

1.1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Έχουμε τους ισχυρισμούς P, Q , να εξετάσετε τότε ισχύει η συνεπαγωγή $P \Rightarrow Q$ και τότε $Q \Rightarrow P$ και τότε η ισοδυναμία $P \Leftrightarrow Q$

- i. P : Η Μαρία διαμένει στην Θήβα, Q : Η Μαρία διαμένει στην Βοιωτία.
- ii. P : Ο Κώστας είναι 16 ετών, Q : Ο Κώστας είναι ανήλικος
- iii. P : Έχουμε μήνα Οκτώβριο Q : Έχουμε Φθινόπωρο.
- iv. P : $\alpha^2 = 25$ Q : $\alpha = 5$.
- v. P : $a=2$ και $b=3$ Q : $a+b=5$.
- vi. P : $2\alpha=8$. Q : $\alpha=4$
- vii. P : οι αριθμοί α, β είναι άρτιοι. Q : το άθροισμα $\alpha+\beta$ είναι άρτιο

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

i. $A = \left(\frac{x^{10}}{x^7} \right)^5 : \left(\frac{x^{-3}}{x^{-1}} \right)^{-7}$

ii. $B = \frac{28x^{10}y^{-3}}{8(x^3y^2)^2}$

- iii. Αν $x = 2024$, $y = \frac{1}{2024}$ να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\Delta = \left[\left(x^{-1} \cdot y \right)^{-3} \cdot \left(x^5 \cdot y^4 \right)^2 \right] : \left(\frac{x}{y^3} \right)^2$$

3. Να αποδείξετε ότι:

i. $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

ii. $(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$

4. Να αποδείξετε ότι:

i. $(\alpha^2 - 3)^2 - \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 5) = (\alpha - 1)(\alpha^3 - 5) + 4$

ii. $(\alpha\beta - 1)^2 - (\alpha - \beta)^2 = (\alpha - 1)(\beta - 1)(\alpha + 1)(\beta + 1)$

5. Να αποδείξετε ότι:

i. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = -2\alpha\beta$

ii. Αν $\alpha - \beta = 2$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 - 3\alpha^2 = \beta^3 + 3\beta^2 - 4$

6. Αν ισχύει ότι: $(\alpha + \beta)^2 - 2\beta(\alpha + \beta) = 2(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 = \beta^2$

ii. Να προσδιορίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $A = \alpha^{2024} - \beta^{2024}$

7. Να αποδείξετε ότι:

i. Αν $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{3}$, να αποδείξετε: $\beta \neq 3$

ii. Αν α ακέραιος αριθμός και α^2 είναι περιττός να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός:

8.

i. Να αποδείξετε ότι η πρόταση « για οποιουσδήποτε αριθμούς α, β ισχύει $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2$ » δεν είναι αληθής.

ii. Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει ότι: $\alpha > \frac{1}{\alpha}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

iii. Για κάθε $\alpha < 9$ ισχύει ότι: $\alpha^2 < 81$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

iv. Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει ότι: $\alpha^3 > \alpha^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



9. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

i. $(3\alpha^3 - \dots)^2 = \dots - \dots + 16\beta^2$

ii. $(6\alpha + \dots)(\dots - 36\alpha\beta^2 + \dots) = \dots$

iii. $(2x^2 - \dots)^2 = \dots - 2x^5 + \dots$

10. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $2\alpha x - 4\alpha y$

ii. $2\alpha x - 4\alpha y - 6a^2xy$

11. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $2\alpha\beta - \beta^2 + 6\alpha - 3\beta$

ii. $15\alpha^3x^2 - 6\alpha^2x^2 + 10\alpha xy - 4xy$

12. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $9x^2 - \frac{25}{4}$

iii. $x^3 - 256x$

ii. $(2x-1)^2 - 4x^2$

13. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $(2x-1)^3 - x^3$

ii. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1$

14. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

i. $16\alpha^2 + 9 + 24\alpha$

ii. $a^2 - \beta^2 + 6\beta - 9$

15. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις .

i. $x^2 - 5x + 6$.

ii. $-x^2 + 8x - 16$

16. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $(3x-1)^3 + (x-2)^3 + (3-4x)^3$

ii. $8(2x-3y)^3 + (2x+y)^3 - (6x-5y)^3$



17. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $\frac{x^2 - 2x + 1 - y^2}{x^2 - xy - x}$

ii. $(\alpha - \beta)^2 (\alpha^{-1} - \beta^{-1})^{-2}$

18. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta(1+\gamma)}{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}$$

19. Αν ισχύει: $12x^2y + 18xy^2 = 2x + 3y$, $x, y \neq 0$, Να δείξετε ότι οι αριθμοί $2x, 3y$ είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

20. Αν $\nu \in \mathbb{N}$, να δείξετε ότι ο αριθμός $5^\nu + 5^{\nu+1} + 5^{\nu+2}$ διαιρείται με το 31.

21. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\left(\frac{356}{999}\right)^3 + \left(\frac{643}{999}\right)^3}{\left(\frac{356}{999} - \frac{643}{999}\right)^2 + \frac{356 \cdot 643}{999^2}}$$