

Άλγεβρα

Κεφάλαιο 1^ο : «Συστήματα»

1.1 Γραμμικά συστήματα

1. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x - 9y = 2 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} 2(x-3) - 3(y+1) = 0 \\ x - 3(3y+x) = 2-y \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} 2(x-3) - 3(y+1) = 0 \\ \frac{x+y}{2} + \frac{3-y}{4} = 2 \end{cases}$$

$$\zeta) \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{2-y}{3} = 0 \\ \frac{x+y}{3} - \frac{x-3y}{5} = 2 \end{cases}$$

$$\eta) \begin{cases} 3(x-1) - 2(y-4) = x+y-5 \\ 2(x+y) - 3(4x-y) = 10 \end{cases}$$

$$\theta) \begin{cases} (x-1)^2 - (x-1)(y+2) = x^2 - xy - 3 \\ \frac{1-x}{2} - (3+y)^2 = 3 - y^2 \end{cases}$$

$$\iota) \begin{cases} (x-y)^2 - (x-1)(y+2) = x^2 - 3xy + y^2 \\ 3x - (2-y)^2 = 3 - y^2 \end{cases}$$

2. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι 36cm. Να βρείτε τις διαστάσεις του, αν το μήκος του είναι κατά 3cm μεγαλύτερο από το διπλάσιο του πλάτους του.
3. Ένας παππούς αγόρασε 6 σοκολάτες και 12 πακέτα μπισκότα για να τα δώσει στα 3 εγγόνια του και πλήρωσε 24€. Την επόμενη εβδομάδα αγόρασε 6 σοκολάτες και 6 πακέτα μπισκότα για τα εγγόνια και πλήρωσε 18€. Πόσο κοστίζουν το ένα πακέτο μπισκότα και πόσο η καθεμία σοκολάτα;
4. Σε ένα αγρόκτημα υπάρχουν κότες και κουνέλια. Αν τα ζώα έχουν όλα μαζί 40 κεφάλια και 114 πόδια να βρείτε πόσες είναι οι κότες και πόσα τα κουνέλια.
5. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(2,1)$ και $B(-2,1)$.

6. Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda - 1)y = -6 \end{cases}$$
 με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν $\lambda = -3$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και να βρείτε μια λύση του.

β) Αν $\lambda = 3$, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

γ) Αν $\lambda = 0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε.

7. Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} \alpha x - 2y = \gamma + 5 \\ 2x + \beta y = 1 - \gamma \end{cases}$$
 με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις

τιμές των α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(2, -3)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέμα 31570

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2: x - 2y = -2$.

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο **M**.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon_3: 3x + y = 8$ διέρχεται από το **M**.

Θέμα 21227

α) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$$
.

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1): 5x - y = 5$ και $(\varepsilon_2): -5x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

Θέμα 18431

Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + ky = 8 \end{cases}$$
 με αγνώστους x, y και k παράμετρος.

α) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 2$.

β) Να λύσετε το σύστημα όταν $k = 1$.

Θέμα 15011

Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20 € και 50 €. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20 € και 50 € αντίστοιχα.

α) i. Δίνονται οι εξισώσεις: $y = 15 - x$ και $y - x = 15$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480 €.

Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις: $50y - 20x = 480$ και $20x + 50y = 480$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα αι) και αii) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και 50 € κατέθεσε ο Κώστας.

Θέμα 15849

Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά. Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α) Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

A.
$$\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$$

Γ.
$$\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$$

Δ.
$$\begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$$

β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι.

Θέμα 15016

Δίνεται το γραμμικό σύστημα
$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$
.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος $(0,4)$ δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος.

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x + 2y = 8$ και $(\varepsilon_2): 2x - y = 3$.