Μάθημα 7

Συνέχεια συνάρτησης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^2$. Παρατηρούμε ότι αν το x βρίσκεται κοντά στο 2, τότε το f(x) βρίσκεται πολύ κοντά στο 4 ανεξαρτήτως αν $x<2$ ή $x>2$.

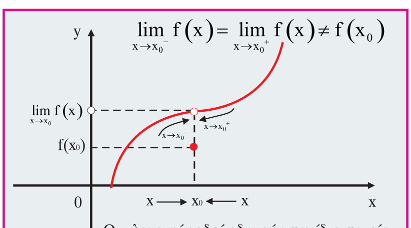
Άρα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$. Το όριο αυτό συμπίπτει με την αριθμητική τιμή της f στη θέση 2, δηλαδή είναι: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

Αν για μια συνάρτηση ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ τότε η f ονομάζεται συνεχής συνάρτηση στη θέση $x = x_0$.

Επομένως η f είναι συνεχής συνάρτηση στη θέση $x=2$, αλλά και σε κάθε θέση $x_0 \in R$. Λέμε τότε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση στο R.

Παρατηρήσεις

1. Για μια συνεχή συνάρτηση στο x_0 οι δύο "πλευρικές οδοί" που οδηγούν πρός τη θέση x_0, οδηγούν στο σημείο που καθορίζει η αριθμητική τιμή $f(x_0)$.

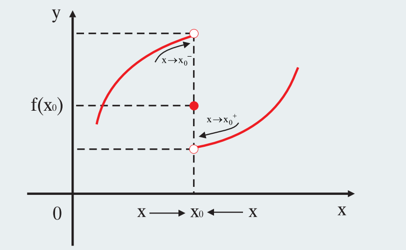


Οι πλευρικές οδοί οδηγούν στο ίδιο σημείο που είναι όμως διαφορετικό απο το $(x_0, f(x_0))$

2. Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$.

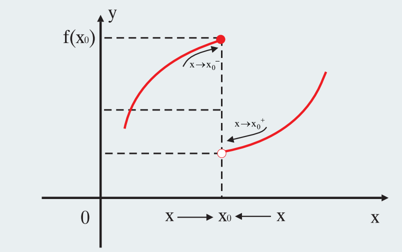
3. Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Αν όμως ισχύει : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ η $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ τότε λέμε ότι η f είναι συνεχής απο τα αριστερά ή συνεχής απο τα δεξιά αντίστοιχα του x_0.



Οι πλευρικές οδοί οδηγούν σε διαφορετικά σημεία και επιπλέον διαφορετικά απο το (x_0 , $f(x_0)$). Η f δεν είναι συνεχής ούτε απο δεξιά ούτε απο αριστερά στο x_0.

$$f(x_0)\neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)\neq f(x_0)$$



Μόνο η μία πλευρική "οδός" οδηγεί στο σημείο (x_0 , $f(x_0)$) . Η f είναι συνεχής απο αριστερά στο x_0

$$f(x_0)= \lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

4. Όλες οι στοιχειώδεις συναρτήσεις καθώς και οι πράξεις μεταξύ τους ή οι συνθέσεις μεταξύ τους είναι συνεχείς συναρτήσεις στο πεδίο ορισμού τους.
Συνήθως οι συναρτήσεις για τις οποίες υπάρχει αμφιβολία αν είναι συνεχείς ή όχι είναι οι συναρτήσεις που δίνονται με κλάδους και γι' αυτές η αμφιβολία υπάρχει μόνο για το σημείο στο οποίο αλλάζουν οι κλάδοι.

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής σε ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της , αν και μόνον αν, ισχύει :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Ορισμός 2

Μια συνάρτηση f ονομάζεται **συνεχής** (στο πεδίο ορισμού της) , αν και μόνον αν, είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της .

Σχόλια

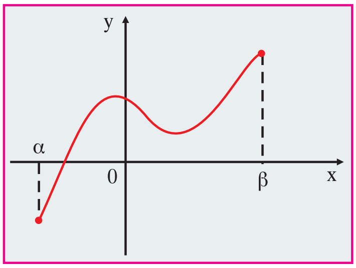
Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , αν :

α. Δεν υπάρχει το όριο της στο x_0 .

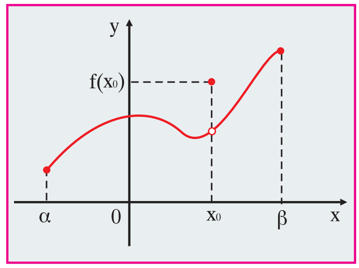
β. Υπάρχει το όριό της στο x_0 αλλά είναι διαφορετικό απο την τιμή της $f(x_0)$.

γ. Ένα απο τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι το $+\infty$ ή $-\infty$.

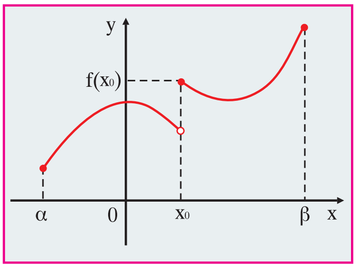
Γεωμετρική ερμηνεία της συνέχειας



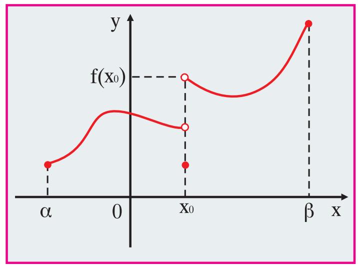
Συνάρτηση f συνεχής στο $\Delta = [\alpha,\beta]$



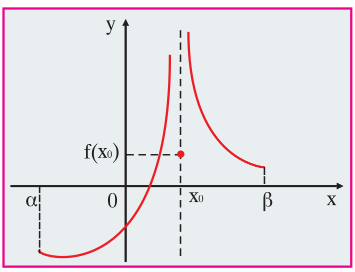
Συνάρτηση f ασυνεχής στο x_0



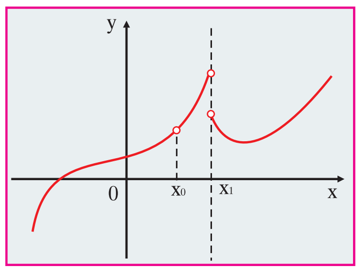
Συνάρτηση f ασυνεχής στο x_0



Συνάρτηση f ασυνεχής στο x_0



Συνάρτηση f ασυνεχής στο x_0



Συνάρτηση f συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο R.
- Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της
- Οι συναρτήσεις ημx , συνx είναι συνεχείς στο R.
- Οι συναρτήσεις e^x , α^x , lnx , $\log_\alpha x$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους, με $0 < \alpha \neq 1$.

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους , τότε και οι συναρτήσεις: $f+g,\ f\cdot g,\ \lambda\cdot f\ (\lambda\in R),\ \frac{f}{g}(g(x)\neq 0),\ |f|,\ \sqrt[k]{f}\ (f(x)\geq 0)$, $\kappa\in N$ με $\kappa\geq 2$ είναι συνεχείς στο x_0 .

Επίσης αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$,τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

Σημείωση

Το αντίστροφο των παραπάνω δεν ισχύει διότι αν

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

η $(f+g)(x)=2x$ είναι συνεχής στο $x=0$, ενώ καμία απο τις f και g δεν είναι συνεχής στο $x=0$.

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Όταν ζητείται μια συνάρτηση να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια εννοείται ότι ζητείται να μελετήσουμε αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Για κάποιες συναρτήσεις μπορούμε αμέσως να συμπεράνουμε αν είναι συνεχείς ή όχι χωρίς να υπολογίσουμε όρια σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω. Συνήθως οι συναρτήσεις για την συνέχεια των οποίων δεν είμαστε σίγουροι, είναι οι συναρτήσεις που δίνονται με κλάδους (πολλαπλού τύπου) . Στα σημεία αλλαγής του τύπου αυτών των συναρτήσεων εξετάζουμε αν είναι συνεχείς με χρήση πλευρικών ορίων.

Στα υπόλοιπα διαστήματα του πεδίου ορισμού τους εξηγούμε για ποιό λόγο είναι συνεχείς.

Παράδειγμα 1

Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & , |x|\leq 2 \\ 2 & , x<-2 \\ \dfrac{2}{x-2} & , x>2 \end{cases}$

και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Λύση

Για κάθε $x\in(-2,2)$ η συνάρτηση είναι συνεχής (πολυωνυμική).

Για κάθε $x\in(-\infty,-2)$ η συνάρτηση είναι συνεχής (σταθερή).

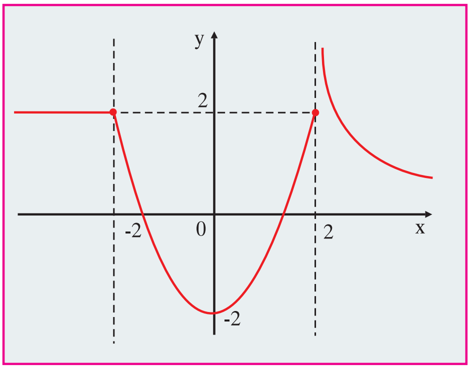
Για κάθε $x\in(2,+\infty)$ η συνάρτηση είναι συνεχής (ρητή).

Θα εξετάσουμε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στα σημεία αλλαγής του τύπου της στα -2 και 2.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2}{x-2}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2)=2=f(2)$ και συνεπώς η f δεν είναι συνεχής στο 2.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to -2^-}2=2$ και $\lim\limits_{x\to -2^+}(x^2-2)=2=f(-2)$ που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής στο -2.

Άρα τελικά η f είναι συνεχής στο R - { 2 }.
Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Κατηγορία – Μέθοδος 2

Εύρεση της τιμής $f(x_o)$ μιας συνεχούς συνάρτησης f στο x_o, αν γνωρίζουμε το όριο παράστασης που μετέχει η f, όταν $x \to x_o$.

Παράδειγμα 2

Αν f είναι συνάρτηση συνεχής στο $x_0 = 2$ και ισχύει : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)-f(x)(x-2)}{x^2-4}=1$ να βρεθεί η τιμή f(2).

Λύση

Αφού η f είναι συνεχής στο 2 , ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.Αρκεί επομένως να βρούμε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Γι' αυτό θέτουμε $h(x)=\dfrac{\eta\mu(x-2)-f(x)(x-2)}{x^2-4}$ με x κοντά στο 2 και $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=1$ και λύνουμε ως προς την f(x).

Είναι $h(x)(x^2-4)=\eta\mu(x-2)-f(x)(x-2) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\eta\mu(x-2)-h(x)(x^2-4)}{(x-2)}$ κοντά στο 2 οπότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)-h(x)(x^2-4)}{(x-2)}=$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)}-\lim_{x\to 2}\big(h(x)(x+2)\big)=1-1\cdot 4=-3$$ και συνεπώς f (2) = - 3.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Εύρεση του τύπου μιας συνεχούς συνάρτησης f στη θέση x_0 όταν για $x \neq x_0$ είναι γνωστός ο τύπος ενώ στο x_0 βρίσκουμε την τιμή της από κάποιο γνωστό όριο χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της f.

Παράδειγμα 3

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο R για την οποία ισχύει : $2+f(x)(x^5-1)=\sqrt[3]{2x^2+6}$ **,**

για κάθε $x\in R$ **. Να βρείτε τον τύπο της.**

Λύση

Αφού η f είναι συνεχής στο R ορίζεται σε κάθε σημείο του R.

Για κάθε $x\neq 1$ είναι : $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+6}-2}{x^5-1}$

Αφού είναι συνεχής στο 1 θα ισχύει :

$$f(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x^2+6}-2}{x^5-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+6-8}{(x^5-1)\left(\left(\sqrt[3]{2x^2+6}\right)^2+2\sqrt[3]{2x^2+6}+4\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\left(\left(\sqrt[3]{2x^2+6}\right)^2+2\sqrt[3]{2x^2+6}+4\right)}=\frac{1}{15}$$

Επομένως είναι : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+6}-2}{x^5-1} & ,\ x\neq 1\\[2mm] \dfrac{1}{15} & ,\ x=1\end{cases}$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Ασκήσεις στις οποίες μας ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και για την οποία f γνωρίζουμε:

i. Ότι ικανοποιεί μια συναρτησιακή σχέση.

ii. Ότι είναι συνεχής σε κάποια θέση α του πεδίου ορισμού της .

Πρέπει να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ για κάθε $x_0\in\Delta$

Επειδή το μόνο όριο που γνωρίζουμε είναι το όριο της f όταν $x\to\alpha$, θα αλλάξουμε μεταβλητή και στη θέση του x θα θέσουμε μια συνάρτηση $g(h)$, μη σταθερή, η οποία θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

α. Θα είναι $\lim\limits_{h\to\alpha} g(h)=x_0$.

β. Ο τύπος της θα επαληθεύει την συναρτησιακή σχέση.

Συνηθισμένα παραδείγματα επιλογης της $g(h)$ φαίνονται παρακάτω :

1. Η f συνεχής στο 0 και άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Θα έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)$.

Η $g(h)$ που επιλέξαμε είναι $g(h)=x_0+h$. Θέτουμε όπου $x\to x_0+h$

2. Η f συνεχής στο 1 και άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

Εδώ θα έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 1} f(x_0 h)$.

Η $g(h)$ που επιλέξαμε είναι $g(h)=x_0\cdot h$. Θέτουμε όπου $x\to x_0\cdot h$.

3. Η f συνεχής στο α και άρα $\lim\limits_{x\to \alpha} f(x)=f(\alpha)$.

Πρώτη επιλογή: (εξαρτάται από την συναρτησιακή σχέση)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to \alpha} f\left[(x_0-\alpha)+h\right]$ εδώ $g(h)=(x_0-\alpha)+h$.

Θέτουμε όπου $x\to(x_0-\alpha)+h$.

Δεύτερη επιλογή: (εξαρτάται από την συναρτησιακή σχέση)

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to \alpha} f\left[\left(\dfrac{x_0}{\alpha}\right)h\right]$ εδώ $g(h)=\left(\dfrac{x_0}{\alpha}\right)h$. Θέτουμε όπου $x\to\left(\dfrac{x_0}{\alpha}\right)h$.

Παράδειγμα 4

Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in R$ και $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$.

i. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

ii. Αν η f είναι συνεχής στο α με $\alpha\neq 0$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

iii. Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για $x\in R$.

Λύση

i. Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0}\left[f(x_0)f(h)\right]=f(x_0)f(0)=f(x_0+0)=f(x_0)$

ii. Η f συνεχής στο α, άρα $\lim\limits_{x\to \alpha} f(x)=f(\alpha)$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to \alpha} f\left[(x_0-\alpha)+h\right]=\lim\limits_{h\to \alpha}\left[f(x_0-\alpha)\cdot f(h)\right]$

$=f(x_0-\alpha)\cdot f(\alpha)=f\left[(x_0-\alpha)+\alpha\right]=f(x_0)$. Άρα η f συνεχής στο R.

iii. Για $x=y=\dfrac{\omega}{2}$ είναι $f\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\omega}{2}\right)=f\left(\dfrac{\omega}{2}\right)f\left(\dfrac{\omega}{2}\right)\Leftrightarrow$

$f(\omega)=f^2\left(\dfrac{\omega}{2}\right)>0$ οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

Παράδειγμα 5

Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R^*$. Αν η f είναι συνεχής στο α με $\alpha\neq 0$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R*.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$. Στο τυχαίο x_0 με $x_0\neq\alpha$ και $x_0\neq 0$ είναι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{h\to\alpha} f\left(\frac{x_0}{\alpha}h\right)=\lim_{h\to\alpha}\left[f\left(\frac{x_0}{\alpha}\right)+f(h)\right]=f\left(\frac{x_0}{\alpha}\right)+f(\alpha)=f\left(\frac{x_0}{\alpha}\alpha\right)=f(x_0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο R*.

Παράδειγμα 6

Για την συνάρτηση f που είναι συνεχής στο 3, ισχύει η σχέση $f(\alpha\beta)=f(\alpha)f(\beta)$ με $\alpha,\beta\in R^*$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R*.

Λύση

Γνωρίζουμε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 3} f\left(\frac{x_0}{3}h\right)=\lim\limits_{h\to 3} f\left(\frac{x_0}{3}\right)f(h)=f\left(\frac{x_0}{3}\right)f(3)=f\left(\frac{x_0}{3}3\right)=f(x_0)$.

Άρα η f είναι συνεχής στο R*

Παράδειγμα 7

Έστω f με την ιδιότητα $|f(x)-f(y)|\leq\kappa|x-y|$ (1) για κάθε $x,y\in R$ και $\kappa>0$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

Λύση

Για την απόδειξη της συνέχειας στο R αρκεί να δείξουμε ότι στο τυχαίο x_0 είναι

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$

Για $y=x_0$ (x_0 τυχαίος πραγματικός αριθμός) η (1) γίνεται:

$$|f(x)-f(x_0)|\leq\kappa|x-x_0| \Leftrightarrow -\kappa|x-x_0|\leq f(x)-f(x_0)\leq\kappa|x-x_0|$$

Από το θεώρημα παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ αφού $\lim\limits_{x\to x_0}\kappa|x-x_0|=0$ και

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\kappa|x-x_0|\right)=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Άρα η f είναι συνεχής στο R.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε το θετικό και διάφορο του 1 αριθμό α, ώστε η συνάρτηση f με :

$$f(x)=\begin{cases}\alpha^{2x} & ,\ 0\le x\le 2\\ \alpha\cdot\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4} & ,\ 2<x<\pi\end{cases}$$

να είναι συνεχής.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης είναι συνεχής στο διάστημα $(2,\pi)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
Για να είναι η f συνεχής στο $[0,\pi)$ πρέπει να είναι συνεχής και στη θέση $x=2$.
Είναι:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\alpha^{2x}=\alpha^4=f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\alpha\cdot\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}=\alpha\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-4}=\alpha\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\alpha\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)}\cdot\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x+2)}=\alpha\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{\alpha}{4}$$

Επομένως πρέπει : $\alpha^4=\dfrac{\alpha}{4}\Leftrightarrow 4\alpha^4-\alpha=0\Leftrightarrow \alpha\cdot(4\alpha^3-1)=0\Leftrightarrow \alpha=\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$, $(0<\alpha\ne 1)$

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε τα α , β ∈ R ώστε η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+\alpha}{x-1}, & \text{αν } x<1\\ \beta x+2\alpha-1, & \text{αν } x\ge 1\end{cases}$

να είναι συνεχής στο R .

Λύση

Η f είναι συνεχής για κάθε $x<1$ ως ρητή και για κάθε $x>1$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
Για να είναι συνεχής στο R αρκεί να είναι συνεχής και στο $x=1$.

Πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\beta x+2\alpha-1)=\beta+2\alpha-1=f(1)$ (1)

Πρέπει τώρα να ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+x+\alpha}{x-1}=\beta+2\alpha-1$ (2)

Απαιτούμε $\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x+\alpha)=0$ διότι σε αντίθετη περίπτωση το όριο (2) θα ήταν $\pm\infty$ ή δεν θα υπήρχε. Επομένως είναι $1^2+1+\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=-2$, τότε έχουμε :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x+\alpha}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+2)=3$$

και λόγω της (2) $\beta+2\alpha-1=3\Leftrightarrow\beta=8$ (αφού $\alpha=-2$).

Άσκηση 3

Αν οι συναρτήσεις f και g ικανοποιούν τη σχέση : $f^2(x)+g^2(x)+2g(x)+10\le 6f(x)+\eta\mu^2 x$ **για κάθε πραγματικό αριθμό x , να αποδείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στη θέση $x=0$.**

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$
Η σχέση που δόθηκε για $x=0$ γράφεται :

$$f^2(0)+g^2(0)+2g(0)+10\le 6f(0)+\etaμ^2 0 \Leftrightarrow f^2(0)+g^2(0)+2g(0)+10-6f(0)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$f^2(0)-6f(0)+9+g^2(0)+2g(0)+1\le 0 \Leftrightarrow (f(0)-3)^2+(g(0)+1)^2\le 0 \Leftrightarrow (f(0)-3)^2=0$$

$$\text{και } (g(0)+1)^2=0 \Leftrightarrow f(0)=3 \text{ και } g(0)=-1$$

Έχουμε:

$$f^2(x)+g^2(x)+2g(x)+10\le 6f(x)+\etaμ^2 x \Leftrightarrow f^2(x)+g^2(x)+2g(x)+10-6f(x)\le \etaμ^2 x \Leftrightarrow$$

$$f^2(x)-6f(x)+9+g^2(x)+2g(x)+1\le \etaμ^2 x \Leftrightarrow 0\le (f(x)-3)^2+(g(x)+1)^2\le \etaμ^2 x$$

Επειδή είναι $\lim\limits_{x\to 0}\etaμ^2 x=0$ απο την παραπάνω σχέση παίρνουμε :

$$\lim_{x\to 0}\left[(f(x)-3)^2+(g(x)+1)^2\right]=0$$

Είναι: $0\le (f(x)-3)^2\le (f(x)-3)^2+(g(x)+1)^2$

και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left[(f(x)-3)^2+(g(x)+1)^2\right]=0$ θα είναι

$$\lim_{x\to 0}(f(x)-3)^2=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}|f(x)-3|^2=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}|f(x)-3|=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}[f(x)-3]=0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=3$$

Όμοια και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-1$. Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=3=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-1=g(0)$,

που σημαίνει ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x=0$.

Άσκηση 4

Αν οι συναρτήσεις f και φ ικανοποιούν τη σχέση : $f^2(x)+x^2\cdot φ^2(x)=x^2-1$ **για κάθε πραγματικό x , να δείξετε ότι είναι συνεχείς στα σημεία** $x_0=1$ **και** $x_1=-1$ **.**

Λύση

Άρκεί να αποδείξουμε ότι : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=\lim\limits_{x\to 1} φ(x)$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} φ(x)$
Η σχέση που δόθηκε για $x=1$ γράφεται :

$$f^2(1)+1^2\cdot φ^2(1)=1^2-1 \Leftrightarrow f^2(1)+φ^2(1)=0 \Leftrightarrow f(1)=0 \text{ και } φ(1)=0$$

Επίσης είναι $f^2(x)\le f^2(x)+x^2\cdot φ^2(x)=x^2-1$

άρα $\left|f^2(x)\right|\le\left|x^2-1\right| \Leftrightarrow -\left|x^2-1\right|\le f^2(x)\le\left|x^2-1\right|$ και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής

παίρνουμε : $\lim\limits_{x\to 1} f^2(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left|x^2-1\right|=0$ και τελικά $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$, που σημαίνει ότι η f

είναι συνεχής στο 1. Όμοια για το -1.

Για τη συνάρτηση φ ισχύει : $x^2\cdot φ^2(x)=x^2-1-f^2(x)\le x^2-1$

Άρα $\left|x^2\cdot\varphi^2(x)\right|\le\left|x^2-1\right|\Leftrightarrow-\left|x^2-1\right|\le x^2\cdot\varphi^2(x)\le\left|x^2-1\right|$ και σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2\cdot\varphi^2(x)\right)=\lim\limits_{x\to1}\left|x^2-1\right|=0$.

Έστω $h(x)=x^2\varphi^2(x)\Leftrightarrow\varphi^2(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{h(x)}{x^2}=\dfrac{0}{1}=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to1}\varphi^2(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\varphi^2(x)}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}\left|\varphi(x)\right|=0\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=0=1$ που σημαίνει ότι η φ είναι συνεχής στο 1. Όμοια και για $x=-1$.

Άσκηση 5

Έστω $f:R\to R$ περιττή και συνεχής σε $x_0\ne0$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και στο $-x_0$.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι : $\lim\limits_{x\to-x_0}f(x)=f(-x_0)$

Πράγματι είναι: $\lim\limits_{x\to-x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to-x_0}\left(-f(-x)\right)=-\lim\limits_{-x\to x_0}f(-x)=-\lim\limits_{u\to x_0}f(u)=-f(x_0)=f(-x_0)$

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια οι πιο κάτω συναρτήσεις

i. $f(x)\begin{cases}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\ne0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ **ii.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|-|x+2|}{x} & ,x\ne0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

2. Έστω $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda x^3+\mu x^2+5}{x-2}, & x\ne2\\ 0 & ,x=2\end{cases}$.

Να βρεθούν τα λ,μ ώστε να η f να είναι συνεχής στο R.

(**Απ:** $\lambda=\dfrac{5}{4}$, $\mu=-\dfrac{15}{4}$)

3. Έστω $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha|x+1|+\beta|x-2|+8}{x^2+2x-3}, & \alpha\nu\quad x>1\\ 1 & ,\alpha\nu\quad x=1\end{cases}$.

Να βρεθούν τα α , β ώστε η f να είναι συνεχής στο 1.

$\left(\textbf{Απ:}\ \alpha=-\dfrac{4}{3},\beta=-\dfrac{16}{3}\right)$

4. Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^2+3\beta x-5}{x-1} & ,x\ne1\\ 7 & ,x=1\end{cases}$ να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε να είναι η f συνεχής

(**Απ:** $\alpha = 2.\ \beta = 1$)

5. Αν η f είναι συνεχής στο $x = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu^2 2x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{\sqrt{1+x^2}-1} = 2$ να βρεθεί η τιμή f(0).

$\left(\textbf{Απ}: f(0) = \dfrac{3}{8}\right)$

6. Αν $f(x) = \dfrac{x^3}{f^4(x)+5}$ με $f: R \to R$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

7. Έστω $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ και $g: R \to R$ τέτοια ώστε $|g(x)| \leq |f(x) - 2x|$. Να δείξετε ότι g(x) συνεχής στο 0.

8. Αν οι συναρτήσεις f και y ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) + g^2(x) + 2g(x) + 17 \leq 8f(x) + x^2$ για κάθε $x \in R$ να δείξετε ότι η f και η g είναι συνεχής στο 0.

9. Έστω η $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $|f(x) - f(y)| = 5|x-y|^4$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

10. Αν $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(y)$ και η f είναι συνεχής στο 0, να δείξετε ότι είναι συνεχής στο R.

11. Έστω $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $|xf(x)| \leq |x - \eta\mu x|$, για κάθε $x \neq 0$. Αν η f είναι συνεχής στο $x = 0$, να βρεθεί η τιμή f(0).

(**Απ**: $f(0) = 0$)

12. Αν για την $f: R \to R$ ισχύει $x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2$, για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

13. Έστω $f: R^* \to R$ τέτοια ώστε $f(xy) = f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in R^*$ και $f(x) \neq 0$. Αν η f είναι συνεχής στο $x = 2$ να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R.

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\alpha) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha^{2x+1}+\alpha^2}{\alpha^{2x}+1}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f.

iii. Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.