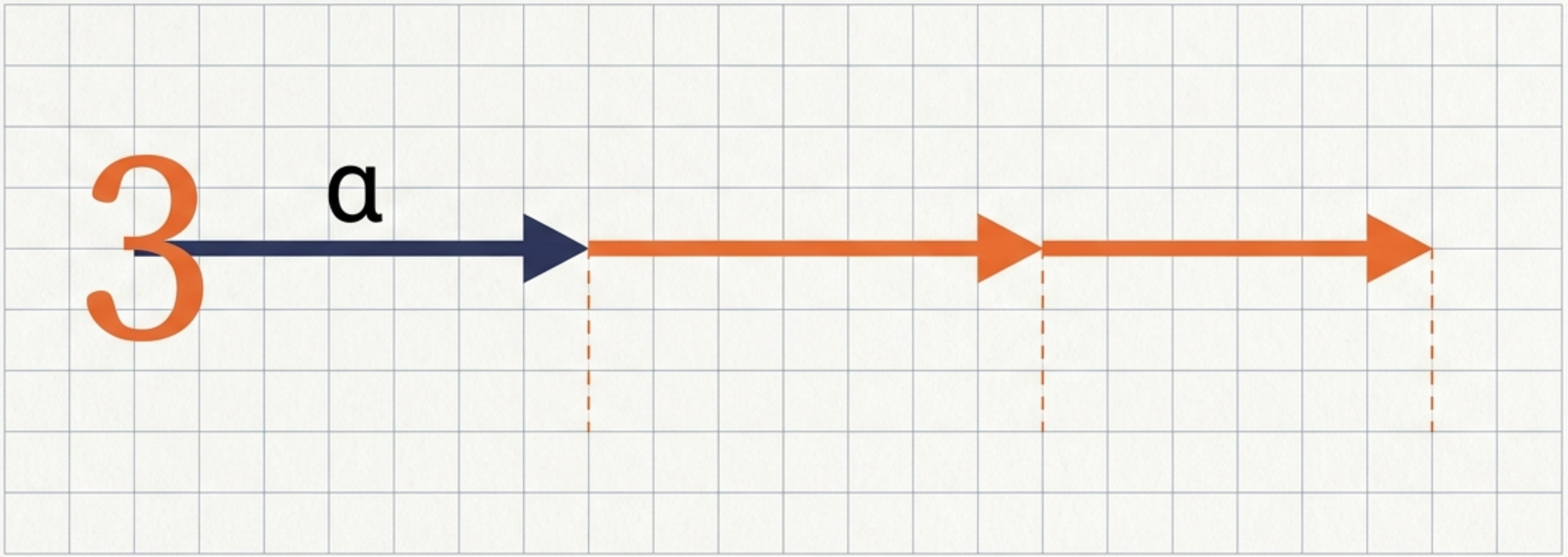
Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα

Κεφάλαιο 1.3 | Το Εργαλείο Μετασχηματισμού της Γεωμετρίας.
Ένας πλήρης, οπτικός οδηγός μελέτης.



Gemini Notebook

Η Σύντηξη Άλγεβρας και Γεωμετρίας

λ

Ένας πραγματικός αριθμός (χωρίς κατεύθυνση).

$\lambda + \alpha$

$\downarrow$

$\lambda \cdot \alpha$



Ένα διάνυσμα (μέτρο και κατεύθυνση).

Τι συμβαίνει όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με ένα διάνυσμα; Το αποτέλεσμα είναι ένα νέο διάνυσμα που έχει τεντωθεί, συρρικνωθεί ή αντιστραφεί.

Gemini Notebook

Η Ανατομία του Νέου Διανύσματος

Μέτρο (Magnitude)

$|\beta| = |\lambda| \cdot |\alpha|$

Το νέο μέτρο είναι το γινόμενο των μέτρων.

Κατεύθυνση (Direction)

Εξαρτάται αποκλειστικά από το πρόσημο του λ.

$$\beta = \lambda \cdot \alpha$$

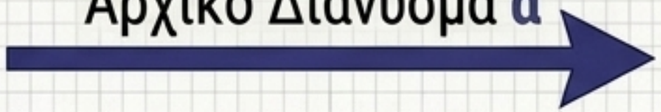
Ο **Κανόνας του Μηδενός**

Αν $\lambda = 0$ ή $\alpha = \mathbf{0}$, τότε το αποτέλεσμα είναι το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$.

Gemini Notebook

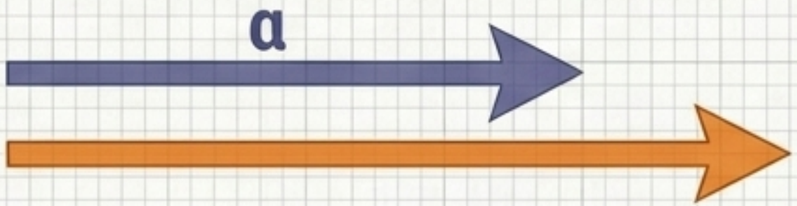
Ο Διακόπτης λ: 4 Πιθανά Σενάρια

Αρχικό Διάνυσμα **α**



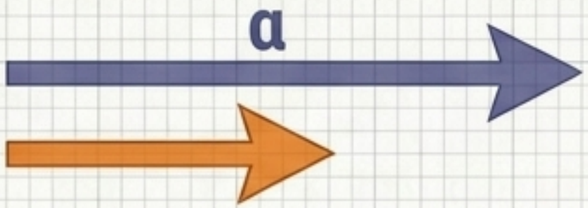
λ > 1

Ομόρροπο & Μεγαλύτερο (π.χ. 3α)



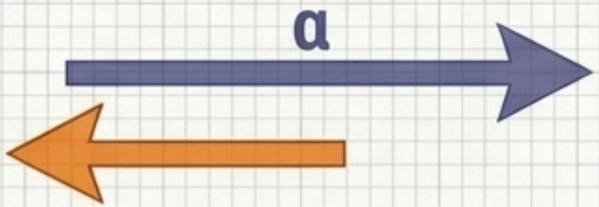
0 < λ < 1

Ομόρροπο & Μικρότερο (π.χ. 1/2 α)



-1 < λ < 0

Αντίρροπο & Μικρότερο (π.χ. -1/2 α)



λ < -1

Αντίρροπο & Μεγαλύτερο (π.χ. -3α)

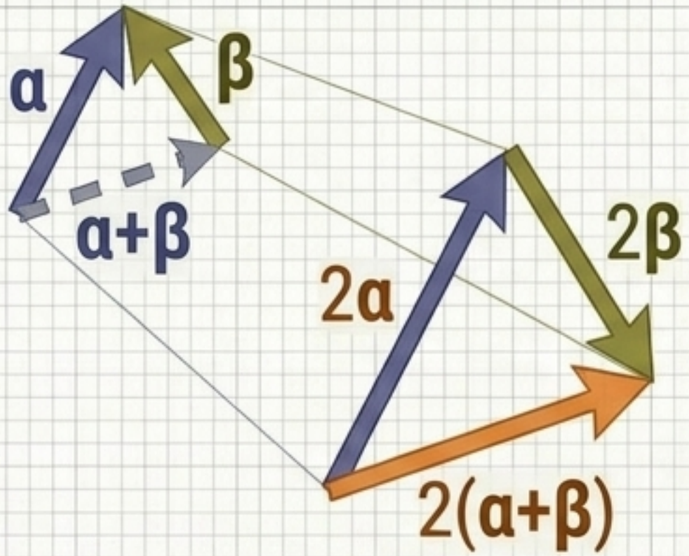


Gemini Notebook

Οι 3 Χρυσοί Κανόνες (Ιδιότητες)

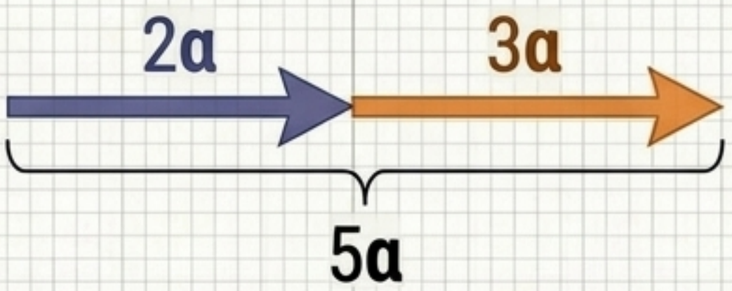
Επιμεριστική ως προς Πρόσθεση Διανυσμάτων

$$\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$$



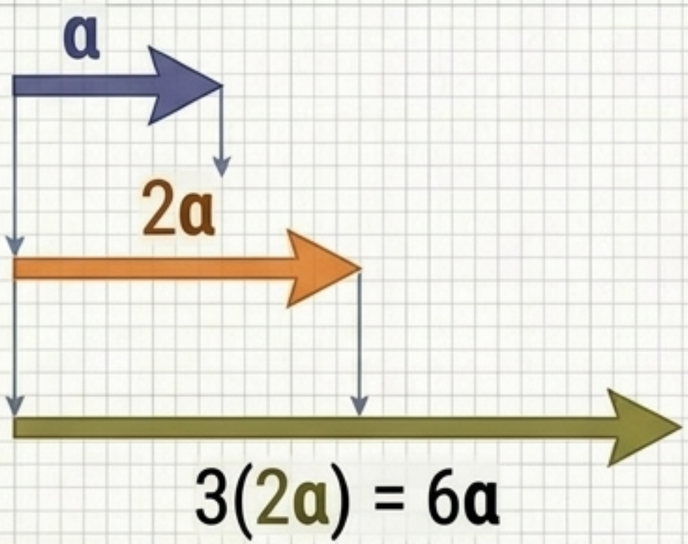
Επιμεριστική ως προς Πρόσθεση Αριθμών

$$(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$$



Προσεταιριστική

$$\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$$

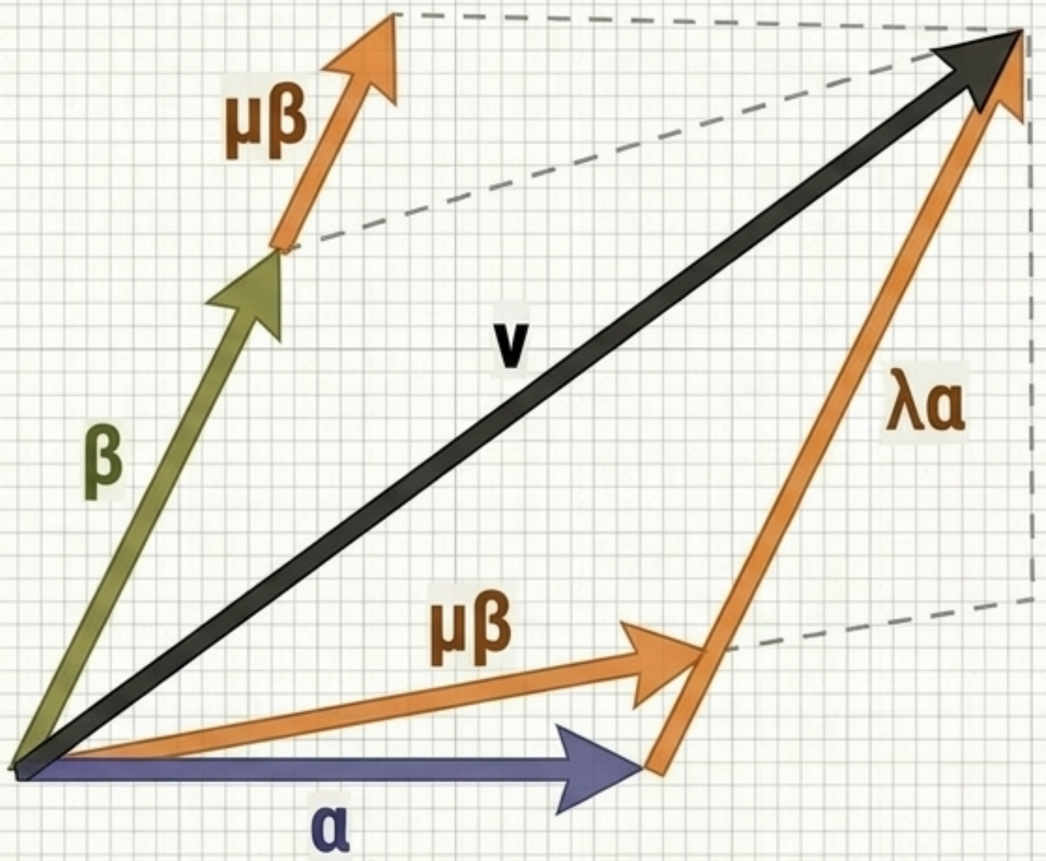


Gemini Notebook

Γραμμικός Συνδυασμός: Αναμειγνύοντας Διανύσματα

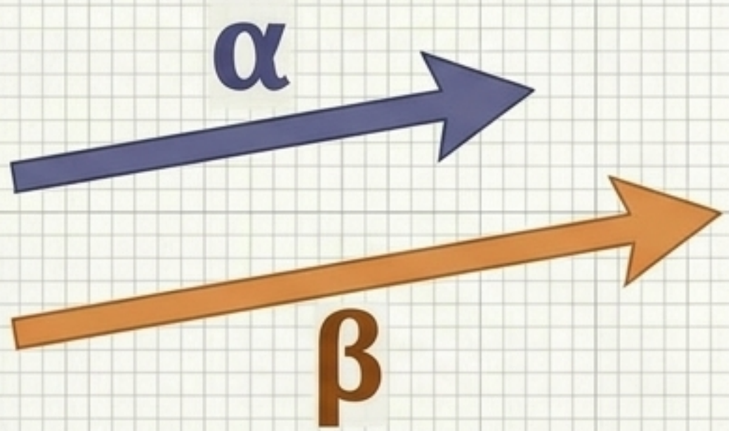
Ορισμός
Κάθε διάνυσμα της μορφής
v = λα + μ**β**.

Το Μυστικό:
Πολλαπλασιάζοντας δύο μη συγγραμμικά διανύσματα με αριθμούς και προσθέτοντάς τα, μπορούμε να συνθέσουμε οποιοδήποτε διάνυσμα στο επίπεδο.



Gemini Notebook

Το Θεώρημα-Κλειδί: Η Συνθήκη Παραλληλίας



$$\alpha \iff \alpha = \lambda\beta \quad (\text{για } \beta \neq 0)$$

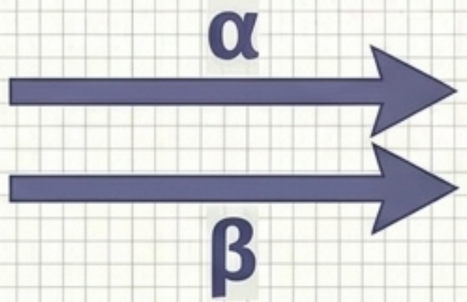
Αν δύο διανύσματα είναι παράλληλα, το ένα είναι πάντα βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου. Αυτό είναι το απόλυτο εργαλείο για να αποδείξουμε παραλληλία σε ασκήσεις!

Gemini Notebook

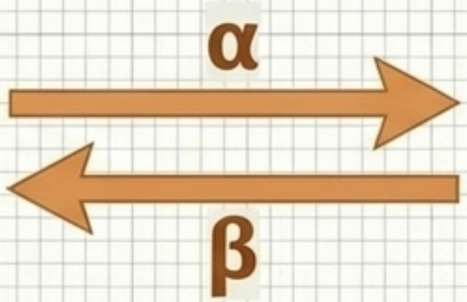
Αποκωδικοποιώντας την Παραλληλία

Έστω $\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\beta}$

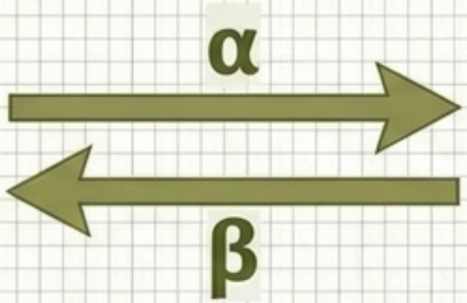
- $\lambda > 0$ → Τα διανύσματα είναι Ομόρροπα ($\boldsymbol{\alpha} \uparrow\uparrow \boldsymbol{\beta}$)



- $\lambda < 0$ → Τα διανύσματα είναι Αντίρροπα ($\boldsymbol{\alpha} \uparrow\downarrow \boldsymbol{\beta}$)

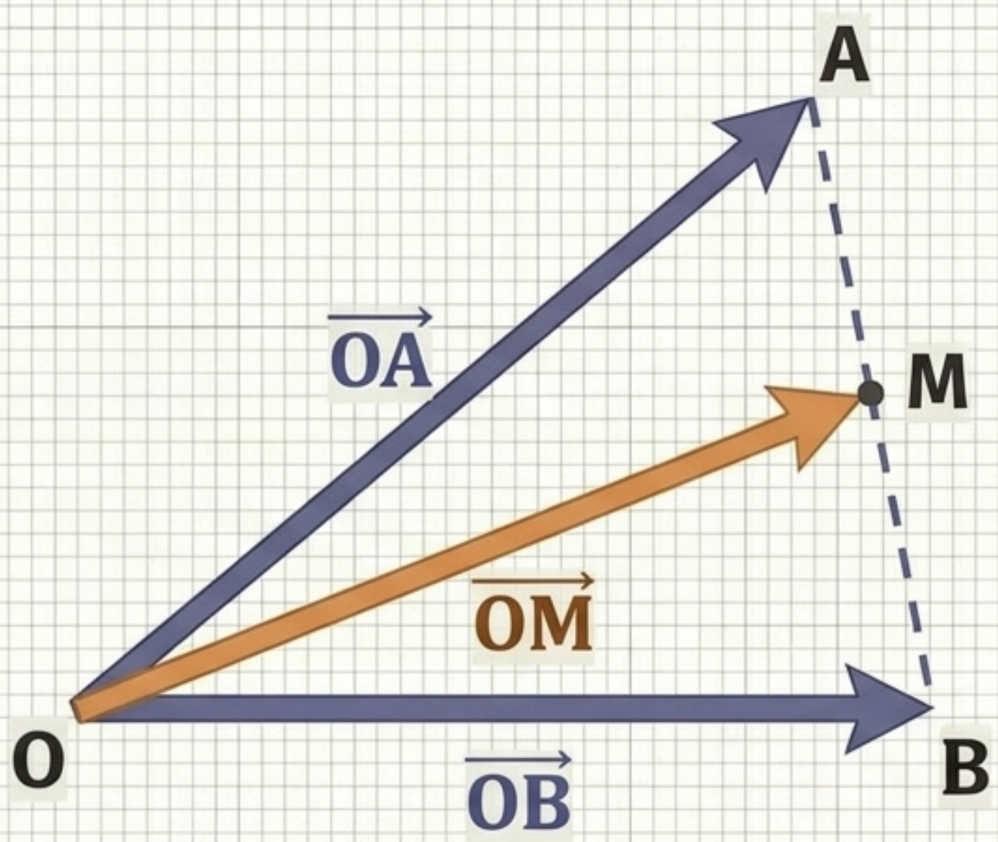


- $\lambda = -1$ → Τα διανύσματα είναι Αντίθετα ($\boldsymbol{\alpha} = \text{-}\boldsymbol{\beta}$)



Gemini Notebook

Υπερδύναμη #1: Η Διανυσματική Ακτίνα Μέσου



$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

1. Ξεκινάμε από τη γεωμετρική αλήθεια:
$$AM = MB$$
2. Εισάγουμε σημείο αναφοράς Ο:
$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$$
3. Καταλήγουμε στον μέσο όρο:
$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Gemini Notebook

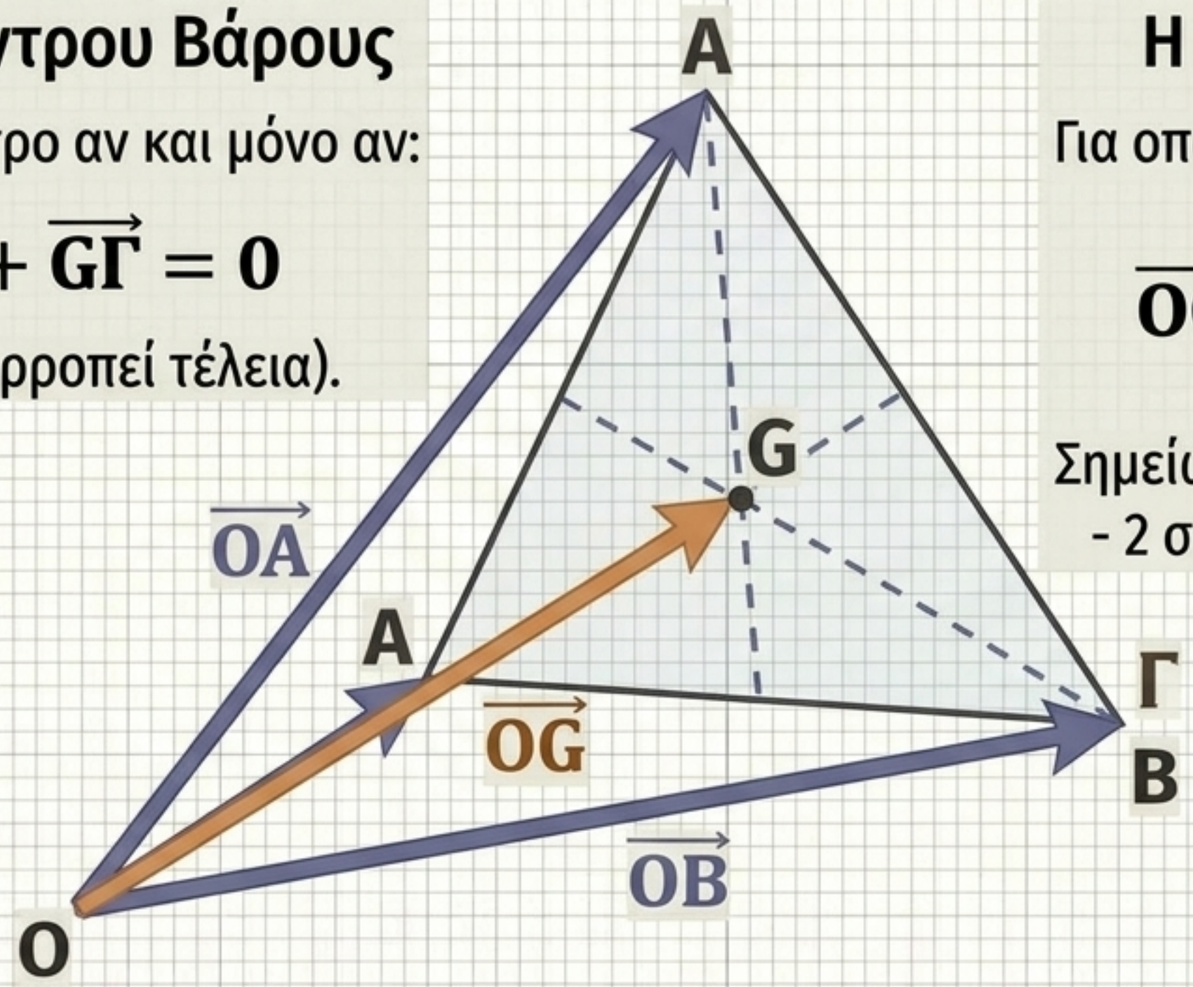
Υπερδύναμη #2: Το Βαρύκεντρο Τριγώνου (G)

Η Συνθήκη Κέντρου Βάρους

Το G είναι βαρύκεντρο αν και μόνο αν:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = 0$$

(Το σύστημα ισορροπεί τέλεια).



Η Διανυσματική Ακτίνα

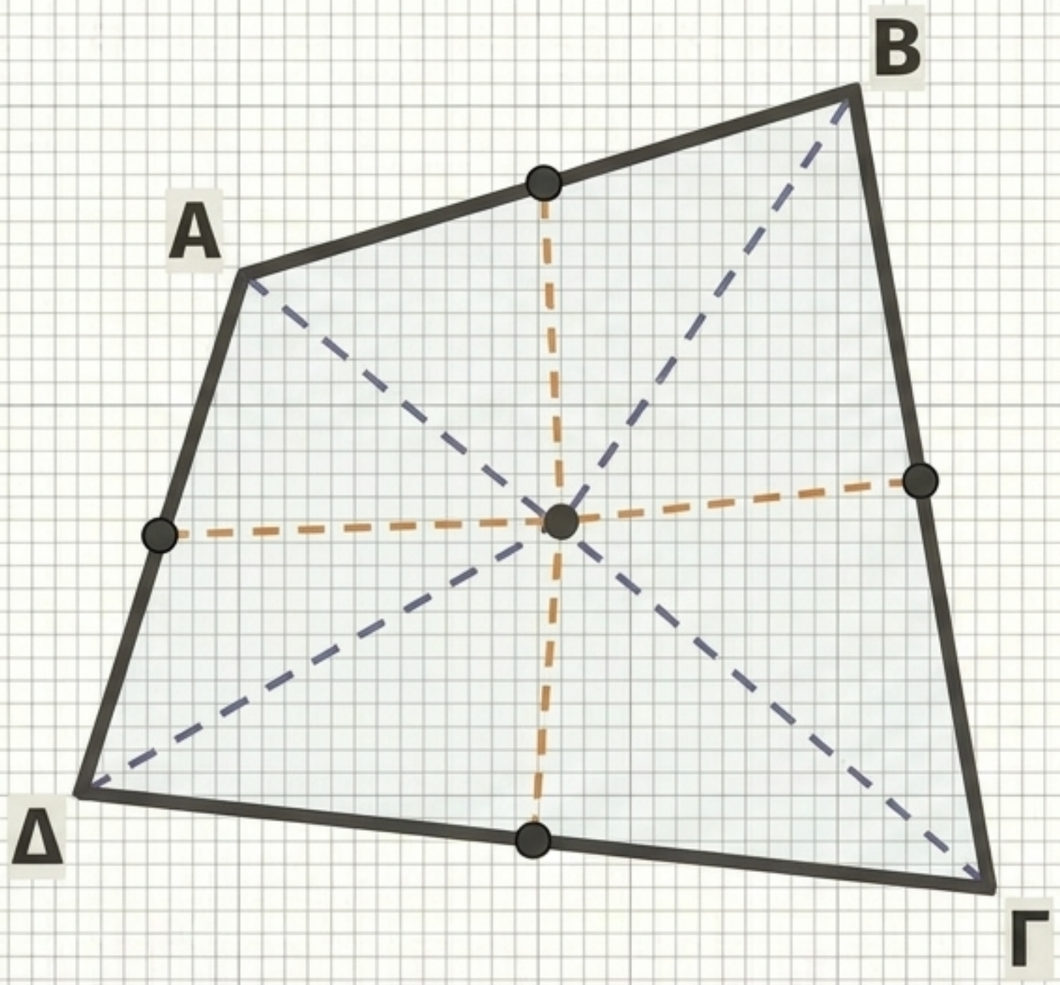
Για οποιοδήποτε σημείο αναφοράς Ο:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}}{3}$$

Σημείωση: Παρατηρήστε τη συμμετρία - 2 σημεία / δια 2, 3 σημεία / δια 3.

Gemini Notebook

Η Λύση στο Μυστήριο του Τετραπλεύρου



Το Πρόβλημα

Δείξτε ότι τα τμήματα που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών και των διαγωνίων διχοτομούνται στο ίδιο σημείο.

Η Διανυσματική Απόδειξη

1. Βρίσκουμε το μέσο **G** του ενός τμήματος.
2. Η διανυσματική ακτίνα του είναι:

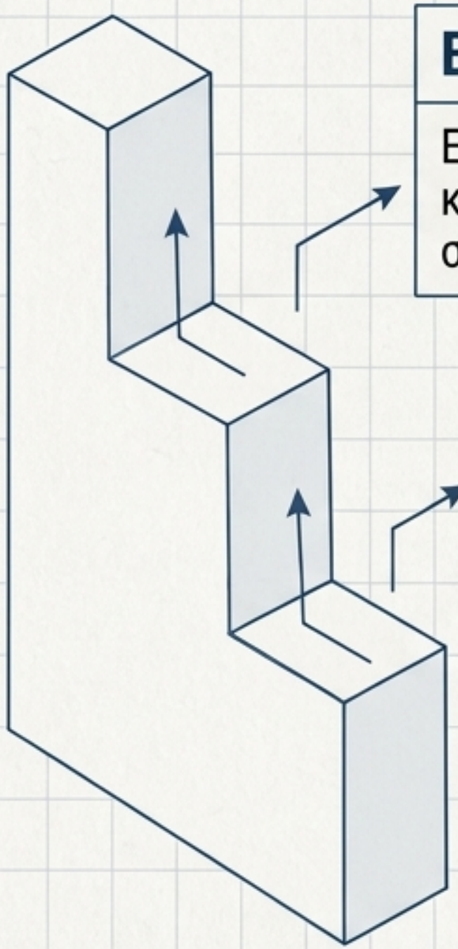
$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta}}{4}$$

3. Η πλήρης συμμετρία αυτού του τύπου αποδεικνύει ότι όλα τα τμήματα μοιράζονται το ίδιο ακριβώς μέσο! Μία απόδειξη μίας γραμμής.

Gemini Notebook

Στρατηγική Εξετάσεων: Συνευθειακά Σημεία

Στόχος: Πώς αποδεικνύουμε ότι 3 σημεία Α, Β, Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία?



Βήμα 3: Το Συμπέρασμα

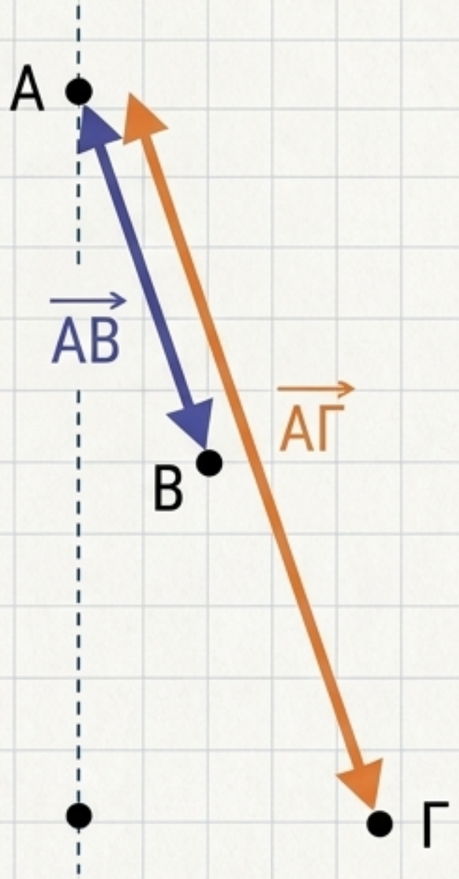
Εφόσον είναι παράλληλα (||) και μοιράζονται το κοινό σημείο Α, αναγκαστικά βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

Βήμα 2: Ο Πολλαπλασιασμός

Χρησιμοποιούμε πράξεις για να δείξουμε ότι το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου: $AB = \lambda \cdot A\Gamma$.

Βήμα 1: Η Βάση

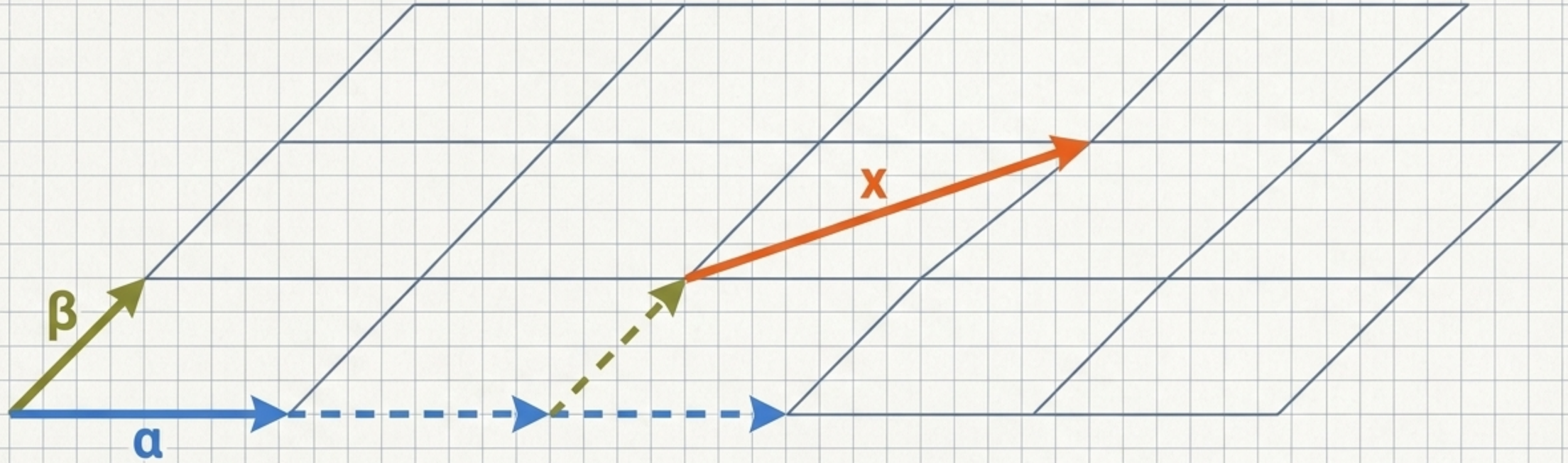
Δημιουργούμε δύο διανύσματα με κοινή αφετηρία (π.χ. ΑΒ και ΑΓ).



Gemini Notebook

Διαδραστική Πρόκληση (Mini-Challenge)

Πώς μπορούμε να εκφράσουμε το διάνυσμα **x** ως γραμμικό συνδυασμό των **α** και **β**;



Η Λύση:

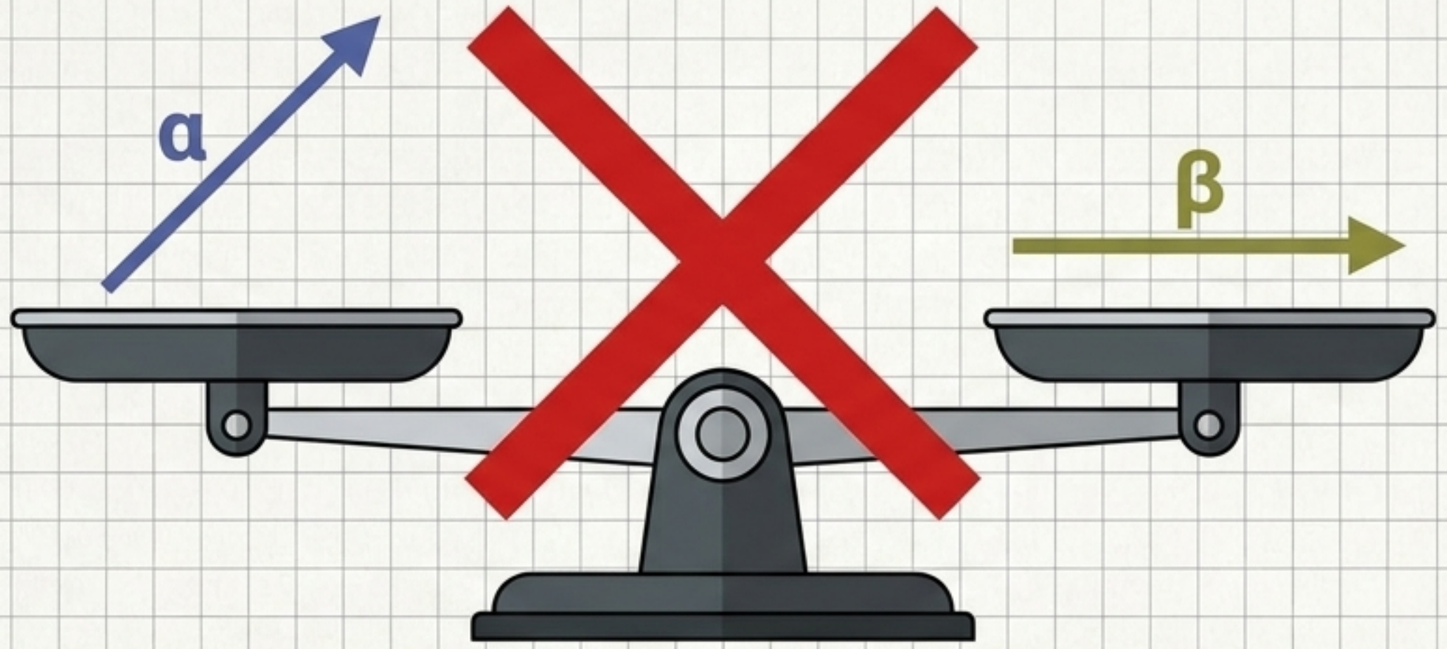
Περπατάμε πάνω στο σχήμα: **x** = Διαδρομή 1 + Διαδρομή 2

Tip: Σκεφτείτε τα βασικά διανύσματα **α** και **β** ως οδηγίες πλοήγησης (GPS).

x = 2**α** - **β**

Gemini Notebook

Pro-Tip: Μη Συγγραμμικά Διανύσματα



Αν τα διανύσματα **α**, **β** είναι μη συγγραμμικά (δεν είναι παράλληλα) και ισχύει:

$$x \cdot \alpha + y \cdot \beta = 0$$

Τότε υποχρεωτικά: $x = 0$ ΚΑΙ $y = 0$

Δεν μπορείς να ακυρώσεις μια κίνηση προς το Βορρά με μια κίνηση προς την Ανατολή. Ο μόνος τρόπος να παραμείνεις στο μηδέν (0) είναι να μην κουνηθείς καθόλου.

Gemini Notebook

The Master Key: Σύνοψη Κεφαλαίου 1.3

1. Ορισμός & Μέτρο

$$\beta = \lambda \cdot \alpha$$

$$|\beta| = |\lambda| \cdot |\alpha|$$

2. Συνθήκη Παραλληλίας

$$\alpha \parallel \beta$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\alpha = \lambda \cdot \beta$$

3. Μέσο Τμήματος

Αν Μ είναι το μέσο του ΑΒ:

$$OM = \frac{OA + OB}{2}$$

4. Βαρύκεντρο Τριγώνου

Αν G είναι το βαρύκεντρο:

$$GA + GB + G\Gamma = 0$$

$$OG = \frac{OA + OB + O\Gamma}{3}$$

Gemini Notebook