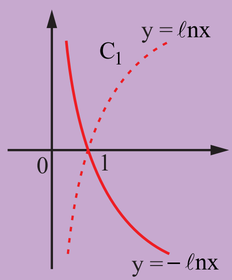
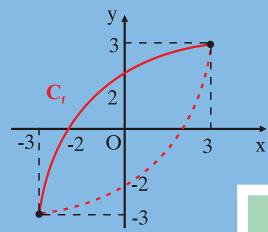
Β΄ Μέρος (Ανάλυση)
1ο Κεφάλαιο

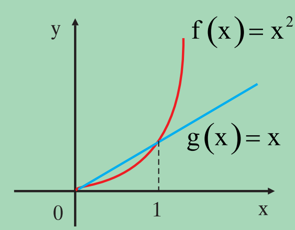
3ο μάθημα
Συναρτήσεις



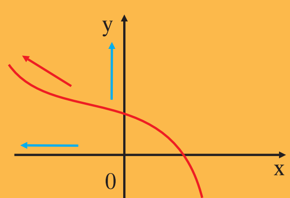
4ο μάθημα
Μονοτονία - Ακρότατα
“1 – 1”
Αντίστροφη Συνάρτηση



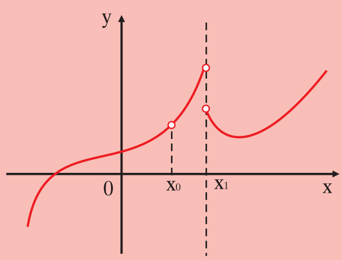
5ο μάθημα
Όριο συνάρτησης



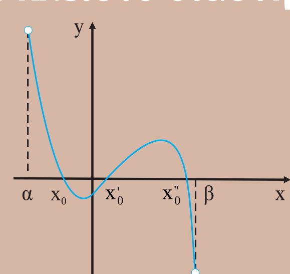
6ο μάθημα
Υπολογισμός ορίου συνάρτησης όταν $x \to \pm\infty$



7ο μάθημα
Συνέχεια συνάρτησης



8ο μάθημα
Συνέχεια συνάρτησης σε κλειστό διάστημα



Μάθημα 3 Συναρτήσεις

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ορισμός

Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του R. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f με την οποία **κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σ' ένα μόνο πραγματικό αριθμό y**. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με f(x), γράφουμε y = f(x).

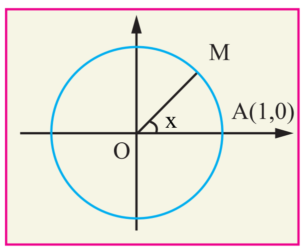
Παρατηρήσεις

1. Στη σχέση y = f(x) το γράμμα x λέγεται **ανεξάρτητη** μεταβλητή, ενώ το γράμμα y που παριστάνει την τιμή της f στο x λέγεται **εξαρτημένη** μεταβλητή.

2. Στην αρχή είναι σημαντικό να εκφράζουμε λεκτικά τον κανόνα (τη συνάρτηση).

Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα:

- Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό εκτός από το 0 στον αντίστροφό του είναι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$.
- Ο κανόνας που αντιστοιχεί σε κάθε άρρητο αριθμό το 0 και σε κάθε ρητό το 1 είναι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 1, \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$



- Ο κανόνας που αντιστοιχεί κάθε αριθμό $x \in [0, 2\pi]$ στην τετμημένη του πέρατος του τόξου $\overset{\frown}{AM}$ όπως φαίνεται στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η συνάρτηση f(x) = συνx.

3. Επίσης είναι σημαντικό να χαρακτηρίζουμε τις μεταβλητές.

- Έτσι στην συνάρτηση f(x) = ημx - x ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το x και η τιμή της f στο π είναι f(π) = ημπ - π = - π.
- Στην συνάρτηση $g(h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το h ενώ το γράμμα x

είναι μια σταθερά. Κι έτσι $g(2)=\dfrac{(x+2)^2-x^2}{2}=\dfrac{4x+4}{2}=2x+2$

4. Μια σχέση που συνδέει δύο μεταβλητά μεγέθη δεν είναι πάντα συνάρτηση.
Έτσι από τις παρακάτω σχέσεις
(1) $x^2+y^2=4$, (2) $x^2+3y=1$, (3) $x^2-y^2=1$ μόνον η (2) είναι συνάρτηση $y=\dfrac{1-x^2}{3}=f(x)$. Η (3) για παράδειγμα δεν είναι αφού για $x=2$ έχουμε $y=\sqrt{3}$ ή $y=-\sqrt{3}$.

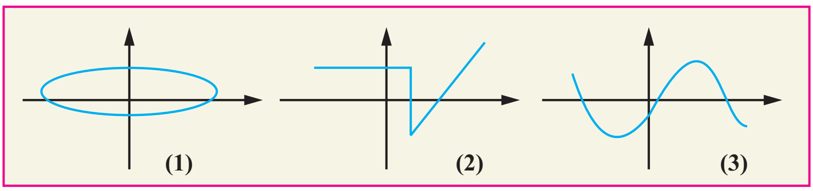
Το πεδίο ορισμού “A_f”

Αν η συνάρτηση δίνεται μόνο με τον τύπο της, πεδίο ορισμού της θα θεωρείται συμβατικά το ευρύτερο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών για τους οποίους η τιμή f(x) να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Συμβολικά γράφουμε $A_f=\{x\in R: y=f(x)\in R\}$

Γραφική παράσταση

Γραφική παράσταση της f (C_f) με πεδίο ορισμού το Α είναι το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που αντιστοιχούν στα ζεύγη (x, f(x)), $x\in A$.

Από τι γραμμές των σχημάτων μόνο η (3) αντιστοιχεί σε γραφική παράσταση συνάρτησης.



Συμμετρίες και παράλληλες μετατοπίσεις

1. g(x) = - f(x). Είναι συμμετρική της C_f ως προς x΄x.

2. $g(x)=|f(x)|=\begin{cases} f(x), x: f(x)\geq 0 \\ -f(x), x: f(x)<0 \end{cases}$

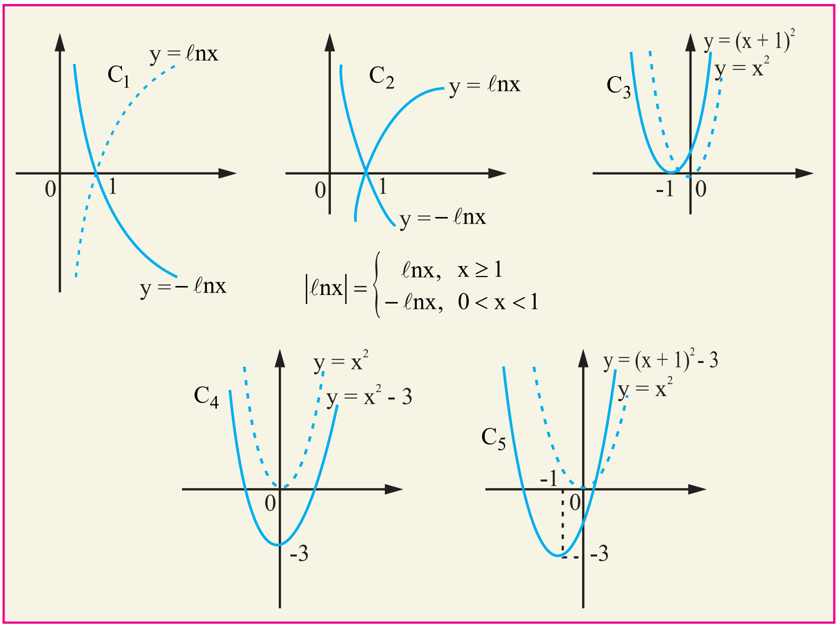
Άρα η $C_{|f|}$ είναι κοινή με την C_f πάνω από τον άξονα x΄x και συμμετρική της C_f ως προς τον x΄x για τα σημεία που είναι κάτω απ’ αυτόν.

3. $g(x)=f(x)+K$. προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά Κ μονάδες. προς τα πάνω αν $K>0$ και $|K|$ μονάδες προς τα κάτω αν $K<0$.

4. $g(x)=f(x-x_0)$, $x_0>0$, προκύπτει από την μετατόπιση της C_f κατά x_0 μονάδες δεξιά και $g(x)=f(x+x_0)$, $x_0>0$ προκύπτει από την μετατόπιση της C_f κατά x_0 μονάδες αριστερά.

5. $g(x)=f(x-x_o)+K$. Εδώ έχουμε συνδυασμό, οριζόντια μετατόπιση κατά x_o και κατακόρυφη μετατόπιση κατά Κ μονάδες .

Παραδείγματα που αντιστοιχούν στα προηγούμενα



Σύνολο τιμών “f (A)”

Σύνολο τιμών “f (A)” είναι το σύνολο που στοιχεία του είναι οι τιμές της f για κάθε $x \in A$.

Δηλαδή $f(A) = \{y \in R \,/\, y = f(x)$ για ένα τουλάχιστον $x \in A\}$

Διαβάζουμε το σύνολο τιμών περιλαμβάνει εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς y για τους οποίους υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Ίσες συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες όταν ισχύουν:

i. έχουν κοινό πεδίο ορισμού το A

ii. για κάθε $x \in A$ είναι $f(x) = g(x)$

Σχόλιο

Μπορούμε να αναφερόμαστε σε ισότητα συναρτήσεων ακόμα και όταν είναι ίσες μόνο σ’ ένα υποσύνολο των πεδίων ορισμού τους (αρκεί να διευκρινίζεται).

Πράξεις με συναρτήσεις

Έχουμε τις συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού τα A, B αντίστοιχα.

Ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις (με τη προϋπόθεση ότι $A \cap B \neq \emptyset$)

1. Πρόσθεση $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A \cap B$

2. Αφαίρεση $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A \cap B$

3. Πολλαπλασιασμός $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A \cap B$

4. Διαίρεση $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, $x\in A\cap B$ και $g(x)\neq 0$

Σύνθεση συναρτήσεων

Έχουμε την συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2}$.
Η αντιστοίχιση του x γίνεται σε δύο φάσεις.
Στην πρώτη ο x απεικονίζεται στο x^2
Στη δεύτερη ο x^2 (που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 0) απεικονίζεται στην τετραγωνική του ρίζα.

Έχουμε $x\xrightarrow[(\ )^2]{h(x)=x^2}x^2\xrightarrow[\sqrt{\ }]{g(x)=\sqrt{x}}\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in R$. Για την $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$. Είναι

$x\xrightarrow{\sqrt{\ }}\sqrt{x}\xrightarrow{(\ )^2}\left(\sqrt{x}\right)^2=x$ αφού $x\geq 0$

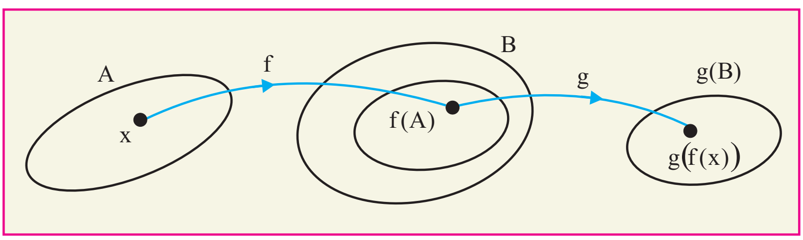
Ορίζουμε σαν σύνθεση της f με τη g που έχουν πεδία ορισμού τα A, B αντίστοιχα την συνάρτηση $g(f(x))$ εφόσον τα πεδία ορισμού τους το επιτρέπουν. Συμβολίζουμε $(gof)(x)=g(f(x))$.

Το πεδίο ορισμού της gof “A_{gof}”

Ας προσέξουμε τη διαδικασία απεικόνισης κάποιου x

$$x\xrightarrow[1\eta\ \varphi\alpha\sigma\eta]{f}y=f(x)\xrightarrow[2\eta\ \varphi\alpha\sigma\eta]{g}g(y)=g(f(x))$$

Είναι φανερό από τον τρόπο που ορίζουμε την σύνθεση το πεδίο ορισμού της αρχικά θα είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης που ξεκινά πρώτη τη διαδικασία απεικόνισης. Δηλαδή $A_{gof}\subseteq A_f$. Για να συνεχιστεί η απεικόνιση θα πρέπει η τιμή f(x) ν’ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g δηλαδή $f(x)\in A_g$. Αν για κάποιο x_o, η τιμή $f(x_o)\notin A_g$ τότε το x_o αποκλείεται από το πεδίο ορισμού της σύνθεσης. Μετά απ’ αυτά είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της σύνθεσης ορίζεται ως το σύνολο $A_{gof}=\left\{x\in A_f\ /\ f(x)\in A_g\right\}$ με την προϋπόθεση φυσικά ότι αυτό το σύνολο είναι διάφορο του κενού.



Παρατήρηση: Για δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το R αποδυκνείεται ότι το πεδίο ορισμού της σύνθεσής του είναι το R.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Για την εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης απαιτούμε:

1. Οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός

2. Οι υπόριζες παραστάσεις μη αρνητικές δηλαδή αν $y=\sqrt[\nu]{f(x)}$ πρέπει $f(x)\geq 0$.

3. Για την $f(x)=\ell n(g(x))$ απαιτούμε $g(x)>0$.

4. Για την $f(x)=\varepsilon\varphi(\varphi(x))$ απαιτούμε $\varphi(x)\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in \mathbf{Z}$.

5. Για την $f(x)=\sigma\varphi(h(x))$ απαιτούμε $h(x)\neq \kappa\pi$, $\kappa\in \mathbf{Z}$.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x}-\ell n(5-x)$ **.**

Λύση

Είναι $A_f=\{x\in R: f(x)\in R\}$. Πρέπει $x-1\geq 0$, $x\geq 0$ και $5-x>0$ οπότε $A_f=[1,5)$.

Παρατηρήσεις

- Κάποιες φορές το ενδιαφέρον μας για μια συνάρτηση περιορίζεται μόνο σ' ένα υποσύνολο Γ του πεδίου ορισμού της.
- Για συναρτήσεις πολλαπλού τύπου πεδίο ορισμού είναι η ένωση όλων των διαστημάτων που αφορούν τον κάθε τύπο της f.

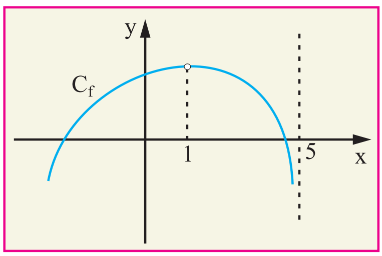
Έτσι για την $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{αν } x\in A_1 \\ f_2(x) & \text{αν } x\in A_2 \\ f_3(x) & \text{αν } x\in A_3\end{cases}$

Είναι $A_f=A_1\cup A_2\cup A_3$. Θυμίζουμε ότι για να είναι καλά ορισμένη η f πρέπει $A_1\cap A_2=\emptyset$ και $A_2\cap A_3=\emptyset$ και $A_1\cap A_3=\emptyset$.

- Το πεδίο ορισμού από την C_f προκύπτει ως το σύνολο των προβολών των σημείων της πάνω στον x΄x.

Στην γραφική παράσταση που βλέπουμε είναι:

$A_f=(-\infty,1)\cup(1,5)$



Κατηγορία – Μέθοδος 2

Εύρεση του συνόλου τιμών από τον ορισμό

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=y$ (1)

Το σύνολο τιμών είναι οι τιμές της παραμέτρου y ώστε η (1) να έχει μια τουλάχιστον λύση ως προς x μέσα στο Α.

Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha>0$, $x\in R$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Λύση

Είναι $A_f=R$. Παίρνουμε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=y \Leftrightarrow \alpha x^2+\beta x+\gamma-y=0$ (1) η οποία για να έχει λύση ως προς $x\in R$ πρέπει και αρκεί η διακρίνουσά της να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.

Είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha(\gamma-y)\geq 0 \Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\gamma+4\alpha y\geq 0 \Leftrightarrow y\geq \dfrac{-\left(\beta^2-4\alpha\gamma\right)}{4\alpha}$, αφού $\alpha>0$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[-\dfrac{\Delta}{4\alpha},+\infty\right)$, με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$.

Παρατηρήσεις

- Αυτός δεν είναι ο μοναδικός τρόπος για την εύρεση του συνόλου τιμών και ούτε πλήρης. Σ'επόμενα μαθήματα θα προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών με χρήση της μονοτονίας και της συνέχειας της συνάρτησης.
- Το σύνολο τιμών με την βοήθεια της C_f εμφανίζεται σαν το σύνολο των προβολών των σημείων της πάνω στον άξονα y΄y.

Κατηγορία – Μέθοδος 3
Γνωρίζουμε τις f, g και ζητάμε την fog

Παράδειγμα 3

Δίνεται η $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ και $g(x)=2\eta\mu x-1$.

i. Να δείξετε ότι το πεδίο ορισμού της fog είναι το R.

ii. Να βρεθεί ο τύπος της fog.

Λύση

i. Ορισμός της σύνθεσης

$A_f=\left\{x\in R: -x^2-2x+3\geq 0\right\}$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-x^2-2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Από τον πίνακα προσήμου προκύπτει ότι $x\in[-3,1]$ και $A_f=[-3,1]$.

Είναι $A_g=R$.

Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $A_{fog}=\left\{x\in R: -3\leq 2\eta\mu x-1\leq 1\right\}$

Έχουμε $-3\leq 2\eta\mu x-1\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq \eta\mu x\leq 1 \Leftrightarrow x\in R$. Άρα $A_{fog}=R$.

ii. $(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{3-2g(x)-g^2(x)}=\sqrt{3-2(2\eta\mu x-1)-(2\eta\mu x-1)^2}=$

$=\sqrt{4-4\eta\mu^2 x}=2\sqrt{1-\eta\mu^2 x}=2\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}=2|\sigma\upsilon\nu x|,\ x\in R$

Κατηγορία – Μέθοδος 4
Όταν γνωρίζουμε τις fog και g και αναζητούμε την f θέτουμε $g(x)=\omega$ και λύνουμε ως προς x.

Παράδειγμα 4

Έστω $(fog)(x)=x^3-6x^2+12x+15$, $x\in R$ **και** $g(x)=x-2$. **Να βρεθεί η f.**

Λύση

Θέτουμε $g(x)=x-2=\omega \Leftrightarrow x=\omega+2$ (1). Επειδή $x\in R$ και $(x-2)\in R$ οπότε $\omega\in R$.

Άρα $(fog)(x)=f(g(x))=x^3-6x^2+12x+15$ γίνεται

$f(\omega)=(\omega+2)^3-6(\omega+2)^2+12(\omega+2)+15$ ή

$f(\omega)=\omega^3+23$, $\omega\in R$, Επομένως $f(x)=x^3+23$, $x\in R$.

Παράδειγμα 5

Έστω $f(\ell n2x)=x+3$, **$x>0$. Να βρεθεί η f.**

Λύση

Θέτουμε $\left.\begin{matrix}\ell n2x=\omega\\ x>0,\ \omega\in R\end{matrix}\right\}\ 2x=e^{\omega}\Leftrightarrow x=\dfrac{e^{\omega}}{2}$ (1). Άρα από $f(\ell n2x)=x+3$, έχουμε:

$f(\omega)\overset{(1)}{=}\dfrac{e^{\omega}}{2}+3$ και γράφουμε $f(x)=\dfrac{e^{x}}{2}+3$, $x\in R$.

Κατηγορία – Μέθοδος 5
Όταν γνωρίζουμε τις fog, f και αναζητούμε την g
(1) Η f(g(x)) με μεταβλητή το x.
(2) Η f(g(x)) από τον τύπο της f με μεταβλητή g(x).
Εξισώνουμε τις (1), (2) λύνουμε ως προς g(x).

Παράδειγμα 6

Έστω $f(g(x))=x^4-3x^2+x-2$, $x\in R$ **και** $f(x)=4x-5$. **Αν η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το R να βρεθεί ο τύπος της.**

Λύση

Είναι $f(g(x))=x^4-3x^2+x-2$ (1) και $f(g(x))=4g(x)-5$ (2)

Από τις (1), (2) έχουμε: $4g(x)-5=x^4-3x^2+x-2 \Leftrightarrow g(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3x^2}{4}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{3}{4}$, $x\in R$.

Παράδειγμα 7

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=x^2$, $s(x)=e^x$, $p(x)=\eta\mu x$. **Εκφράστε κάθε μια από τις συναρτήσεις που ακολουθούν χρησιμοποιώντας μόνο σαν πράξη τη σύνθεση.**

i. $f(x)=e^{\eta\mu x}$ **ii.** $f(x)=\eta\mu e^x$ **iii.** $f(x)=\eta\mu x^2$

iv. $f(x)=\eta\mu^2 x$ **v.** $f(x)=\eta\mu\left(\eta\mu\left(e^{e^x}\right)\right)$ **vi.** $f(x)=e^{2\eta\mu x}$

Λύση

i. $f = sop$ **ii.** $f = pos$ **iii.** $f = pog$

iv. $f = gop$ **v.** $f = poposos$ **vi.** $f = gosop$

Όλες οι συναρτήσεις f, s, p και οποιεσδήποτε συνθέσεις μεταξύ τους έχουν πεδίο ορισμού το R.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Μέθοδος σύνθεσης συναρτήσεων πολλαπλού τύπου:

Εχουμε $f(x) = \begin{cases} f_1(x), \; x \in A_1 \\ f_2(x), \; x \in A_2 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} g_1(x), \; x \in B_1 \\ g_2(x), x \in B_2 \end{cases}$

Για την συνάρτηση της fog ορίζουμε όπου επιτρέπουν τα πεδία ορισμού διαδοχικά τις συναρτήσεις f_1og_1, f_1og_2, f_2og_1, f_2og_2.

Παράδειγμα 8

Έστω $f(x) = \begin{cases} x+1, \; x \in (-\infty, 3) \\ 5-x^2, \; x \in [3, +\infty) \end{cases}$ **και** $g(x) = \begin{cases} 2x+5, x \in (-\infty, 2] \\ 7-x, x \in (2, +\infty) \end{cases}$. **Να βρεθεί η fog.**

Λύση

Είναι $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x+1, x \in (-\infty, 3) \\ f_2(x) = 5-x^2, x \in [3, +\infty) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} g_1(x) = 2x+5, x \in (-\infty, 2] \\ g_2(x) = 7-x, x \in (2, +\infty) \end{cases}$

• $\mathbf{f_1og_1}$

$A_{f_1og_1} = \{x \in A_{g_1} = (-\infty, 2] / g_1(x) = 2x+5 \in A_{f_1}\} =$

$\{x \le 2 \text{ και } 2x+5 < 3\} = \{x \le 2 \text{ και } x < -1\} = (-\infty, -1)$

Άρα $f_1(g_1(x)) = g_1(x)+1 = 2x+5+1 = 2x+6, x < -1$

• $\mathbf{f_1og_2}$

$A_{f_1og_2} = \{x \in A_{g_2} / g_2(x) \in A_{f_1}\} = \{x \in (2, +\infty) / g_2(x) = 7-x < 3\} =$

$\{x > 2 \text{ και } x > 4\} = (4, +\infty)$. Άρα $f_1(g_2(x)) = 7-x+1 = 8-x$ με $x > 4$

• $\mathbf{f_2og_1}$

$A_{f_2og_1} = \{x \le 2 \text{ και } 2x+5 \ge 3\} = \{x \le 2 \text{ και } x \ge -1\} = [-1, 2]$

Άρα $f_2(g_1(x)) = 5 - g_1^2(x) = 5-(2x+5)^2$, $x \in [-1, 2]$

• $\mathbf{f_2og_2}$

$A_{f_2og_2} = \{x > 2 \text{ και } 7-x \ge 3\} = (2, 4]$. Άρα $f_2(g_2(x)) = 5 - g_2^2(x) = 5-(7-x)^2$, $x \in (2, 4]$

$$\text{Άρα είναι } f(g(x))=\begin{cases} 2x+6,\ x<-1 \\ 5-(2x+5)^2,\ -1\le x\le 2 \\ 5-(7-x)^2,\ 2<x\le 4 \\ 8-x,\ x>4 \end{cases}$$

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=\ell n\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Λύση

Πρέπει $x\ge 0$ και $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}>0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{x}>0 \Leftrightarrow x<1$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $A=[0,1)$.

Το σύνολο τιμών $f(A)=\{y\in R\ /\ y=f(x) \text{ με } x\in A\}$

Έχουμε $y=\ell n\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=e^y \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(e^y+1\right)=1-e^y \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1-e^y}{e^y+1}$

Επειδή $x\in[0,1)$ και $0\le\sqrt{x}<1$ άρα $0\le\frac{1-e^y}{e^y+1}<1$

Λύνουμε τις ανισώσεις $\frac{1-e^y}{e^y+1}\ge 0 \overset{e^y+1>0}{\Leftrightarrow} 1-e^y\ge 0 \Leftrightarrow e^y\le 1 \Leftrightarrow y\le 0$ (1) και

$\frac{1-e^y}{e^y+1}<1 \Leftrightarrow 1-e^y<e^y+1 \Leftrightarrow 2e^y>0 \Leftrightarrow y\in R$ (2).

Από την συναλήθευση των (1), (2) έχουμε $y\le 0$ και $f(A)=(-\infty,0]$

Άσκηση 2

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Λύση

Α΄ τρόπος : Πεδίο ορισμού της f είναι το R. Για το σύνολο τιμών έχουμε:

$$y=f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{e^x+\frac{1}{e^x}}{2} \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}=y \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x}-2e^x y+1=0 \\ y>0 \end{cases} \quad (1)$$

Θέτουμε $e^x=\omega$, $\omega>0$ και (1) γίνεται $\omega^2-2y\omega+1=0$ (2). Για να έχει λύση η (1) ως προς x αρκεί να έχει λύση η (2) ως προς ω είναι $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow 4y^2-4\ge 0 \Leftrightarrow y^2\ge 1 \Leftrightarrow y\le -1$ ή $y\ge 1$ και επειδή $y>0$ το σύνολο τιμών είναι το $[1,+\infty)$.

Β΄ τρόπος

Γνωρίζουμε ότι $x+\frac{1}{x}\ge 2$ για $x>0$ (πράγματι $x^2+1\ge 2x \Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0$ που ισχύει για $x>0$)

Οπότε $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+\frac{1}{e^{x}}\right)\overset{e^{x}=\omega}{=}\frac{1}{2}\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)\geq\frac{1}{2}\cdot 2=1$. Άρα είναι $f(x)\geq 1$.

Άσκηση 3

Να βρεθεί η συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}$ **(1) με** $x\neq 0$

Λύση

Θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$. Έτσι η (1) γίνεται: $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει το σύστημα (Σ)

$$\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x \\ 2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x \quad (3) \\ -4f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x} \quad (4) \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις (3) και (4) κατά μέλη και έχουμε:

$$-3f(x)=x-\frac{2}{x}\Leftrightarrow -3f(x)=\frac{x^{2}-2}{x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{2-x^{2}}{3x},\ x\neq 0$$

Άσκηση 4

Κατασκευάστε μια συναρτησιακή εξίσωση που να έχει λύση την συνx.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\text{συν}2x=2\text{συν}^{2}x-1$ οπότε η εξίσωση $f(2x)=2f^{2}(x)-1$ έχει σαν λύση την συνx.

Άσκηση 5

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν: $f(x)\leq x$, $x\in R$ **(1) και** $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$, $x,y\in R$ **(2) να δείξετε ότι: α. f(0) = 0 και β. f(x) = x**

Λύση

α. Από την (1) για $x=0$ είναι $f(0)\leq 0$.

Από την (2) για $x=y=0$ είναι $f(0)\leq 2f(0)\Leftrightarrow f(0)\geq 0$. Άρα τελικά $f(0)=0$ (3)

β. Έχουμε $f(x)\leq x$ (1) οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $f(x)\geq x$.

Στην (2) θέτουμε όπου y το -x και έχουμε $f(0)\leq f(x)+f(-x)$

$\Leftrightarrow 0\leq f(x)+f(-x)\Leftrightarrow -f(-x)\leq f(x)$ (4)

Στην (1) θέτουμε όπου x το - x και έχουμε $f(-x)\leq -x\Leftrightarrow -f(-x)\geq x$ (5)

Από τις (4), (5) έχουμε $f(x)\geq x$ (6). Από τις (1), (6) προκύπτει τελικά ότι $f(x)=x$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις με τύπους:

α. $f(x)=\frac{x^{2}-9}{x-3}$ και $g(x)=x+3$, **β.** $f(x)=\ell n(x^{2}-9)$ και $g(x)=\ell n(x-3)+\ell n(x+3)$

είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι, να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του R, στο οποίο είναι ίσες.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x)=\frac{1}{x^2-25}$ και $g(x)=\frac{x+5}{x-5}$ αντίστοιχα. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $\frac{f}{g}$ και να λύσετε την ανίσωση $(f+g)(x)\leq\frac{26}{x^2-25}$.

3. Να ελέγξετε αν οι συναρτήσεις $f(x)=\ell n\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ και $g(x)=-\ell n\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ είναι ίσες. Είναι η συνάρτηση f περιττή ;(**Απ.:** Είναι $A_f=A_g=R$. Θεωρείστε τη διαφορά $f(x)-g(x)$, για κάθε $x\in R$.Οι συναρτήσεις είναι ίσες)

4. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

• Οι συναρτήσεις $f(x)=x+1$ και $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ είναι ίσες.

• Η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι άρτια.

• Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ell nx^4$ έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.

• Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ δεν τέμνει τον άξονα y΄y.

5. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x)=\sqrt{|x|-2x}$ **ii.** $f(x)=\frac{2x+1}{|x|+x}$ **iii.** $f(x)=\ell n\left(\frac{1-|x|}{|x|-2}\right)$ **iv.** $f(x)=\frac{x-4}{\sqrt{x^3+x-10}}$

(**Απ.: i.** $D_f=(-\infty,0]$ **ii.** $D_f=(0,+\infty)$ **iii.** $D_f=(-2,-1)\cup(1,2)$ **iv.** $D_f=(2,+\infty)$)

6. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

i. $f(x)=|\eta\mu x|$ **ii.** $f(x)=\eta\mu|x|$ **iii.** $f(x)=2x+\frac{|x-1|}{x-1}$ **iv.** $f(x)=|x|\cdot x^2$

7. Ένα κουτί από χρυσάφι σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει τετραγωνική βάση πλευράς x και όγκο $324cm^3$. Το υλικό τις βάσεις κοστίζει $2€/cm^2$ ενώ των άλλων εδρών $1€/cm^2$. Να εκφράσετε το συνολικό κόστος κατασκευής του κουτιού συναρτήσει του x.

(**Απ.:** $f(x)=3x^2+\frac{1296}{x}$, $x>0$)

8. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x)=\ell n(x+1)$ και $g(x)=\sqrt{4-|x|}$.

Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g$, $\frac{f}{g}$, fog.

9. Να ορίσετε τη σύνθεση της συνάρτησης g με την συνάρτηση f, αν:

α. $f(x)=2x+3$ και $g(x)=\eta\mu x$

β. $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=\sqrt{x}$

γ. $f(x)=|x|$ και $g(x)=\sqrt{x}$

10. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{αν } x<2 \\ x+1, & \text{αν } x\geq 2 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} x^2-x, & \text{αν } x<3 \\ 2x, & \text{αν } x\geq 3 \end{cases}$.
Να ορίσετε τη συνάρτηση fog.

11. Αν το πεδίο ορισμού της f είναι το [-11,1] τότε να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της $f(x^2-7x+1)$. (**Απ.:** $[0,3]\cup[4,7]$)

12. Αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $[1,6]$, τότε να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f(5+2\eta\mu x)$.

13. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x-1)=x^2-7x+12$, $x\in R$. Να βρείτε τον τύπο της f.

14. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $xf(x)+f(-x)=x$ για $x\in R$.

(**Απ.:** Βλέπε την λυμένη άσκηση 3. Θέτουμε όπου x το -x. Είναι $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $x\in R$)

15. Αν $f(x+\lambda)\leq x\leq f(x)+\lambda$ για κάθε $x\in R$ και λ σταθερό αριθμό να δείξετε ότι $f(x)=x-\lambda$.

(**Υπ.:** Αξιοποιώντας την υπόθεση, να αποδείξετε ότι $f(x)\geq x-\lambda$)

16. **α.** Να δείξετε ότι $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ για τα $x>0$.

β. Έστω $f(x)=\left(9+\sqrt{80}\right)^x+\left(9-\sqrt{80}\right)^x$. **i.** Να δείξετε ότι η f είναι άρτια,

ii. Να δείξετε ότι $f(x)\geq 2$. (**Απ.:** **β.ii.** Είναι $\left(9-\sqrt{80}\right)^x=\dfrac{1}{\left(9+\sqrt{80}\right)^x}$ και αξιοποιείστε το α)

17. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της $f(x)=|\ell n|x||$ να υπολογίσετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=10^{-6}$. (**Απ.:** Τέσσερεις)

18. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει πραγματική συνάρτηση που να ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x)+f(x)+1=0$ για κάθε $x\in R$. (**Απ.:** Είναι $\Delta<0$ άρα δεν έχει λύση η εξίσωση)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού Α, τέτοιες ώστε $f^2(x)+g^2(x)=1$ για κάθε $x\in A$.

i. Αν ισχύει $\dfrac{f^4(x)}{\alpha}+\dfrac{g^4(x)}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha+\beta}$ με $\alpha,\beta\in R^*$, $\alpha+\beta\neq 0$ να δείξετε ότι $\dfrac{f^8(x)}{\alpha^3}+\dfrac{g^8(x)}{\beta^3}=\dfrac{1}{(\alpha+\beta)^3}$. ii. Να αποδείξετε ότι $|\alpha f(x)+\beta g(x)|\leq\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.