510.**Δίνονται ο κύκλος ,η έλλειψη και η κατακόρυφη ευθεία ε: . Αν Γ και Δ είναι τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου στα οποία η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο  και την έλλειψη  αντίστοιχα, τότε:

**α)** να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ . Μονάδες 11

**β)** να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου στο σημείο του Γ και της έλλειψης στο σημείο της Δ , καθώς και το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών.

 Μονάδες 14

**2.22516.**Θεωρούμε την έλλειψη με εστίες τα σημεία  και μεγάλο άξονα μήκους 6 μονάδων.

**α)** Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης. Μονάδες 10

**β)** Αν είναι σημείο της έλλειψης για το οποίο ισχύει , τότε:

**i)** να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων και ME΄ και ME. Μονάδες 9

**ii)** να αποδείξετε ότι η γωνία Ε΄ΜΕ είναι ορθή. Μονάδες 6

**4.22592.**Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία M( x,y) για τα οποία ισχύει η ισότητα ,όπου A(−3,0) και B(3,0) .

**α)** Να αποδείξετε ότι τα σημεία M ανήκουν στον κύκλο . Μονάδες 11

**β)** Αν Γ και Δ είναι τα σημεία τομής του κύκλου  με τον άξονα x x΄, τότε:

**i)** να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης  η οποία έχει μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο

τμήμα ΓΔ και εστίες τα σημεία A και B . Μονάδες 10

**ii)** να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο  και την έλλειψη . Μονάδες 4

**Υπερβολή**

**2.22515.** Μια έλλειψη  έχει εκκεντρότητα ίση με και τις ίδιες εστίες με την υπερβολή

.

**α)** Να αποδείξετε ότι  Μονάδες 15

**β)** Να παραστήσετε γραφικά την έλλειψη  και την υπερβολή  σε καρτεσιανό

επίπεδο Oxy. Μονάδες 10

**4.22591.α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής που τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία

Α΄(-2, 0) , Α(2, 0) και διέρχεται από το σημείο  είναι η.

 Μονάδες 10

**β)** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου  με διάμετρο το τμήμα Α΄Α. Μονάδες 5

**γ)** Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές κοινές εφαπτόμενες της υπερβολής και του κύκλου

 είναι οι ευθείες ε1 : x = -2 και ε2: x = 2 . Μονάδες 10