Μάθημα 5

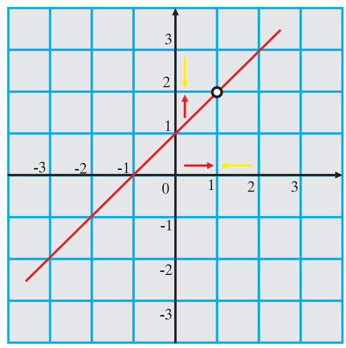
Όριο συνάρτησης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Για την "τοπική" μελέτη μιας συνάρτησης f ενδιαφέρον έχει η συμπεριφορά της συνάρτησης γύρω απο κάποια θέση x_0 (δηλαδή όταν το x βρίσκεται πολύ κοντά στο x_0) ή στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1},\ x\neq 1$

Η παραπάνω συνάρτηση ενώ δεν ορίζεται για x = 1, όμως μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της γύρω και πολύ κοντά στη θέση x = 1.



Παρατηρούμε ότι :

Αν το x πλησιάζει το 1 **απο τα αριστερά** , το f(x) πλησιάζει τον αριθμό 2 με $f(x)<2$.

Αν το x πλησιάζει το 1 **απο τα δεξιά** ,το f(x) πλησιάζει πάλι τον αριθμό 2 με $f(x)>2$.

Λέμε τότε ότι **το όριο της f όταν το x τείνει στο 1 είναι το 2** , και συμβολικά γράφουμε:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

Γενικότερα, ο συμβολισμός $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ σημαίνει ότι όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο x_0 τότε το f(x) παίρνει τιμές κοντά στο $\ell\in R$.

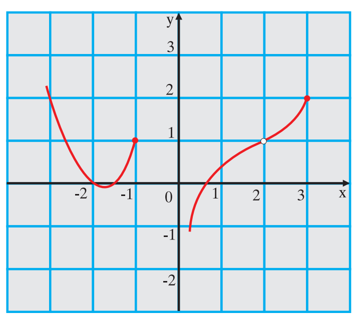
Παρατήρηση :

Απο τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι φανερό οποιοδήποτε όριο της.

Για παράδειγμα στο διπλανό σχήμα παρατηρήστε ότι:

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to -2} f(x)=0$

Παρατηρήστε ότι τα - 2,- 1,3 ανήκουν στο πεδίο ορισμού A της f , ενώ το 2 δεν ανήκει στο A, αλλά υπάρχουν σημεία του A κοντά στο $x=2$.



Όρια όπως $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$,δεν έχουν νόημα, αφού για τους αριθμούς $-\frac{1}{2}$ και 4 που δεν ανήκουν στο A δεν υπάρχουν και σημεία του A κοντά σ'αυτά.
Επομένως:
Αν f είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού A τότε το όριο της f στο x_0 έχει νόημα αν :
το x_0 ανήκει στο A και υπάρχουν σημεία του A κοντά στο x_0.
το x_0 δεν ανήκει στο A αλλά υπάρχουν σημεία του A κοντά στο x_0.
Τα παραπάνω συμβαίνουν αν το x_0 είναι τουλάχιστον ανοικτό άκρο του πεδίου ορισμού της f.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\frac{1}{x-1}$.
Αν το x βρίσκεται πολύ κοντά στο 1 (ο παρονομαστής είναι ένας αριθμός κοντά στο 0) τότε η f θα λαμβάνει οπωσδήποτε **πολύ μεγάλες τιμές κατ'απόλυτη τιμή.**
Ειδικότερα ,αν το x βρίσκεται πολύ κοντά στο 1 και είναι $x>1$(ο παρονομαστής είναι ένας αριθμός κοντά στο 0 θετικός), τότε οι τιμές της f θα είναι πάρα πολύ μεγάλοι θετικοί αριθμοί.
Λέμε τότε ότι :

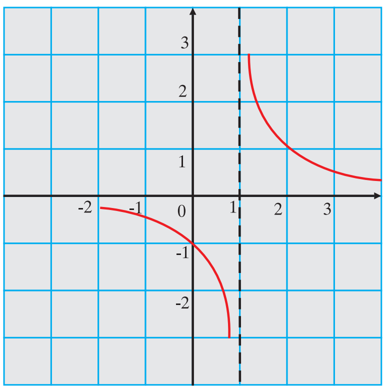
"η f έχει όριο το $+\infty$ όταν το x τείνει στο 1 απο τα δεξιά " και γράφουμε : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$
Αν το x βρίσκεται πολύ κοντά στο 1 και είναι $x<1$(ο παρονομαστής είναι ένας αριθμός αρνητικός), τότε οι τιμές της f θα είναι αρνητικές.
Λέμε τότε ότι :

" η f έχει όριο το $-\infty$ όταν το x τείνει στο 1 απο τα αριστερά " και γράφουμε : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$.

Τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ονομάζονται **πλευρικά όρια** της f στη θέση $x=1$.

Αν ένα τουλάχιστον απο τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης στη θέση x_0 είναι άπειρο $(\pm\infty)$ τότε η γραφική παράσταση της f έχει **κατακόρυφη ασύμπτωτη** την ευθεία με εξίσωση $x=x_0$.

Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x-1}$ που έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=1$, τα πλευρικά όρια ερμηνεύονται γραφικά στο διπλανό σχήμα .



Αν τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης f σε κάποια θέση $x=x_0$ είναι ίσα τότε λέμε ότι υπάρχει το όριο της f στη θέση $x=x_0$ το οποίο συμβολίζουμε με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Τότε ισχύει : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
Αν τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης f σε κάποια θέση $x=x_0$ δεν είναι ίσα τότε λέμε ότι **δεν υπάρχει το όριο της f στη θέση $x=x_0$.**

Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x-1}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$,οπότε συμπεραίνουμε ότι το όριο της f στη θέση $x=1$ δεν υπάρχει.

Παρατήρηση :

Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$ μπορούμε να τα “χειριζόμαστε” σε αρκετές περιπτώσεις ως αριθμούς με τα πρόσημά τους να παίζουν τον ίδιο ρόλο με αυτά των αριθμών.

Όλες οι πράξεις μεταξύ του $\pm\infty$ και πραγματικών αριθμών (εκτός του μηδενός) ορίζονται με τον προφανή τρόπο.

Ισχύει για παράδειγμα,

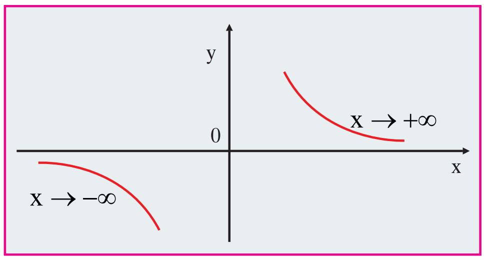
$(+\infty)-2002=+\infty$, $(-\infty)-1960=-\infty$, $(-2)\cdot(-\infty)=+\infty$, $\dfrac{+\infty}{100}=+\infty$, $(-\infty)^{10}=+\infty$.

Υπάρχουν όμως και πράξεις που δεν είναι επιτρεπτές. Αυτές είναι οι :

$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(+\infty)-(+\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$, $(+\infty)^0$, $1^{+\infty}$, οι οποίες μαζί με τις $\dfrac{0}{0}$, 0^0 αποτελούν τις απροσδιόριστες μορφές που θα μελετήσουμε σε επόμενα κεφάλαια.

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{1}{x}$.Όταν ο παρονομαστής είναι μεγάλος κατ’ απόλυτη τιμή , δηλαδή όταν το x τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε η τιμή της f βρίσκεται πολύ κοντά στο 0.

Γράφουμε τότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.



Γραφικά αυτό σημαίνει ότι η C_f έχει στο $+\infty$ και στο $-\infty$, **οριζόντια ασύμπτωτη** την ευθεία $y=0$ (βλ. σχήμα).

Επειδή $f(x)>0$ όταν x τείνει στο $+\infty$, η καμπύλη προσεγγίζει την y = 0 απο “πάνω” στο $+\infty$. Ομοίως επειδή $f(x)<0$ όταν x τείνει στο $-\infty$, η καμπύλη προσεγγίζει την $y=0$ απο “κάτω” στο $-\infty$.

Γενικότερα , αν για μια συνάρτηση f ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k\in R$ η $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=k\in R$ **τότε η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=k$ στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αντίστοιχα.**

Σχόλιο

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\pm\infty$ η $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\pm\infty$ τότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντίστοιχα.

Είναι δυνατόν μια συνάρτηση να έχει οριζόντια ασύμπτωτη μόνο στο $+\infty$ ή μόνο στο $-\infty$ ή να έχει διαφορετικές ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$ ή και την ίδια.

Απο τον παραπάνω ορισμό συμπεραίνουμε ότι αναζητούμε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες συναρτήσεων στα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού εκτός των $\pm\infty$.

π.χ. Για τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$, έχουμε :

$-\infty$		-1		2		$+\infty$
	+		−		+	

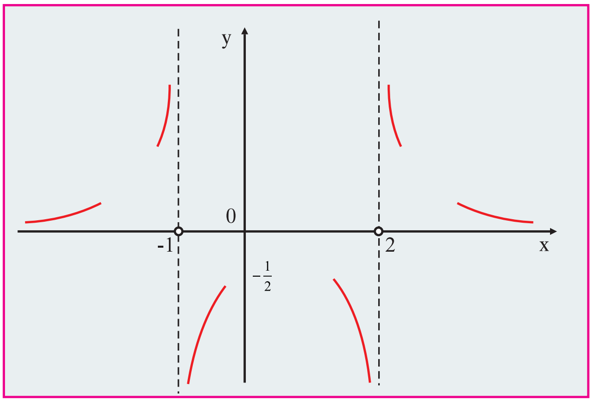
πρόσημο του (x - 2)(x + 1)

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$

Άρα οι ευθείες $x = 2$ και $x = -1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = 0$ και συνεπώς η ευθεία $y = 0$ είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Με τη βοήθεια και μόνο των παραπάνω ορίων κάνουμε μια αρκετά ικανοποιητική προσέγγιση της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος διευκολύνεται ο υπολογισμός ορίων (άλγεβρα ορίων):

Αν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε :

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(k\cdot f(x)\right) = k \lim_{x\to x_0} f(x)\ ,\ k\in R$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{\nu} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\nu},\ \nu\in N \text{ με } \nu\geq 2$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\ \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim_{x\to x_0} f(x)} \text{ με } f(x)\geq 0 \text{ κοντά στο } x_0,\ \nu\in N \text{ με } \nu\geq 2.$$

Πρόσημο του ορίου μιας συνάρτησης

Αν μια συνάρτηση έχει στο x_0 όριο έστω $\ell \neq 0$, τότε σε μια περιοχή (αρκετά κοντά) του x_0 οι τιμές της f έχουν το πρόσημο του ορίου της.
Δηλαδή :

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

Προσοχή !! Το αντίστροφο δεν ισχύει. Διότι μπορεί μια συνάρτηση να είναι θετική κοντά στο x_0 και το όριό της να είναι μηδέν ή άπειρο.
Δηλαδή ισχύουν :

Αν $f(x) > 0$, κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \geq 0$ ή το $+\infty$.

Αν $f(x) < 0$, κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \leq 0$ ή το $-\infty$.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Υπολογισμός ορίου στη θέση x_0 με x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Παράδειγμα 1

Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, **αν** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2002(x-1)}{e^{x^2+3x}}$

Λύση

Είναι : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2002(x-1)}{e^{x^2+3x}} = \dfrac{2^2 - 2002(2-1)}{e^{2^2+3\cdot 2}} = \dfrac{-1998}{e^{10}}$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Αν η συνάρτηση είναι ρητή και μηδενίζεται ο παρονομαστής στη θέση x_0 ενώ δεν μηδενίζεται ο αριθμητής, τότε το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει.
Εξετάζουμε το πρόσημο της συνάρτησης γύρω απο τη θέση x_0. Αν το πρόσημο του παρονομαστή αλλάζει γύρω απο τη θέση x_0, τότε πρέπει να θεωρήσουμε οπωσδήποτε τα πλευρικά όρια .
Αποδεικνύεται ότι :

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

Παράδειγμα 2

i. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **, αν** **α.** $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, **β.** $f(x)=\dfrac{2x^3+x-5}{x^2-4}$

ii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{1-\text{συν}x}$

Λύση

i. α. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$.Ωστόσο το x - 2 δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο γύρω απο το $x=2$.

Γι' αυτό θα προσδιορίσουμε τα πλευρικά όρια.

Αν το $x\to 2^+$ τότε $x>2$ δηλ. $x-2>0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$.

Αν το $x\to 2^-$ τότε $x<2$ δηλ. $x-2<0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$.

Απο τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$ δεν υπάρχει.

β. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$ και ο παρονομαστής αλλάζει πρόσημο γύρω απο το 2. Το όριο αν υπάρχει θα είναι οπωσδήποτε μη πεπερασμένο αφού μηδενίζεται ο παρονομαστής αλλά όχι ο αριθμητής.

	-2		2	
+		−		+

πρόσημο του x^2-4

Είναι: $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x^3+x-5}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x^3+x-5)\cdot\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x^2-4}=13\cdot(+\infty)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x^3+x-5}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x^3+x-5)\cdot\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x^2-4}=13\cdot(-\infty)=-\infty$

Επειδή τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο της f στο 2.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(1-\text{συν}x)=0$ και $1-\text{συν}x\ge 0$ για κάθε $x\in R$ και συνεπώς $1-\text{συν}x>0$, για κάθε

x κοντά στο 0, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\text{συν}x}=+\infty$. Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)=-1<0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{1-\text{συν}x}=\lim\limits_{x\to 0}\left((2x-1)\cdot\dfrac{1}{1-\text{συν}x}\right)=-\infty$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Αν η συνάρτηση είναι ρητή και μηδενίζεται και ο αριθμητής και ο παρονομαστής στη θέση x_0, τότε το όριο σ' αυτήν την περίπτωση μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός το $+\infty$ ή το $-\infty$ ή να μην υπάρχει. Δηλαδή στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα δεν είναι μονοσήμαντο , γι'αυτό λέμε ότι έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Για να το προσδιορίσουμε παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή και διαγράφουμε τον παράγοντα που δημιουργεί την απροσδιοριστία , δηλαδή τον $(x-x_0)^{\nu}$, $\nu\in N^*$.

Παράδειγμα 3

Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-2x+4}{x^2-4x-12}$.

Λύση

Είναι : $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3-2x+4\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-4x-12\right)=0$ δηλαδή έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$. Παραγοντοποιώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή έχουμε :

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3-2x+4}{x^2-4x-12}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)\cdot\left(x^2-2x+2\right)}{(x+2)\cdot(x-6)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+2}{x-6}=\frac{10}{-8}=-\frac{5}{4}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Αν στο όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ παρουσιάζεται η απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$ και ο τύπος της f περιέχει απόλυτο τότε :

- Αν η παράσταση που βρίσκεται στο απόλυτο μηδενίζεται για $x=x_0$ απαλλασσόμαστε από το απόλυτο θεωρώντας πλευρικά όρια.
- Αν η παράσταση που βρίσκεται στο απόλυτο δεν μηδενίζεται για $x=x_0$ απαλλασσόμαστε από το απόλυτο υποθέτοντας ότι το x είναι σε κατάλληλο διάστημα αρκετά κοντά στο x_0.

Παράδειγμα 4

Να υπολογίσετε τα όρια :

i . $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left|x^3-4x^2\right|}{x^2-16}$ **ii .** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-|4x-3|}{x-1}$

Λύση

i. Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$ αφού είναι : $\lim\limits_{x\to 4}\left|x^3-4x^2\right|=0$ και $\lim\limits_{x\to 4}\left(x^2-16\right)=0$

Για να "απαλλαγούμε" απο το απόλυτο θεωρούμε τα πλευρικά όρια.

Αν $x\to 4^-$ τότε είναι $x<4$ δηλ. $x-4<0$, οπότε : $\left|x^3-4x^2\right|=\left|x^2(x-4)\right|=-x^2(x-4)$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\left|x^3-4x^2\right|}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{-x^2(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{-x^2}{x+4}=\dfrac{-16}{8}=-2$.

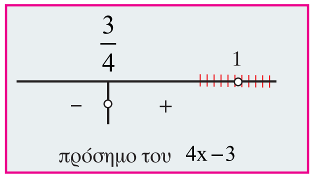
Αν $x\to 4^+$ τότε είναι $x>4$ δηλ. $x-4>0$, οπότε : $\left|x^3-4x^2\right|=\left|x^2(x-4)\right|=x^2(x-4)$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{\left|x^3-4x^2\right|}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2}{x+4}=\dfrac{16}{8}=2$.

Απο τα παραπάνω προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=-2\neq 2=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ και συνεπώς δεν υπάρχει το όριο της f όταν το x τείνει στο 4.

ii. Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ αφού είναι : $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2-|4x-3|\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$

Εδώ όμως η παράσταση 4x - 3 που είναι στο απόλυτο δεν μηδενίζεται για x = 1. Αν θεωρήσουμε ότι το x είναι πολύ κοντά στο 1 τότε: $x>\frac{3}{4}\Leftrightarrow 4x>3\Leftrightarrow 4x-3>0$



και συνεπώς $|4x-3|=4x-3$

Άρα $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-|4x-3|}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-(4x-3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x-3)=-2$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Αν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και ο τύπος της συνάρτησης περιέχει νιοστές ρίζες τότε μετασχηματίζουμε τον τύπο πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με κατάλληλη παράσταση ώστε να εφαρμόσουμε την ταυτότητα για τη διαφορά των νιοστών δυνάμεων.

$$\alpha-\beta=\frac{\alpha^\nu-\beta^\nu}{\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots+\beta^{\nu-1}}$$

Ειδικά όταν έχουμε τετραγωνικές ρίζες πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση. Η συζυγής της $\sqrt{A}-B$ είναι η $\sqrt{A}+B$ και της $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ είναι η $\sqrt{A}+\sqrt{B}$.

Παράδειγμα 5

Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}$

Λύση

i. Έχουμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$. Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση της $\sqrt{x+1}-1$: Είναι $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

ii. Αν θέσουμε $\sqrt[3]{x+8}=\alpha$ και $\sqrt[3]{8}=2$ τότε σύμφωνα και με την ταυτότητα που αναφέραμε

έχουμε: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^3-\left(\sqrt[3]{8}\right)^3}{x\left[\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^2+\sqrt[3]{x+8}\cdot\sqrt[3]{8}+\left(\sqrt[3]{8}\right)^2\right]}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+8}\right)^2+\sqrt[3]{x+8}\cdot\sqrt[3]{8}+\left(\sqrt[3]{8}\right)^2}=\frac{1}{12}$$

iii. Όταν έχουμε ρίζες διαφορετικής τάξης θέτουμε $\sqrt[k]{x}=\lambda$ όπου k το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των τάξεων . Για την περίπτωσή μας θέτουμε $\sqrt[12]{x}=\lambda$ οπότε $\sqrt[3]{x}=\lambda^4$, $\sqrt[4]{x}=\lambda^3$, $\sqrt{x}=\lambda^6$ και όταν $x\to 1$ το $\lambda\to 1$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}=\lim\limits_{\lambda\to 1}\dfrac{\lambda^6-\lambda^4}{\lambda^4-\lambda^3}=\lim\limits_{\lambda\to 1}\dfrac{\lambda^4\left(\lambda^2-1\right)}{\lambda^3\left(\lambda-1\right)}=\lim\limits_{\lambda\to 1}\dfrac{\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda-1}=\lim\limits_{\lambda\to 1}\lambda(\lambda+1)=2$

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Αν ο τύπος της συνάρτησης έχει κλάδους τότε για να υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης στη θέση αλλαγής των κλάδων υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια στη θέση αυτή.

Παράδειγμα 6

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^4+1 & ,\ \text{αν } x\le 1\\ -3\eta\mu(\pi x)+8x-6 & ,\ \text{αν } x>1\end{cases}$ **έχει όριο στο** $x_0=1$.

Λύση

Για να υπολογίσουμε το όριο της f στη θέση $x=1$, θα υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια στο 1.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^4+1\right)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left[-3\eta\mu(\pi x)+8x-6\right]=-3\eta\mu\pi+8-6=2$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2$, έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Τριγωνομετρικά όρια:

Μπορούμε να χρησιμοποιούμε άμεσα το βασικό όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

Πολλές φορές ο υπολογισμός ενός ορίου διευκολύνεται με αλλαγή μεταβλητής.

Παράδειγμα 7

Να υπολογίσετε τα όρια: **α.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 10x}{x}\right)$, **β.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$, **γ.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{2x-\sqrt{x}-1}$.

Λύση

α. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 10x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu 10x}{10x}10\right)=10\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 10x}{10x}=10\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\eta\mu\omega}{\omega}=10\cdot 1=10$

(θέσαμε $\omega = 10x$, οπότε όταν $x \to 0$ τότε $\omega \to 0$)

β. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\eta\mu\omega}{\omega} = 1$, αφού όταν $x \to 1$ το $x-1 = \omega \to 0$.

γ. Είναι : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{2x-\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}+1)\eta\mu(x-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}+1)} =$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}+1)\eta\mu(x-1)}{(x-1)(2\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}+1}\right) = 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 8
Το κριτήριο παρεμβολής

Αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$ σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει δεν θα τα καταφέρουμε. Όρια όπως το παραπάνω υπολογίζονται έμμεσα με τη βοήθεια του επόμενου κριτηρίου:

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \in R$ και για τις συνρτήσεις f, g, h ισχύει: $g(x) \le f(x) \le h(x)$

κοντά στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$

Για το παραπάνω όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right) = 0$, διότι: $\left|x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right| = |x|\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right| \le |x|$, αφού

$\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right| \le 1$ οπότε $-|x| \le x\eta\mu\dfrac{1}{x} \le |x|$ με $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$.

Παράδειγμα 8

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει : $\dfrac{\eta\mu x}{x} \le f(x) \le 2x^2+1$**, για κάθε** $x \ne 0$ **να υπολογίσετε το** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$**.**

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0}(2x^2+1) = 1$. Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής , είναι και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 9

Εύρεση του ορίου με την χρήση βοηθητικής συνάρτησης της οποίας γνωρίζουμε το όριο.

Παράδειγμα 9

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο R για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu x}{\sqrt{x+1}-1}=-\infty$**.**

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$**.**

Λύση

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)\eta\mu x}{\sqrt{x+1}-1}$, $x\in[-1,0)\cup(0,+\infty)$ με $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$. Για κοντά στο 0 ισχύει

$$g(x)\left[\sqrt{x+1}-1\right]=f(x)\eta\mu x \Leftrightarrow f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{\eta\mu x}g(x),$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\eta\mu x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{\eta\mu x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\eta\mu x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right)=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0.$$

Άρα το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{1}{2}(-\infty)=-\infty$.

Κατηγορία – Μέθοδος 10

Μετατροπή του κλάσματος σε άθροισμα δύο ή περισσότερων κλασμάτων των οποίων οι απροσδιοριστίες αντιμετωπίζονται με την τεχνική της προσθαφαίρεσης.

Παράδειγμα 10

Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x}{x-2}=4$**. Για ποια τιμή του** $\lambda\in R$ **η συνάρτηση** $g(x)=\dfrac{xf(x)-3\lambda-\lambda^2}{x^2-4}$ **έχει στο** $x_0=2$ **όριο τον πραγματικό αριθμό** ℓ**.**

Λύση

Θεωρούμε $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-x}{x-2}$, $x\neq 2$. Άρα $f(x)=\varphi(x)(x-2)+x$ με x κοντά στο 2.

Το $\lim\limits_{x\to 2}\left[\varphi(x)(x-2)+x\right]=4\cdot 0+2=2$ άρα και $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$.

Θα υποστηρίξουμε ότι: “Το όριο **και** του αριθμητή της g πρέπει να είναι 0 αφού το όριο της g είναι πραγματικός αριθμός”.

Για $x \neq 2$ και $x \neq -2$ είναι $\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)(x^2-4)\right]=\ell\cdot 0=0$.

Άρα και το $\lim\limits_{x\to 2}\left[xf(x)-3\lambda-\lambda^2\right]=0 \Leftrightarrow 2\cdot 2-3\lambda-\lambda^2=0 \Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda-4=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=-4$

Για να είναι αποδεκτές αυτές οι τιμές πρέπει να δείξουμε ότι το $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\ell$, $\ell\in \mathbb{R}$

"Θα αξιοποιήσουμε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x}{x-2}=4$ *"*

Για $\lambda=1$

$$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)-4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)-x^2+x^2-4}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x(f(x)-x)+x^2-4}{x^2-4}=$$

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x(f(x)-x)}{x^2-4}+\frac{x^2-4}{x^2-4}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{f(x)-x}{x-2}\cdot\frac{x}{x+2}+1\right]=4\cdot\frac{2}{4}+1=3$$

Άρα το $\lambda=1$ είναι δεκτό.
Για $\lambda=-4$

$\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{xf(x)-4}{x^2-4}=3$ (το βρήκαμε προηγουμένως). Άρα και το $\lambda=-4$ είναι δεκτό.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός α ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+3x+\alpha}{x^2+4x+3}$ να έχει όριο πραγματικό αριθμό όταν το x τείνει στο - 1.

(**Απ.:** α = 2)

2. Να προσδιορίσετε τους α,β ώστε η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+(\beta+2)x+2, & x<-1\\ 8x^2+\alpha+\beta, & -1\le x\le 1\\ -\alpha x+\beta, & x>1\end{cases}$$

να έχει όριο σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

(**Απ.:** α = β = – 4)

3. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|+x^2-5x+6}{x-3}$.

(**Απ.:** Δεν υπάρχει)

4. Να βρεθούν τα επόμενα όρια : **i.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3+5x^2-17x+6}$, **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$,

iii. $\lim\limits_{x\to 3} = \dfrac{x^2-9}{(x-3)^3(x+3)}$, **iv.** $\lim\limits_{x\to -1^-} = \dfrac{x^2-2x+1}{|x|-1}$

(**Απ.: i.** 1, **ii.** Δεν υπάρχει, **iii.** $+\infty$, **iv.** $+\infty$)

5. Να βρεθούν τα επόμενα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^2}{2\sqrt{x}-3x+1}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x\sqrt{x}-3x+2\sqrt{x}}$

(**Απ.: ii.** 6)

6. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ σε κάθε περίπτωση :

i. $\lim\limits_{x\to 3}\left(f(x)-2x^2+x-1\right)=2$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+1}{x-3}=8$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-2x}{2x^2-18}=5$

(**Απ.: i.** 17 , **ii.** -1, **iii.** 6)

7. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=5$ και $\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)\left(2x^2+x-10\right)\right]=3$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$.

$\left(\textbf{Απ.: } \dfrac{5}{3}\right)$

8. Αν $f(x)=\dfrac{\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}-1}{x}$, $\alpha,\beta\in R$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$\left(\textbf{Απ.: } \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

9. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει : $|\sigma\upsilon\nu x-1|\le f(x)\le |x|$ και $e^x-1\le g(x)\le x$, για κάθε $x\in R$, να βρεθούν τα όρια: **α.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, **β.** $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

(**Απ.: α.** 0, **β.** 0)

10. Έστω συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού R και τέτοιες ώστε να ισχύουν :

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\sqrt{x+4}-2\right)g(x)\right]=5 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2.$$

Να βρείτε τα όρια : **α.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **β.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\eta\mu x\right)$.

(**Απ.: α.** 0, **β.** 20)

11. Έστω συνάρτηση $f: R\to R$ τέτοια ώστε :

$$f^2(x)+5f(x)=5\ln x+4 \text{ ,για } x>0.$$

i. Δείξτε ότι η f είναι 1 - 1 στο διάστημα $(0,+\infty)$.
ii. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f.
iii. Βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

12. Έστω συνάρτηση $f:\ R\to R$ τέτοια ώστε : $1-x^2\le f(x)\le 1+x^2$ για κάθε $x\in R$.

Να δειχθεί: **i.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+1}}{x}=-\dfrac{1}{2}$.

13. Έστω συνάρτηση $f:\ R\to R$ τέτοια ώστε : **i.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ **ii.** $xf(x)\ge \eta\mu x$

Βρείτε το f(0).

(**Απ.:** $f(0)=1$)

14. Δίνονται συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού Α που περιέχει το 0.

Αν $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\sqrt{4x^2+x+9}-3\right)\cdot g(x)\right]=15$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)g(x)\right)=\alpha^2+67\alpha$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha f(x)}{\eta\mu(\alpha x)}=4$, να βρεθεί ο θετικός αριθμός α και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα επόμενα όρια : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ (αν υπάρχουν).

(**Απ.:** $\alpha=5$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ δεν υπάρχει)

15. Να προσδιορίσετε τα α , β ∈ R ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+\alpha}-\beta}{1-\sigma\upsilon\nu x}=1$.

(**Απ.:** $\alpha=\beta=1$)

16. Έστω συνάρτηση για την οποία ισχύει: $\sqrt{5x+6}\le f(x)\le\dfrac{5x+22}{8}$ για κάθε $x\in R$.

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

(**Απ.:** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. Αν **$\eta\mu(\alpha x)\le\eta\mu(\beta x)+\eta\mu(\gamma x)$ για κάθε x με $\alpha,\beta,\gamma>0$ τότε $\alpha=\beta+\gamma$.**

Β. Να υπολογίσετε το όριο των ριζών της εξίσωσης $hx^2+\alpha x-\beta=0$ με $h\ne 0$ όταν $h\to 0$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha,\beta\in R$.