

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

§ 1.1 Η έννοια του διανύσματος.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και O το κέντρο του. Να βρεθούν:
 - i. ζεύγη ίσων διανυσμάτων.
 - ii. ζεύγη αντίθετων διανυσμάτων.
2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω M το μέσο του $A\Gamma$. Με αρχή το M γράφουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BM}$. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{B\Gamma}$.
3. Έστω M το μέσο της πλευράς AB ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Με αρχή το M γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{ME} = -\overrightarrow{A\Gamma}$. Να δείξετε ότι το A είναι μέσον του ΔE .
4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Με αρχή το σημείο Γ γράφουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{B\Gamma}$. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta E}$.
5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E τέτοια ώστε $\overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{B A}$. Να αποδείξετε ότι το A είναι το μέσο του ΔE .
6. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ αν γνωρίζουμε ότι $|\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\alpha}| + 6$.
7. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω $A\Delta$ το ύψος του. Να βρεθούν οι γωνίες των διανυσμάτων:
 - i. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma})$
 - ii. $(\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{B\Delta})$
 - iii. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta})$

§ 1.2 Πρόσθεση και Αφαίρεση διανυσμάτων.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ. Να δείξετε ότι:
 - $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{A\Delta} = \vec{0}$
 - $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{A\Gamma}$
 - Αν ισχύει ότι $\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{B\Gamma}$ τότε το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
- Να αποδειχθεί ότι για έξι τυχαία σημεία A, B, Γ, Δ, E, Z ισχύει ότι $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{\Gamma Z} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.
- Αν για τα σημεία A, B, Γ, Δ, E ισχύει ότι $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{E\Gamma}$ τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, E συμπίπτουν.
- Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ, E. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Delta E} - \overrightarrow{BA}$.
- Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ και ένα σημείο M για το οποίο ισχύει ότι: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
- Έστω το ABΓΔ και M το μέσο του ΑΓ. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.
- Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Να δείξετε ότι ισχύει:
 - $\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Delta B}$.
 - $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$
 - $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma A} = \vec{0}$.

8. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

i. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο και $|\vec{\beta}| = 2$, να δείξετε ότι

$$1 \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq 3.$$

ii. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $|\vec{\gamma}| = 5$, να δείξετε ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \vec{\gamma}| \leq 10$.

9. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

i. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 6$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 9$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$.

ii. Αν $|\vec{\alpha}| = 2 + |\vec{\beta}|$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq 2$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

10. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{5} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = |\vec{\gamma}|$ να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} \uparrow \uparrow \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$.

§ 1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και το σημείο M στην προέκταση του BΓ τέτοιο ώστε:

$$\frac{BM}{MG} = \frac{3}{2}. \text{ Να γράψετε το διάνυσμα } \overrightarrow{AM} \text{ ως γραμμικό συνδυασμό των} \\ \text{διανυσμάτων } \overrightarrow{AB} \text{ και } \overrightarrow{AG}.$$

2. Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{x}$ αν:

$$\text{i. } 2(\vec{x} + 3\vec{\alpha}) - 2(\vec{\beta} - 2\vec{x}) = 3(2\vec{\beta} + \vec{\alpha})$$

$$\text{ii. } 2(\vec{x} - \vec{\alpha}) + \frac{1}{2}\vec{\beta} = \frac{2}{3}(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$$

3. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει ότι: $\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} = |\vec{\beta}| \cdot \vec{\alpha}$ να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

4. Αν ισχύει $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NG}$, να δείξετε ότι τα σημεία M, N ταυτίζονται.

5. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να δείξετε ότι, για οποιοδήποτε σημείο M το διάνυσμα $\vec{v} = 7\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MG}$ είναι σταθερό.

6. Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να βρείτε σημείο M, τέτοιο, ώστε $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} = \vec{0}$.

7. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \frac{4}{3}\vec{\gamma}$ και $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{\alpha} - \frac{3}{4}\vec{\beta} + \vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.

8. Αν ισχύει $2\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{GB}$, να δείξετε ότι: $\overrightarrow{BG} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AL}$.

9. Αν ισχύουν ότι $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AL}$ και $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + 4\overrightarrow{AL}$, να δείξετε ότι $\overrightarrow{BG} \uparrow \downarrow \overrightarrow{LE}$.

10. Αν το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι μοναδιαίο και $\vec{\alpha} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$, $\vec{\beta} = 5\vec{v} - 2\vec{u}$ να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του $\vec{v}$ και να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.
11. Αν για τα σημεία O, A, B, Γ ισχύει ότι: $\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG} = \vec{0}$,
 i. να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά,
 ii. να βρείτε την σχετική θέση των σημείων A, B, Γ.
12. Αν για τα σημεία A, B, Γ, Δ, E του επιπέδου ισχύει ότι $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BZ} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AE}$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.
13. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ και E, Z σημεία τέτοια ώστε:
 $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AG}$.
 i. Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{ZB}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AD}$.
 ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Z και E είναι συνευθειακά.
14. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και τυχαίο σημείο O. Αν $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{OG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma}$ τότε
 i. να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$,
 ii. να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
15. Σε παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$. Θεωρούμε σημεία E, Z στην AD και τη διαγώνιο AG αντίστοιχα, ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AG}$. Να αποδείξετε ότι:
 i. $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.
 ii. $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4}\left(\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}\right)$ και να υπολογίσετε με την βοήθεια των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ το $\overrightarrow{EB}$.
 iii. τα σημεία E, Z, B είναι συνευθειακά.

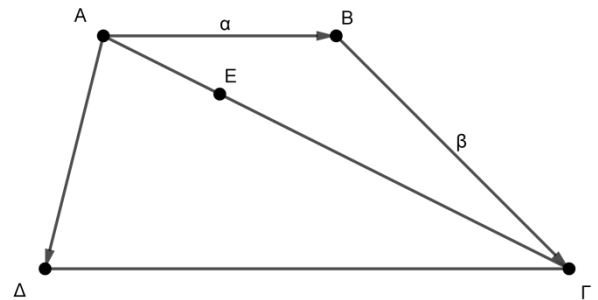
16. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο. Αν $\Gamma\Delta=3AB$, $E\Gamma=3EA$, $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$,

i. να εκφράσετε συναρτήσει των

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τα διανύσματα

$\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{B\Delta}$

ii. να δείξετε ότι τα σημεία B, Δ, E είναι συνευθειακά.



17. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και K, Λ τα μέσα των πλευρών του $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν το σημείο O είναι μέσον του $K\Lambda$, να δείξετε ότι:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = 4\overrightarrow{MO}.$$

18. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και έστω M, N τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} + 2\overrightarrow{NM} = \vec{0}$.

19. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $5\overrightarrow{A\Delta} - 3\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{EM}$ και η διάμεσος AM . Να αποδείξετε ότι

i. $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AM}$

ii. τα σημεία B, Δ, E είναι συνευθειακά.

20. Αν τα σημεία B, Γ δεν συμπίπτουν και ισχύει $\overrightarrow{A\Delta} = 3\overrightarrow{B\Gamma}$, να βρείτε την τιμή του x , ώστε $\overrightarrow{A\Gamma} + x\overrightarrow{B\Delta} = (x-1)\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

21. Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά. Να βρείτε την τιμή του μ , αν τα διανύσματα $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + (\mu+1)\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \mu\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

22. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{M\Gamma}$,

i. να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma}}{3}$

ii. Να βρείτε τα λ, μ ώστε $\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{A\Gamma} = 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{B\Gamma}$.

23. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD}|$$

24. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD}| > |\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{GB}|$$

25. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AD}| = 3$$

26. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν το διάνυσμα $\overrightarrow{BG}$ είναι μοναδιαίο, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$|\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM}| + |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{GB}| = 1$$

27. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GD}| - |\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}|$$

§ 1.4 Συντεταγμένες στο επίπεδο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

- Ποια η θέση στο καρτεσιανό επίπεδο των σημείων $M(x, y)$, για τα οποία ισχύει:
 - $|x| = 3$
 - $|y| \leq 3$
 - $|x| \leq 2$ και $|y| \geq 3$
 - $x = 3$ και $0 \leq y < 2$
 - $x = y$ και $y > 0$
- Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες $x'x$ και $y'y$: $A(2, -3)$ και $B(\alpha - 2, 3 - \alpha)$ με $\alpha < 2$.
- Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων:
 - $\vec{\alpha} = 2\vec{i} - \vec{j}$
 - $\vec{\beta} = -3\vec{i}$
 - $\vec{\gamma} = 5\vec{j}$
- Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$, $B(-4, 1)$, $\Gamma(1, -2)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων:
 - $\vec{AB}$ και $\vec{BA}$
 - $\vec{v} = \vec{AB} - 2\vec{\Gamma B}$
 - $\vec{w} = -2\vec{AB} + 2\vec{\Gamma B}$
 - $\vec{u} = \vec{AB} - \vec{\Gamma B}$
 - $\vec{\alpha} = 4\vec{u} - 2\left(3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\right) - \vec{w}$
- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (4, -3)$. Να βρείτε τα διανύσματα:
 - $\vec{\gamma}$ όταν $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - (3\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}) + 2\vec{\beta}$
 - $\vec{\delta}$ όταν $\vec{\delta} = 2(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) - 3\left(\frac{1}{3}\vec{\beta} - \frac{2}{6}\vec{\alpha}\right)$
 - $\vec{x}$ όταν $2(\vec{\alpha} - 2\vec{x}) = 3\vec{x} - 2(\vec{x} + 2\vec{\beta} - 3\vec{\alpha})$

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2x - 3, y + 1)$ και $\vec{\beta} = (4x + 1, 2y - 3)$.
Να βρείτε τα x, y έτσι ώστε:
- Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι ίσα
 - Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι αντίθετα.
 - Το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα.
7. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (2\lambda - 4, \lambda^2 - 4)$. Για ποια τιμή του λ είναι:
- $\vec{\alpha} = \vec{0}$
 - $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} // x'x$
8. Έστω $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = -3\vec{j}$ και τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ για τα οποία ισχύει:
- $$\begin{cases} \vec{v} - 2\vec{u} = \vec{\alpha} \\ \vec{v} + \vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \end{cases}$$
- Να βρείτε τα $\vec{v}$ και $\vec{u}$.
 - Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (-2, 11)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{v}$ και $\vec{u}$.
9. Δίνεται το σημείο $A(2, 3)$. Να βρείτε:
- τις συντεταγμένες του σημείου B , όταν $\overrightarrow{AB} = (-3, 1)$
 - τις συντεταγμένες του σημείου Γ , όταν $\overrightarrow{A\Gamma} - 2\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 2\overrightarrow{\Delta A}$ και $\Delta(2, -1)$.
10. Δίνεται το σημείο $A(1, 2)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου του σημείου A :
- ως προς τον άξονα $x'x$
 - ως προς τον άξονα $y'y$
 - ως προς το σημείο $B(-2, 0)$
11. Δίνεται κύκλος με κέντρο $K(5, -4)$. Να βρείτε το αντιδιαμετρικό σημείο B του σημείου του $A(-3, 2)$.

- 12.** Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(-1,2)$, $\Gamma(-4,3)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Δ έτσι ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.
- 13.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω $K(-2,-2)$, $\Lambda(-1,0)$, $M(2,-1)$ τα μέσα των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών A , B και Γ του τριγώνου.
- 14.** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A(1,2)$ και $B(-1,0)$. Αν $K(0,3)$ είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου να βρείτε τα σημεία Γ και Δ .
- 15.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(2,3)$, $B(2,6)$, $\Gamma(6,3)$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
- 16.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(0,4)$, $B(\kappa,0)$, $\Gamma(\kappa-6,0)$. Να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το τρίγωνο να είναι ισοσκελές.
- 17.** Δίνεται τρίγωνο OAB με κορυφές $O(0,0)$, $A(2,4)$ και $B(4,2)$.
 i. Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές.
 ii. Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζουν επίσης ισοσκελές τρίγωνο.
- 18.** Δίνονται τα σημεία $A(3,5)$ και $B(0,1)$. Να βρείτε σημείο Γ του άξονα $x'x$, έτσι ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$.
- 19.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,1)$ και $\vec{\beta} = (4,-3)$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω:
 i. $|\vec{\alpha}|$
 ii. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$
 iii. $|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|$
- 20.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (-1,0)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma}$ αν ισχύει ότι: $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + |\vec{\gamma}|\vec{\beta}$.

21. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (4,1)$ και $\vec{\beta} = (0,2)$. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση $|\vec{\alpha} + x\vec{\beta}| = 5$.

22. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,2)$, $B(\kappa,0)$, $\Gamma(0,-\kappa)$. Να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $|\vec{AB} + 2\vec{B\Gamma}| = |\vec{A\Gamma}|$.

- i. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.
- ii. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

23. Δίνονται τα σημεία $A(-1,2)$, $B(1,-2)$ και $\Gamma(2,3)$. Να βρείτε σημείο M του άξονα $y'y$, ώστε η παράσταση $|\vec{MB} - 2\vec{M\Gamma}|^2 + |\vec{MA}|^2$ να παίρνει την ελάχιστη τιμή.

24. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (5-y)^2} \geq \sqrt{10}.$$

25. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(5,1)$, και $M(x,0)$ με $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $A'M$, όπου A' το συμμετρικό του σημείου A ως προς τον άξονα.
- ii. Να υπολογίσετε τα μήκη των AM και BM .
- iii. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 10x + 26}, x \in \mathbb{R}.$$

26. Δίνονται τα σημεία $A(-1,2)$, $B(0,1)$, και $\Delta(3,1)$.

- i. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ δεν είναι συγγραμμικά.
- iii. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{B\Gamma}$ σε δύο συνιστώσες παράλληλες στα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$.

27. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda - 1, 1)$ και $\vec{\beta} = (1, 2\lambda - 1)$ είναι ομόρροπα;

- 28.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (6, 8)$ και $\vec{\beta} = (3, -4)$.
- Να βρείτε διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ με μέτρο 2.
 - Να βρείτε διάνυσμα ομόρροπο του $\vec{\beta}$ με μέτρο τριπλάσιο του $\vec{\beta}$.
- 29.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 1)$ και $\vec{\beta} = (1, 1)$.
- Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά.
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις: $(\vec{u} - \vec{\alpha}) \parallel \vec{\beta}$ και $(\vec{u} - 2\vec{\beta}) \parallel (\vec{\alpha} + 5\vec{\beta})$.
 - Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{u}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- 30.** Δίνονται τα σημεία $A(-1, -1)$, $B(0, 1)$, $\Gamma(1, 3)$. Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
- 31.** Δίνονται τα σημεία $A(0, 1)$, $B(-2, 0)$, $\Gamma(1, 3)$.
- Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου.
 - Να βρείτε σημείο Δ, ώστε το τετράπλευρο ABΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.
- 32.** Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης (αν ορίζεται) του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:
- $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$
 - $A(1, -3)$, $B(-2, -3)$
 - $A(-1, 2)$, $B(-1, 0)$
- 33.** Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν τα παρακάτω διανύσματα με τον άξονα $x'x$.
- $\vec{\alpha} = (3, 3)$
 - $\overrightarrow{AB}$ με $A(3, 0)$ και $B(0, -\sqrt{3})$
 - $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με $\Gamma(3, -2)$ και $\Delta(3, 4)$
 - $\vec{\beta} = (1, 0)$

34. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 3)$ και $\vec{\beta} = (1, -\sqrt{3})$.

- i. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.
- ii. Να βρείτε την γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$.

35. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{u} = (2\mu - 4, \mu^2 - 3\mu)$ όπου μ σταθερός πραγματικός αριθμός.

- i. Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες το διάνυσμα $\vec{u}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.
- ii. Για τις τιμές του μ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να παραστήσετε το διάνυσμα $\vec{u}$ στο καρτεσιανό επίπεδο.
- iii. Να βρείτε την τιμή του μ για την οποία το διάνυσμα $\vec{u}$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

36. Δίνονται τα σημεία $A(3\kappa, \lambda)$ και $B(4\kappa + 3\lambda, 2\lambda)$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° και να έχει μέτρο $2\sqrt{2}$.

§ 1.5 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι: $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$ και

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3} \text{ να υπολογίσετε τα παρακάτω:}$$

i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

ii. $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$

iii. $(3\vec{\alpha}) \cdot (-2\vec{\beta})$

iv. $(3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$

v. $(3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2$

2. Να δείξετε ότι για τυχαία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ **δεν** ισχύει ότι:

i. $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$

ii. $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$

iii. Αν $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

3. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι: $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2$ και

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{2} \text{ να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων:}$$

i. $\vec{u} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$

ii. $\vec{v} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} + 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

4. Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια, ώστε $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$

. Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα:

i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

ii. $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot (3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$

5. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^{2017} + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})^{2018}$$

6. Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.
7. Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$ τότε να υπολογίσετε το $|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.
8. Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, $|\vec{\gamma}| = 4$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = 60^\circ$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.
9. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ.
10. Αν $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (1, 3)$, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:
- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 - $(2\vec{\alpha}) \cdot (-3\vec{\beta})$
 - $\vec{\alpha}^2$
 - $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (3\vec{\alpha} + \vec{\beta})$
11. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(2, 3)$, $B(-1, 3)$, $\Gamma(2, -1)$ και έστω M το μέσο της πλευράς BΓ. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$
 - $\overrightarrow{AB}^2$
 - $(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB}) \cdot (3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{BG})$
 - $(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GB}) \cdot \overrightarrow{AG} - (\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AB}$

- 12.** Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (0, 1)$. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\vec{AB} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{AG} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Να βρείτε το μήκος
- της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ABΓ.
 - της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ABΓ.
- 13.** Αν $\vec{\alpha} = (1, -2)$, $\vec{\beta} = (2, 3)$ και $\vec{\gamma} = (-2, 0)$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
- $A = |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| + |\vec{\gamma}|$
 - $B = |(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}|$
- 14.** Αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (-1, 3)$ και $\vec{\gamma} = (0, 2)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
- $$A = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$$
- 15.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -4)$ και $\vec{\beta} = (3, 1)$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.
- 16.** Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\gamma})$ και $\vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$.
- 17.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 2)$ και $\vec{\beta} = (4, 3)$.
- Να βρείτε διάνυσμα $\vec{u}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις $\vec{\alpha} \perp \vec{u}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{u} = 1$.
 - Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε, να ισχύει η σχέση $\vec{u} \parallel (\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta})$.
- 18.** Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις:
- $$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (5, 0) \text{ και } \vec{\alpha} - \vec{\beta} = (-3, 4)$$
- να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

19. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}, \vec{v} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{u} \perp \vec{v}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$.

i. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}$.

ii. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} - 3\vec{v}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{u} - 3\vec{v}| = 14$.

20. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 2$,

$|\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ και $\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

i. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

ii. Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$

β) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

iii. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

21. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = (4, -2)$ και $\vec{OB} = (1, 2)$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

i. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{OA} = (4, -2)$ και $\vec{OB} = (1, 2)$ και είναι κάθετα.

ii. Αν $\Gamma(\alpha, \beta)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B, τότε:

α) να αποδείξετε ότι: $\vec{AB} = (-3, 4)$ και $\vec{AG} = (\alpha - 4, \beta + 2)$

β) να αποδείξετε ότι: $4\alpha + 3\beta = 10$

γ) αν επιπλέον τα διανύσματα $\vec{OG}$ και $\vec{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

21. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 3)$.

i. Να βρείτε την γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

ii. Το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \cdot \vec{\alpha}$.

22. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=60^\circ$

. Να υπολογίσετε:

- i. το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- ii. την τιμή της παράστασης: $\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\beta})$.
- iii. το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}$.

23. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=120^\circ$ τότε να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$.

24. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και τα διανύσματα $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{u} = -7\vec{\alpha} + 8\vec{\beta}$ είναι κάθετα, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

25. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(2,0)$, $B(5,1)$, $\Gamma(1,3)$.

- i. Να βρείτε το είδος της γωνίας A.
- ii. Αν AM διάμεσος του τριγώνου, να βρείτε την γωνία $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$.

26. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και $\vec{\beta} = (5, 10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.

27. Να αποδείξετε ότι:

- i. για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει η σχέση $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$.
- ii. αν για τα διανύσματα ισχύουν οι σχέσεις $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 1$ τότε $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{3}$.

28. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν: $1 \leq |\vec{\alpha}| \leq 2$, $1 \leq |\vec{\beta}| \leq 2$ και

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{3} \text{ να αποδείξετε ότι } |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 4.$$

29. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ με $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OG}| = 1$ και $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG} = \vec{0}$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο.
30. Αν για τα διανύσματα ισχύει ότι: $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$, και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ να υπολογίσετε:
- το $|\vec{\gamma}|$
 - το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$
31. Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\gamma}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0}$ τότε:
- να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 - να υπολογίσετε τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
 - να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = 3\vec{\beta}$
32. Έστω τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{2} = \frac{|\vec{\gamma}|}{3}$. Να αποδείξετε ότι:
- $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$
 - $\vec{\alpha} = \frac{1}{2}\vec{\beta}$
 - $\vec{\gamma} = -3\vec{\alpha}$
33. Έστω τρία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$.
- Να βρείτε τις γωνίες $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ και $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$.
 - Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.
34. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$. Να αποδείξετε ότι .
35. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = 2$. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

36. Αν $|\vec{\alpha}|=1$ και $|\vec{\beta}|=2\sqrt{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}-1}$, να δείξετε ότι $\vec{\beta}=2\vec{\alpha}$.

37. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=2$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \geq 3$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$

ii. $\vec{\beta} = 2\vec{\alpha}$

38. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\delta}$, τέτοιο, ώστε $\vec{\delta} \parallel (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\delta})$.

39. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$ και $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$.

i. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} \neq \vec{0}$.

ii. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\delta}$, ώστε: $\vec{\delta} \parallel (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\delta})$.

40. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -4)$ και $\vec{\beta} = (0, 1)$

i. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u}$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{u} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \text{ και } \vec{\beta} \cdot \vec{u} = 4$$

ii. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

41. Έστω δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 1$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2$.

i. Να αποδείξετε ότι:

α) $|\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2 = \frac{5}{2}$

β) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{3}{4}$

ii. Αν η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι $\theta = \frac{\pi}{3}$, τότε:

α) να αποδείξετε ότι: $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 1$.

$\beta)$ να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$

- 42.** Έστω A και B δυο σημεία του επιπέδου τέτοια ώστε $(AB) = 8$
- Αν K είναι το μέσο του AB, να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο M του επιπέδου ισχύει η σχέση $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = |\vec{MK}|^2 - 16$
 - Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει η σχέση $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 9$.
- 43.** Έστω A και B δυο σημεία του επιπέδου. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει η σχέση $|\vec{3MA} - \vec{MB}| = \sqrt{9\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2}$.
- 44.** Δίνονται τα σταθερά σημεία του επιπέδου A, B με. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει η σχέση $\vec{MA} \cdot \vec{MG} = 5 + \vec{MA} \cdot \vec{BG}$.