Μάθημα 4

Μονοτονία - Ακρότατα - “1 – 1” Αντίστροφη Συνάρτηση

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Μονοτονία συνάρτησης

Μια συνάρτηση f λέγεται:

Γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$

Γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

Οι γνησίως αύξουσες και οι γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις γενικά λέγονται **γνησίως μονότονες.**

Όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη (γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα) και δεν αναφέρεται το διάστημα, θα εννοούμε ότι είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

Αποδεικνύεται ότι η μονοτονία των συναρτήσεων ακολουθεί κάποιους κανόνες όσον αφορά τις πράξεις και τη σύνθεση μεταξύ των συναρτήσεων.

Έτσι, για παράδειγμα, αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες (φθίνουσες) και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα).

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι γνησίως αύξουσες σ’ένα διάστημα Δ και $f(x), g(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ακρότατα συνάρτησης

Για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι:

Παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν ισχύει :

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A .$$

Παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν ισχύει :

$$f(x) \ge f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A .$$

Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ακρότατα.** Είναι φανερό ότι μία συνάρτηση μπορεί να μην έχει ακρότατα.

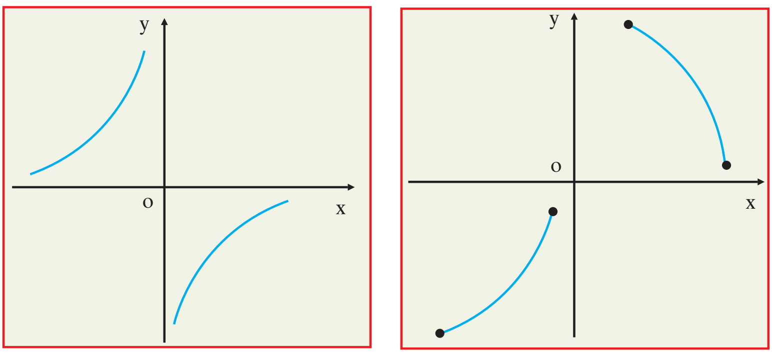
Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης είναι κλειστό διάστημα, τα άκρα του είναι τα ακρότατα της συνάρτησης

Συνάρτηση 1–1

Μια συνάρτηση λέγεται **1–1 (ένα προς ένα)** στο πεδίο ορισμού της αν όταν και μόνον όταν για οποιαδήποτε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της με $x_1 \neq x_2$ έπεται $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Συνέπεια του ορισμού είναι η πρόταση:
Μια συνάρτηση είναι **1–1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει: $x_1 = x_2$

Αν μια συνάρτηση είναι 1–1, τότε σε κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της αντιστοιχεί ένα μόνο στοιχείο x του πεδίου ορισμού της. Γραφικά αυτό σημαίνει ότι κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x'x, δηλαδή της μορφής y = α, τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο.

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Δ συμπεραίνουμε ότι είναι και 1-1 στο Δ (επειδή λαμβάνει κάθε τιμή της ακριβώς μια φορά) .



Το αντίστροφο δεν ισχύει , για παράδειγμα οι παραπάνω συναρτήσεις είναι 1 - 1 αφού κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τις γραφικές τους παραστάσεις το πολύ σε ένα σημείο και όμως δεν είναι γνησίως μονότονες.

Αντίστροφη συνάρτηση

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α και σύνολο τιμών f(A) η οποία είναι 1-1 στο Α.
Ορίζεται τότε η συνάρτηση f^{-1} με πεδίο ορισμού f(A) και σύνολο τιμών Α και ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

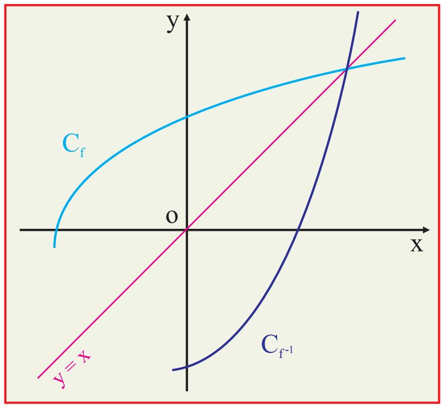
Η f^{-1} λέγεται **αντίστροφη** συνάρτηση της f.

Σύμφωνα με τον τρόπο που ορίζεται η αντίστροφη μιας συνάρτησης f , έχουμε ότι:

i. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f, και
ii. Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού Α της f.
iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν το ίδιο είδος γνήσιας μονοτονίας.

Η σύνθεση δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι η ταυτοτική συνάρτηση. Έτσι, αν f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση,με πεδίο ορισμού Α και σύνολο τιμών f(A) ισχύουν :

$f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε $x \in A$ $\qquad$ $f(f^{-1}(y)) = y$, για κάθε $y \in f(A)$



Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, δηλαδή την ευθεία με εξίσωση $y=x$.
Αποτέλεσμα αυτού, είναι ότι οι εξισώσεις :

$f(x)=f^{-1}(x), f(x)=x$ ή $(f^{-1}(x)=x)$ είναι ισοδύναμες στο σύνολο $A\cap f(A)$,όπου Α το πεδίο ορισμού της f μόνο όταν η f (ή f^{-1}) είναι γνησίως αύξουσα. (Βλέπε στις λυμένες ασκήσεις, άσκηση 9)
Αν γνωρίζουμε δε, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, μπορούμε να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

Σχόλιο: Μια συνάρτηση μπορεί να μην αντιστρέ-φεται στο πεδίο ορισμού της άλλά σε ένα υποσύνολο του π.χ. $f(x)=x^2$ δεν αντιστρέφεται στο R (όχι 1 – 1) όμως αντιστρέφεται στο $(-\infty,0)$ και στα διαστήματα $(0,+\infty)$ και (1 – 1).

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1
Για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη εργαζόμαστε ως εξής :
Θεωρούμε τυχαία $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$ και προσπαθούμε να "δημιουργήσουμε" μια ανισοτική σχέση μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$. Αν καταλήξουμε σε $f(x_1)<f(x_2)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, ενώ αν αν καταλήξουμε σε $f(x_1)>f(x_2)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Α.

Παράδειγμα 1

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους : $f(x)=2x^3+1$ και $g(x)=\frac{\sqrt{4-x}}{3}$
Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το R. Έστω $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$.

Τότε $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3+1<2x_2^3+1 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.
Το πεδίο ορισμού της g είναι τα $x\in R$ για τα οποία ισχύει $4-x\geq 0$
Είναι $4-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 4$ οπότε $A_g=(-\infty,4]$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Έστω μια συνάρτηση f με $y=f(x)$ ορισμένη στο διάστημα Δ.

Βρίσκουμε το πρόσημο του λόγου $\lambda=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ με $x_1,x_2\in\Delta$ και $x_1\neq x_2$

Αν $\lambda>0$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Αν $\lambda<0$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Αν $\lambda=0$ η συνάρτηση είναι σταθερή στο Δ.

Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{3x}{x+2}$. Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Πρέπει $x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq -2$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A_f=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$

Έστω $x_1,x_2\in A_f$ με $x_1\neq x_2$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1<x_2$) .

Είναι: $\lambda=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{\dfrac{3x_2}{x_2+2}-\dfrac{3x_1}{x_1+2}}{x_2-x_1}=\dfrac{6}{(x_2+2)(x_1+2)}$

Για $x_1<x_2<-2$ είναι $x_1+2<0$ και $x_2+2<0$ οπότε $\lambda>0$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-2)$. Αν $-2<x_1<x_2$ τότε $x_1+2>0$ και $x_2+2>0$ οπότε $\lambda>0$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-2,+\infty)$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα που αποτελούν το πεδίο ορισμού της.

Δεν μπορούμε όμως να ισχυριστούμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της αφού για παράδειγμα απο $-4<1$ παίρνουμε $f(-4)=6>f(1)=1$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα κατά διαστήματα.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Για να προσδιορίσουμε τα ακρότατα μιάς συνάρτησης (αν έχει τέτοια) εργαζόμαστε ως εξής:

Προσδιορίζουμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. Αν για παράδειγμα $f(A)=[k,\lambda]$ είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης το k είναι το ελάχιστο και το λ το μέγιστο, ενώ αν $f(A)=[k,+\infty)$ ή $[k,\lambda)$ το κ είναι το ελάχιστο της συνάρτησης ενώ η συνάρτηση δεν έχει μέγιστο. Ανάλογα ισχύουν όταν $f(A)=(-\infty,\lambda]$ ή $(\kappa,\lambda]$ ή ....

Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=3+\sqrt{1-x}$.Να προσδιορίσετε τα ακρότατα της f (αν υπάρχουν).

Λύση

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Πρέπει $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Άρα $A_f = (-\infty, 1]$.

Επομένως : $x \leq 1 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow 3+\sqrt{1-x} \geq 3 \Leftrightarrow f(x) \geq 3$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $f(A) = [3, +\infty)$ και επειδή $f(1) = 3$ η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή το 3 για $x = 1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Για να δείξουμε, ότι μία συνάρτηση είναι 1-1:

1. Δεχόμαστε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ και δείχνουμε, ότι $x_1 = x_2$ ή δεχόμαστε ότι $x_1 \neq x_2$ και δείχνουμε, ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$

2. Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.

3. Δείχνουμε ότι η εξίσωση f(x) = y έχει μοναδική λύση ως προς x για κάθε y που ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

4. Εκμεταλλευόμαστε την γραφική παράσταση (αν είναι γνωστή).

Παράδειγμα 4

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ **είναι 1-1.**

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το R - { - 1 }. Έχουμε:

Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{2x_1}{x_1+1} = \dfrac{2x_2}{x_2+1} \Leftrightarrow 2x_1(x_2+1) = 2x_2(x_1+1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x_1x_2 + 2x_1 = 2x_1x_2 + 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Επομένως η f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Για να προσδιορίσουμε την αντίστροφη μια συνάρτησης f κάνουμε τα εξής βήματα:

i. Προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Δείχνουμε ότι η f είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη.

iii. Θέτουμε y = f(x) και λύνουμε ως προς x για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης. Οι περιορισμοί για το y που τυχον θα προκύψουν μας δίνουν το σύνολο τιμών της συνάρτησης f που είναι και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1}.

Παράδειγμα 5

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2e^x - 1$**. Να βρεθεί η αντίστροφή της** f^{-1} **(εφόσον υπάρχει).**

Λύση

Είναι $A_f = R$. Εξετάζουμε αν η f είναι 1-1.

Για κάθε $x_1, x_2 \in R$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2e^{x_1} - 1 = 2e^{x_2} - 1 \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Άρα η f είναι 1-1 και συνεπώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση αυτής. Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$

Είναι: $y = f(x) \Leftrightarrow y = 2e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = \dfrac{y+1}{2}$ (1)

Επειδή $e^x > 0$ πρέπει $\dfrac{y+1}{2} > 0 \Leftrightarrow y > -1$. Έτσι η (1) γίνεται $x = \ln\dfrac{y+1}{2}$ με $y > -1$ και ο τύπος της αντίστροφης είναι $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{x+1}{2}$ με $x > -1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Επίλυση εξισώσεων

Αν η f είναι 1-1 ισχύει η ισοδυναμία $f(g(\lambda)) = f(h(\lambda)) \Leftrightarrow g(\lambda) = h(\lambda)$

Επίλυση ανισώσεων

Αν η f είναι γνησίως μονότονη ισχύει η ισοδυναμία

$$f(g(\lambda)) < f(h(\lambda)) \Leftrightarrow \begin{cases} g(\lambda) < h(\lambda) \text{ αν η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα} \\ g(\lambda) > h(\lambda) \text{ αν η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα} \end{cases}$$

Παράδειγμα 6

Έστω $f(x) = \alpha^x - x$, με $0 < \alpha < 1$ και $x \in R$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $\alpha^{\lambda^3 - \lambda} + (\lambda^2 - 1) = \alpha^{\lambda^2 - 1} + \lambda^3 - \lambda$.

Λύση

i. Η $f(x) = \alpha^x + (-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R διότι αν $x_1 < x_2$ τότε $\left.\begin{matrix} \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \\ -x_1 > -x_2 \end{matrix}\right\}$ οπότε

$\alpha^{x_1} - x_1 > \alpha^{x_2} - x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ii. Η εξίσωση $\alpha^{\lambda^3 - \lambda} + (\lambda^2 - 1) = \alpha^{\lambda^2 - 1} + \lambda^3 - \lambda \Leftrightarrow \alpha^{\lambda^3 - \lambda} - (\lambda^3 - \lambda) = \alpha^{\lambda^2 - 1} - (\lambda^2 - 1) \Leftrightarrow$

$f(\lambda^3 - \lambda) = f(\lambda^2 - 1)$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R είναι και 1-1 στο R οπότε:

$\lambda^3 - \lambda = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Εύρεση του τύπου της αντίστροφης f^{-1} όταν γνωρίζουμε μια συναρτησιακή σχέση για την f.

Παράδειγμα 7

Δίνεται $f:R\to R$ που ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+f(x)+x=0$ (1), για κάθε $x\in R$.

Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

Λύση

Έστω $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $f^3(x_1)+f(x_1)=f^3(x_2)+f(x_2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}-x_1=-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$.
Άρα η f είναι 1-1 στο R οπότε αντιστρέφεται.

Έστω $f(x)=y$ η εξίσωση γίνεται $y^3+y+x=0\Leftrightarrow x=-y-y^3$, $y\in R$.

Άρα $f^{-1}(x)=-x-x^3$, $x\in R$.

Παράδειγμα 8

Για την $f:R\to R$ ισχύουν τα παρακάτω:

i. $f(R)=R$, **ii.** $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$, $x, y\in R$ **(1), iii. Η f είναι 1-1 στο R.**

Να δείξετε ότι $f^{-1}(\alpha x+\beta y)=\alpha f^{-1}(x)+\beta f^{-1}(y)$.

Λύση

Στη σχέση (1), θέτουμε όπου x, $f^{-1}(x)$ και όπου y, $f^{-1}(y)$ οπότε έχουμε:

$$f\left(\alpha f^{-1}(x)+\beta f^{-1}(y)\right)=\alpha f\left(f^{-1}(x)\right)+\beta f\left(f^{-1}(y)\right)=\alpha x+\beta y$$

(αφού $f(f^{-1}(x))=x$ και $f(f^{-1}(y))=y$ για κάθε $x,y\in R$).

Επομένως $f^{-1}\left(f\left(\alpha f^{-1}(x)+\beta f^{-1}(y)\right)\right)=f^{-1}(\alpha x+\beta y)\Leftrightarrow \alpha f^{-1}(x)+\beta f^{-1}(y)=f^{-1}(\alpha x+\beta y)$.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x+\ln x$. Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$. Έστω $0<x_1<x_2$ (1) και επειδή η συνάρτηση lnx είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ έχουμε $\ln x_1<\ln x_2$ (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) παίρνουμε : $x_1+\ln x_1<x_2+\ln x_2$ που σημαίνει ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Άσκηση 2

Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το R αφού $e^x+1>0$, για κάθε $x\in R$.

Είναι: $\lambda = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{\dfrac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}-\dfrac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}}{x_2-x_1} = \dfrac{2\left(e^{x_2}-e^{x_1}\right)}{x_2-x_1}$

Αν $x_1<x_2$ τότε και $e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_2}-e^{x_1}>0$, οπότε είναι $\lambda>0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}+f(x)+3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R ισχύει:

$f(x_1)<f(x_2)$ (1), για κάθε $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$

Η συνάρτηση e^x είναι και αυτή γνησίως αύξουσα και επειδή είναι $f(x_1)<f(x_2)$ θα είναι και

$e^{f(x_1)}<e^{f(x_2)}$ (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατα μέλη και έχουμε:

$$e^{f(x_1)}+f(x_1)<e^{f(x_2)}+f(x_2) \Leftrightarrow e^{f(x_1)}+f(x_1)+3<e^{f(x_2)}+f(x_2)+3 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο R.

Άσκηση 4

α. Να δείξετε ότι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση f έχει το πολύ ένα σημείο μηδενισμού στο πεδίο ορισμού της f και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του συμπεράσματος.

β. Να λυθεί η εξίσωση $3^x+4^x=5^x$ (1)

Λύση

α. Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση f είναι 1-1, που σημαίνει ότι, για κάθε x_1,x_2 με $x_1\neq x_2$ ισχύει $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Αν η f έχει δύο σημεία μηδενισμού, έστω x_1,x_2, με $x_1\neq x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)=0$, που είναι άτοπο. Επομένως η f έχει το πολύ ένα σημείο μηδενισμού στο πεδίο ορισμού της και αυτό γεωμετρικά σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα x'x το πολύ σε ένα σημείο.

β. Η εξίσωση (1) έχει προφανή λύση την $x=2$ αφού $3^2+4^2=5^2$. Έχουμε:

$$3^x+4^x=5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1=0$$ επειδή $5^x\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$, $x\in R$ και θα δείξουμε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Είναι $x_1<x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}$ (1) και $x_1<x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}$ (2)

διότι η συνάρτηση α^x με $0<\alpha<1$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}-1>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}-1\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R και σύμφωνα με το α' ερώτημα έχει το πολύ μία ρίζα. Επειδή $g(2)=0$, το 2 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x)=0$.

Άσκηση 5

Έστω συνάρτηση f με σύνολο τιμών το R και η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)}$.

Να δείξετε ότι η g έχει μέγιστη τιμή τον αριθμό 1.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $g(x)\le 1$, για κάθε πραγματικό αριθμό x και ότι το 1 είναι η τιμή της συνάρτησης g.

Είναι $g(x)\le 1\Leftrightarrow \dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)}\le 1\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1\ge 0\Leftrightarrow (f(x)-1)^2\ge 0$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.Επειδή η συνάρτηση f έχει πεδίο τιμών το R, υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0)=1$ οπότε $g(x_0)=1$.

Άρα υπάρχει $x_0\in R$ τέτοιο ώστε $g(x)\le 1=g(x_0)$ για κάθε $x\in R$. Επομένως, η συνάρτηση g έχει μέγιστη τιμή το 1.

Άσκηση 6

Να εξετασθεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1-1.

i. $f(x)=2x+1$ **ii.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ **iii.** $f(x)=5x^2+1$ **iv.** $f(x)=(x+1)(x-4)+3$

Λύση

i. Είναι $A_f=R$. Είναι $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Leftrightarrow 2x_1=2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ οπότε η f είναι 1-1 στο R.

ii. Είναι $A_f=R-\{1\}$.

Είναι: $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \dfrac{x_1+1}{x_1-1}=\dfrac{x_2+1}{x_2-1}\Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-1)=(x_1-1)(x_2+1)\Leftrightarrow$

$x_1x_2-x_1+x_2-1=x_1x_2+x_1-x_2-1\Leftrightarrow 2x_1=2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$

οπότε η f είναι 1-1 στο $R-\{1\}$

iii. Είναι $A_f=R$ με $f(-1)=f(1)=6$ και επειδή $-1\ne 1$, η f δεν είναι 1-1 στο R.

iv. Είναι $A_f=R$ με $f(-1)=f(4)=3$ και επειδή $-1\ne 4$, η f δεν είναι 1-1 στο R.

Άσκηση 7

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(\ln x)$.
Να βρεθεί η αντίστροφή της συνάρτηση , εφόσον αυτή υπάρχει.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι τα $x\in R$ για τα οποία ισχύουν:

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x>\ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $(1,+\infty)$. Για να είναι μια συνάρτηση αντιστρέψιμη πρέπει να είναι 1-1, δηλαδή να ισχύει : αν $f(x_1)=f(x_2)$ τοτε $x_1=x_2$

Θεωρούμε: $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \ln(\ln x_1)=\ln(\ln x_2)\Leftrightarrow \ln x_1=\ln x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ που σημαίνει ότι η f είναι αντιστρέψιμη στο R.

Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $y=\ln(\ln x)$ ως πρός x.

Είναι $y=\ln(\ln x)\Leftrightarrow e^y=\ln x\Leftrightarrow x=e^{e^y}$ και εφόσον $x>1$ έχουμε $e^{e^y}>1\Leftrightarrow e^{e^y}>e^0\Leftrightarrow e^y>0$, που ισχύει για κάθε y πραγματικό . Επομένως ο τύπος της αντίστροφης είναι $f^{-1}(y)=e^{e^y}$ με $y\in R$.

Επειδή ο συμβολισμός ανεξάρτητης μεταβλητής δεν έχει σημασία και επειδή συνηθίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή να συμβολίζεται με x , γράφουμε τον τύπο της f^{-1} με μεταβλητή το x :

οπότε $f^{-1}(x)=e^{e^x}$ με $x\in R$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις των συναρτήσεων με τύπους :

α. $f(x)=x^2+3,\ x<0$ **και** **β.** $g(x)=3x^3+1$

Λύση

α. Είναι $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1^2+3=x_2^2+3\Leftrightarrow x_1^2=x_2^2\overset{x<0}{\Leftrightarrow}x_1=x_2$ οπότε η f είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $y=x^2+3$ ως πρός x.

Έχουμε $y=x^2+3,\ x<0\Leftrightarrow x=-\sqrt{y-3},\ x<0,\ y\geq 3$

Επομένως ο τύπος της αντίστροφης είναι: $f^{-1}(x)=-\sqrt{x-3}$ με $x\geq 3$

β. Η g είναι 1-1στο R αφού:

$g(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow 3x_1^3+1=3x_2^3+1\Leftrightarrow 3x_1^3=3x_2^3\Leftrightarrow x_1^3=x_2^3\Leftrightarrow x_1=x_2$

Άρα η g αντιστρέφεται και για τον τύπο της αντίστροφής της έχουμε:

$$y=3x^3+1\Leftrightarrow 3x^3=y-1\Leftrightarrow x=\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y-1}{3}}, & y\geq 1 \\ -\sqrt[3]{-\dfrac{y-1}{3}}, & y<1 \end{cases}$$

Επομένως $g^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{3}}, & x\geq 1\\ -\sqrt[3]{-\dfrac{x-1}{3}}, & x<1\end{cases}$

Ασκηση 9

α. Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$ με σύνολο τιμών το R, η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $f(x)=f^{-1}(x)$ (1) και $f(x)=x$ (2) είναι ισοδύναμες.

β. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{4x^3-1}{3}$ και στη συνέχεια τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

Λύση

α. Δύο εξισώσεις λέγονται ισοδύναμες όταν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται.

-Έστω ότι $x_0\in R$ είναι λύση της (1).

Τότε $f(x_0)=f^{-1}(x_0)$, οπότε $f(f(x_0))=f(f^{-1}(x_0))\Leftrightarrow f(f(x_0))=x_0$ (3)

- Αν $f(x_0)>x_0$ τότε $f(f(x_0))>f(x_0)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως $f(f(x_0))>x_0$, που είναι άτοπο λόγω της (3).
- Αν $f(x_0)<x_0$ τότε $f(f(x_0))<f(x_0)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως $f(f(x_0))<x_0$, που είναι άτοπο λόγω της (3).

Άρα $f(x_0)=x_0$, οπότε ο x_0 είναι λύση της (2).

-Έστω ότι $x_0\in R$ είναι λύση της (2).

Τότε $f(x_0)=x_0$ (3) οπότε $f^{-1}(f(x_0))=f^{-1}(x_0)\Leftrightarrow x_0=f^{-1}(x_0)$ (4).

Από (3) και (4) έχουμε ότι $f(x_0)=f^{-1}(x_0)$ δηλαδή ο x_0 είναι λύση της (1). Άρα οι (1), (2) είναι ισοδύναμες.

β. $A_f=R$

Για $x_1,x_2\in R$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow 4x_1^3<4x_2^3\Leftrightarrow 4x_1^3-1<4x_2^3-1\Leftrightarrow\frac{4x_1^3-1}{3}<\frac{4x_2^3-1}{3}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και επομένως 1-1 στο R οπότε αντιστρέφεται.

Έχουμε $y=\dfrac{4x^3-1}{3}\Leftrightarrow x^3=\dfrac{3y+1}{4}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{3y+1}{4}},\ y\geq-\dfrac{1}{3}$ ή $x=-\sqrt[3]{-\dfrac{3y+1}{4}},\ y<-\dfrac{1}{3}$

οπότε $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{3x+1}{4}}, & x\geq -\dfrac{1}{3}\\ -\sqrt[3]{-\dfrac{3x+1}{4}}, & x<-\dfrac{1}{3}\end{cases}$.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών των f και f^{-1} πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$. Σύμφωνα με το α ερώτημα είναι:

$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow 4x^3-3x-1=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-\dfrac{1}{2}$.

Επομένως τα κοινά σημεία των C_f, $C_{f^{-1}}$ είναι τα $A(1,f(1))$, $B\left(-\dfrac{1}{2},f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$ δηλαδή τα

$A(1,1)$ και $B\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

Παρατήρηση

Οι εξισώσεις $f^{-1}(x)=f(x)$ (1) και $f(x)=x$ (2) είναι ισοδύναμες μόνο όταν η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για παράδειγμα, της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, η αντίστροφη είναι $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}$ και η $f(x)=f^{-1}(x)$ έχει λύση για κάθε $x\in R^*$, ενώ η $f(x)=x\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=x\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.

Επομένως δεν είναι ισοδύναμες οι (1) και (2).

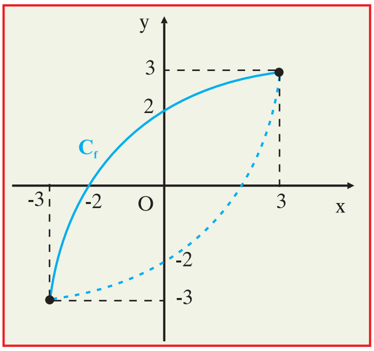
Ασκηση 10

Το διπλανό σχήμα παριστάνει μια συνάρτηση f η οποία είναι 1-1 στο [-3,3].

Να προσδιορίσετε την τιμή $f^{-1}(0)$.

Λύση

Επειδή $f(-2)=0$ έχουμε $f^{-1}(0)=f^{-1}(f(-2))=-2$



Ασκηση 11

Για τη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει η ιδιότητα $f^2(x)\leq f(x)f(1-x)$ για κάθε $x\in R$ (1).

Να δείξετε, ότι η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

Λύση

Η σχέση (1) για $x=0$ γίνεται: $f^2(0)\leq f(0)f(1)$ (2) και για $x=1$ γίνεται: $f^2(1)\leq f(1)f(0)$ (3)

Προσθέτουμε τις (2) και (3) κατά μέλη και έχουμε :

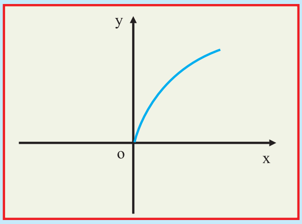
$f^2(0)+f^2(1)\le 2f(0)f(1) \Leftrightarrow f^2(0)+f^2(1)-2f(0)f(1)\le 0 \Leftrightarrow (f(0)-f(1))^2 \le 0 \Leftrightarrow f(0)=f(1)$.
Άρα η f δεν είναι 1-1 και συνεπώς δεν αντιστρέφεται.

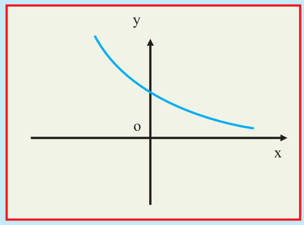
Ε. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

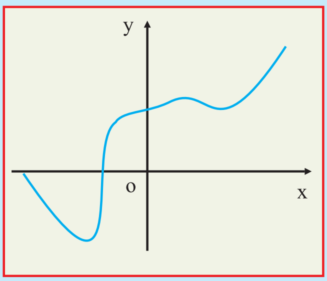
1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=4-4x+x^2$. Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία.

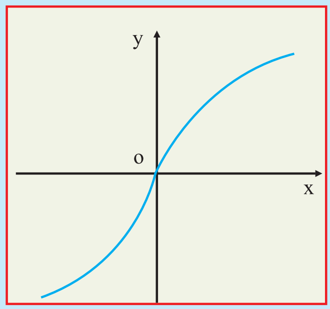
(**Απ.:** Η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$)

2. Ποια απο τις παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι γνησίως μονότονη









(**Απ.:** Η τρίτη)

3. Να αποδειχθεί, ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ έχει μέγιστο το 3 και ελάχιστο το $\dfrac{1}{3}$

(**Υπ.:** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.)

4. Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση f με $f(x)=|x-3|+x$

(**Απ.:** Είναι $f(x)=\begin{cases} 3, & x<3 \\ 2x-3, & x\ge 3 \end{cases}$ οπότε είναι σταθερή στο $(-\infty,3)$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$. Για κάθε $x\in(-\infty,3]$ παρουσιάζει ελάχιστο το 3)

5. Να εξετασθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση f με $f(x)=\log\left(2+\sqrt{1+x^2}\right)$

(**Υπ.-Απ.:** $D_f=R$ Για την μονοτονία να διακρίνετε περιπτώσεις, αν $x_1<x_2<0$ και αν $0\le x_1<x_2$.
Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ Για τα ακρότατα,

για κάθε $x \in R$, $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow ...$ και κατασκευαστικά, βρείτε το σύνολο τιμών της. Για $x=0$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0)=\ell og3$)

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & αν\ x \leq 1 \\ x^2, & αν\ x>1 \end{cases}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
ii. Να βρείτε την αντίστροφη της f.

(**Υπ.:** Διακρίνετε περίπτωσεις: Αν $x_1 < x_2 \leq 1$, αν $1 < x_1 < x_2$ και αν $x_1 \leq 1 < x_2$)

7. Να αποδειχθεί, ότι:
i. Αν f,g είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις σε διάστημα Δ τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
ii. Αν f,g είναι γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις σε διάστημα Δ τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

(**Υπ.:** Αξιοποιείστε τους ορισμούς της μονοτονίας)

8. i. Να αποδειχθεί, ότι, αν οι συναρτήσεις f,g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, τότε η συνάρτηση fog (αν ορίζεται), είναι γνησίως αύξουσα.
ii. Να αποδειχθεί, ότι, αν οι συναρτήσεις f,g είναι διαφορετικού είδους μονοτονίας , τότε η συνάρτηση fog (αν ορίζεται), είναι γνησίως φθίνουσα.

(**Υπ.:**Ομοίως με την 7)

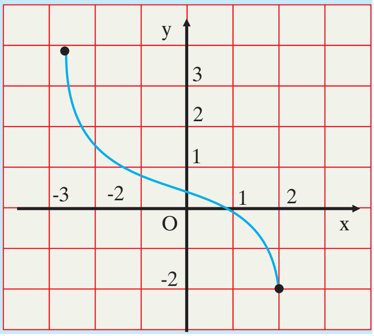
9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ και $g(x)=1-\ln x$. Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $f^{-1}og$.

(**Απ.:** $A_f=R$, $A_g=(0,+\infty)$ $f^{-1}(x)=\ell n\dfrac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$, $A_{f^{-1}og}=(1,e)$ με $(f^{-1}og)(x)=\ell n\dfrac{1-\ell nx}{\ell nx}$)

10. Έστω η συνάρτηση $f:R \to R$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο R και για την οποία ισχύει $f(f(x))=x$ για κάθε $x \in R$. Να αποδειχθεί, ότι : $f(x)=x$.

(**Απ.:**Εστω, ότι υπάρχει $x_0 \in R$ έτσι ώστε $f(x_0)>x_0$ (1). Επειδή η $f \uparrow$ έχουμε $f(f(x_0))>f(x_0)$ (2). Από (1) και (2) έχουμε $f(f(x_0))>x_0$, που είναι άτοπο λόγω υπόθεσης.Ανάλογα αν υπάρχει $x_0 \in R$: $f(x_0)<x_0$ καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $f(x)=x$, για κάθε $x \in R$)

11. Η διπλανή γραφική παράσταση παριστάνει την 1 - 1 συνάρτηση f.
Ποιο είναι το ολικό μέγιστο της συνάρτησης f^{-1} ;
(**Υπ.:**Θυμηθείτε ποιο είναι το σύνολο τιμών της f^{-1} . Το μέγιστο είναι το 2)



12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(2x-3)$, $g(x)=\sqrt{x-2}+3$

α. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f^{-1} και g^{-1}.

β. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f^{-1}\circ g^{-1}$ και $g^{-1}\circ f^{-1}$

(**Απ.:** $A_f=\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$, $A_g=[2,+\infty)$, **α.** $f^{-1}(x)=\frac{e^x+3}{2}$, $x\in R$, $g^{-1}(x)=(x-3)^2+2$, $x\in[3,+\infty)$

β. $(f^{-1}og^{-1})(x)=\frac{e^{(x-3)^2}+3}{2}$, $x\in[3,+\infty)$ $(g^{-1}of^{-1})(x)=\left(\frac{e^x+3}{2}-3\right)^2+2$, $x\in[\ell n3,+\infty)$)

13. Θεωρούμε συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(f(x))=x^2-x+1$, για κάθε $x\in R$

Να αποδείξετε ότι : **α.** $f(1)=1$, **β.** Η συνάρτηση $g(x)=1+x^2-xf(x)$ δεν είναι 1-1.

(**Απ.: α.** Από τη δοσμένη σχέση για $x=1$ έχουμε: $f(f(1))=1$ και για $x=f(1)$ έχουμε: $f(f(f(1)))=f^2(1)-f(1)+1$ οπότε $f(1)=f^2(1)-f(1)+1\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow f(1)=1$.

β. Βρείτε το $g(0)$ και το $g(1)$)

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

1. Για τη συνάρτηση f ισχύει η σχέση : $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R$ (1)

Να δείξετε ότι:

i. $f(1)=0$ **ii.** $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

iii. Με την παραδοχή, ότι η μονάδα είναι η μοναδική τιμή του x με $f(x)=0$, να δείξετε ότι αν s,t είναι διακεκριμένοι θετικοί, τότε $f(s)\neq f(t)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα $(f\,o\,f)(x)=x^2-x+1$ για κάθε $x\in R$.

Να δείξετε ότι:

i. $f(1)=1$ **ii. η συνάρτηση $g:R\to R$ με $g(x)=x^2-x\cdot f(x)+1$ δεν αντιστρέφεται.**

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{2\cdot 10^x+10^{2x}}{1+10^x}$, $x\in R$ και $g(x)=\frac{10^x+10^{2x}}{1+10^x}$, $x\in R$

i. Να δείξετε ότι η g(x) είναι 1 – 1 και να βρείτε την αντιστροφή της.

ii. Να βρεθεί η συνάρτηση $h(x)=f\,o\,g^{-1}(x)$.