Συνέχεια συνάρτησης σε κλειστό διάστημα

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι:

i. Συνεχής σε ένα ανοιχτό διάστημα (α,β) όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος (α,β)

ii. Συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον ισχύουν :

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$$

2. Θεώρημα Bolzano (Θ.Β.)

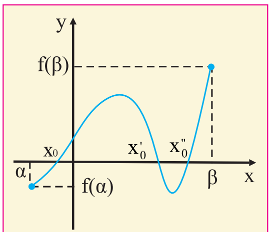
Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β].

Αν: • η f είναι συνεχής στο [α,β] και

• $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

δηλαδή υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β).



Σχ. 1

Γεωμετρική ερμηνεία

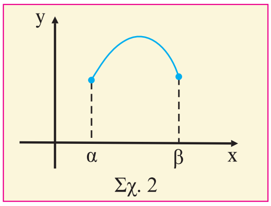
Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 μεταξύ των α και β (σχ.1).

Παρατηρήσεις - Σχόλια

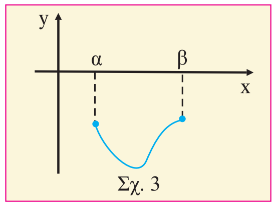
1. Το αντίστροφο του θεωρήματος BOLZANO δεν ισχύει γενικά δηλαδή η ύπαρξη ρίζας δεν εξασφαλίζει την συνέχεια της f στο [α,β] ούτε ότι οι τιμές f(α), f(β) είναι ετερόσημες

2. Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη ρίζας της $f(x)=0$ αλλά δεν την προσδιορίζει.

3. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό τότε είναι θετική (σχ.2) ή αρνητική (σχ.3) για κάθε $x\in\Delta$ (διατηρεί πρόσημο).

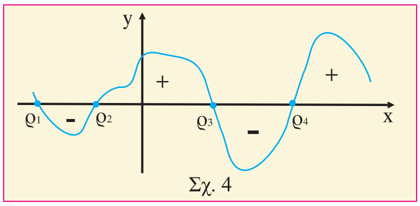


Σχ. 2



Σχ. 3

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ'ένα διάστημα Δ τότε μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της διατηρεί το πρόσημο (σχ.4).

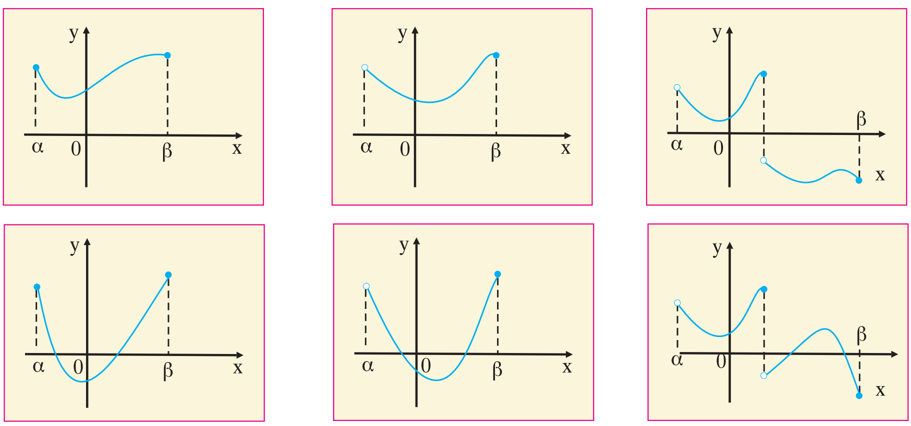


Σχ. 4

4. Το θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη μιάς τουλάχιστον λύσης της $f(x)=0$. Μπορεί όμως να υπάρχουν και περισσότερες. (σχ. 1)

5. Εάν οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano δεν ισχύουν, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ή δεν έχει λύση.

Αυτό φαίνεται στα επόμενα σχήματα .

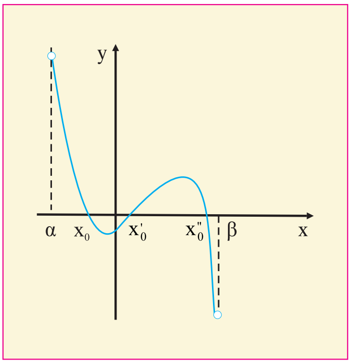


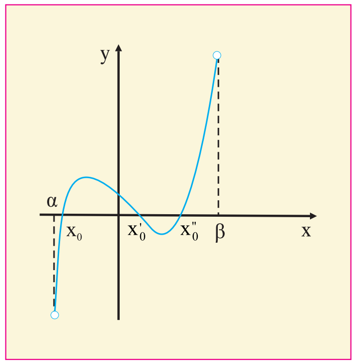
Θεώρημα

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο (α,β) για την οποία ισχύει

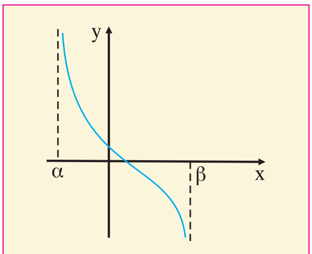
$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)\cdot \lim_{x\to\beta^-} f(x)<0$$

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0\in(\alpha,\ \beta)$ ώστε $f(x_0)=0$.

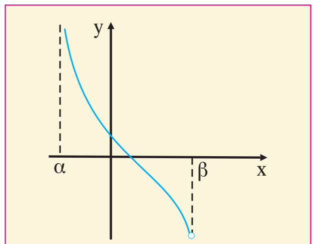




Σχόλιο : Η ύπαρξη του x_0 στο $(α, β)$ με $f(x_0)=0$ ισχύει καί στις περιπτώσεις :



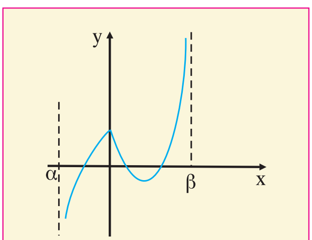
σχ. 1



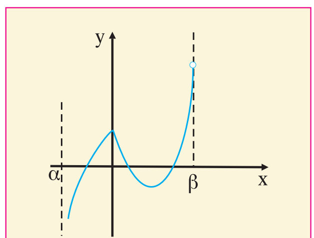
σχ. 2

α. $\lim\limits_{x\to α^+} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to β^-} f(x)=-\infty$ (σχ. 1).

β. $\lim\limits_{x\to α^+} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to β^-} f(x)<0$ (σχ. 2)



σχ. 3



σχ. 4

γ. $\lim\limits_{x\to α^+} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to β^-} f(x)=+\infty$ (σχ. 3)

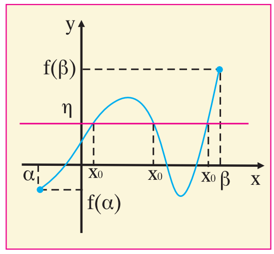
δ. $\lim\limits_{x\to α^+} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to β^-} f(x)>0$ (σχ. 4)

3. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (Θ.Ε.Τ)

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν ισχύουν ότι:

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α), f(β) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\eta$.



Γεωμετρική ερμηνεία

Η ευθεία y = η όπου η μεταξύ των $f(\alpha)$, $f(\beta)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη μεταξύ των α και β.

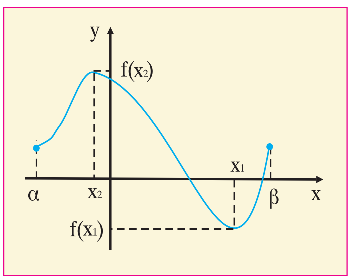
Παρατηρήσεις - Σχόλια

- Αν f συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και $x_1,x_2\in\Delta$ τότε η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.
- Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα (Αν η f είναι σταθερή συνεχής ή μη τότε το f(Δ) είναι μονοσύνολο).

4. Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β] τότε η f παίρνει στο [α,β] μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m, δηλαδή υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$ οπότε:

$m=f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)=M$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.



Σχόλια – Παρατηρήσεις

- Αν η f είναι συνεχής μη σταθερή συνάρτηση ορισμένη στο Δ = [α,β] τότε το σύνολο τιμών της είναι το f(Δ) =[m,M] όπου m, η ελάχιστη και M, η μέγιστη τιμή της.
- Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\ \beta]$, τότε $f([\alpha,\ \beta])=[f(\alpha),\ f(\beta)]$, ενώ αν είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\ \beta]$ τότε $f([\alpha,\ \beta])=[f(\beta),\ f(\alpha)]$.

Ευρεση συνόλου τιμών

- Όπως ήδη αναφέρθηκε στο πρώτο σχόλιο είναι φανερό ότι το σύνολο τιμών μιάς συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης σε κλειστό $[\alpha, \beta]$ είναι το $[f(\alpha), f(\beta)]$ αν η f είναι αύξουσα και $[f(\beta), f(\alpha)]$ αν η f είναι φθίνουσα.
- Αν η f είναι συνεχής στο ανοιχτό (α, β) τότε το σύνολο τιμών της στη περίπτωση που είναι γνησίως αύξουσα είναι $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$ ενώ στη περίπτωση που είναι γνησίως φθίνουσα είναι $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x),\ \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$
- Αν τέλος η f είναι συνεχής και ορισμένη στα $[\alpha, \beta)$ ή $(\alpha, \beta]$ τότε (αν f γνησίως αύξουσα) το σύνολο τιμών της είναι: $f(A) = \left[f(\alpha),\ \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$ ή $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x),\ f(\beta)\right]$.

  Ενώ (αν f γνησίως φθίνουσα) το σύνολο τιμών της είναι $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), f(\alpha)\right]$ ή $\left[f(\beta), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$.

B. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ασκήσεις που ζητείται η **ύπαρξη** μιας τουλάχιστον ρίζας εξίσωσης σε **ανοικτό** διάστημα (α,β). Τότε:

α. Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (αν υπάρχουν).
β. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος.
γ. Θέτουμε το 1ο μέλος ίσο με μια συνάρτηση.
δ. Ελέγχουμε τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για τη συνάρτηση που θεωρήσαμε.

Για την μοναδικότητα της ρίζας εφόσον ζητείται:

Αποδεικνύουμε ή ότι είναι "1 - 1"
ή ότι είναι γνησίως μονότονη
ή εργαζόμαστε με απαγωγή σε άτοπο

Παράδειγμα 1

Να δειχθεί ότι η εξίσωση : $\dfrac{x^{2004}+2004}{x-3}+\dfrac{x^{2003}+2003}{x-4}=0 \quad (1)$ **έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα** $(3,4)$**.**

Λύση

Η (1) για $x \neq 4$ και $x \neq 3$ γράφεται: $\left(x^{2004}+2004\right)(x-4)+\left(x^{2003}+2003\right)(x-3)=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(x^{2004}+2004)(x-4)+(x^{2003}+2003)(x-3)$, για την οποία ισχύουν:

• Είναι συνεχής στο $[3,4]$ και

• $f(3)f(4)=(3^{2004}+2004)(3-4)(4^{2003}+2003)(4-3)=-(3^{2004}+2004)(4^{2003}+2003)<0$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 που ανήκει στο $(3,4)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0$

Επειδή η (1) είναι ισοδύναμη με την $f(x)=0$ για $x\neq 4$ και $x\neq 3$ θα έχει και αυτή μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(3,4)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Ασκήσεις που ζητείται η **ύπαρξη** μιας τουλάχιστον ρίζας μιας εξίσωσης σε **κλειστό** διάστημα $[\alpha,\beta]$. Τότε: Επαναλαμβάνουμε τα βήματα α, β, γ, της μεθόδου 1.

Αν στο βήμα δ προκύπτει $f(\alpha)\cdot f(\beta)\leq 0$ τότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

• αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει από Θ.Β. ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$.

• αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)=0$, τότε $f(\alpha)=0$ οπότε $x_o=\alpha$ ή $f(\beta)=0$ οπότε $x_o=\beta$ αν δεν υπάρχουν αντίθετοι περιορισμοί.

Οπότε, τελικά υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_0)=0$.

Παράδειγμα 2

Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^3+3x-\lambda=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0,1]$, για κάθε $\lambda\in[0,4]$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=x^3+3x-\lambda$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική και είναι $f(0)f(1)=-\lambda(4-\lambda)\leq 0$, διότι $0\leq\lambda\leq 4$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Αν $f(0)f(1)<0$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 που ανήκει στο $(0,1)\subseteq[0,1]$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0$.

2. Αν $f(0)f(1)=0$, τότε: $f(0)=0$ ή $f(1)=0$, που σημαίνει ότι η ρίζα της f θα είναι το 0 ή το 1.

Απο τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 που ανήκει στο $[0,1]$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0$, δηλαδή η αρχική εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0,1]$.

Κατηγορία – Μέθοδος 3

α. Ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη σημείου τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τον άξονα x΄x, τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση που δίνεται.

β. Ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων f,g , τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στη συνάρτηση h με τύπο : $h(x) = f(x) - g(x)$.

Παράδειγμα 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x+2)^{x+2} - 3$. Να δειχθεί ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x σ'ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα (- 1 , 0).

Λύση

Η f είναι συνεχής στο διάστημα [- 1 , 0] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επίσης είναι $f(-1)f(0) < 0$.

Οπότε , σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 που ανήκει στο (- 1 , 0) τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σ'ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο διάστημα (- 1 , 0).

Παράδειγμα 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = x$ και $g(x) = συν2x$. Να δειχθεί ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα τουλάχιστον σημείο τομής με τετμημένη στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο $h(x) = x - συν2x$.

Η h είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ως διαφορά συνεχών και επιπλέον είναι $h(0)h\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$

Οπότε , σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 που ανήκει στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε : $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 - συν2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = συν2x_0$

Αυτό σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Σε ασκήσεις που ζητείται η ύπαρξη περισσοτέρων από μίας ριζών μιας εξίσωσης , σε διάστημα Δ: χωρίζουμε το διάστημα σε κατάλληλα υποδιαστήματα και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano σε κάθε ένα απ' αυτά τα διαστήματα.

Παράδειγμα 5

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3+3x^2=1$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (- 1, 1).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3+3x^2-1$ η οποία είναι συνεχής στο [-1 , 0] ως πολυωνυμική και ισχύει $f(-1)f(0)=-1<0$.
Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_1 που ανήκει στο (-1 , 0) τέτοιο ώστε: $f(x_1)=0$ (1).

Επίσης η f είναι συνεχής και στο διάστημα [0 , 1] ως πολυωνυμική και ισχύει $f(0)f(1)=-3<0$.
Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_2 που ανήκει στο (0 ,1) τέτοιο ώστε: $f(x_2)=0$ (2).
Απο τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση που δόθηκε έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (- 1 , 1).

Κατηγορία – Μέθοδος 5
Ασκήσεις στις οποίες δίνεται η συνέχεια συνάρτησης, έστω f, σε ανοικτό διάστημα της μορφής (α,β) όπου $\alpha,\beta\in R$, και ισχύει: $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)<0$.
Τότε : Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες ορίου και διάταξης συμπεραίνουμε ,ότι υπάρχουν δύο τιμές κ και λ στις περιοχές των α,β αντίστοιχα για τις οποίες ισχύει $f(\kappa)\cdot f(\lambda)<0$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[\kappa,\lambda]\subset(\alpha,\beta)$.

Παράδειγμα 6

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=xe^x+\ln x-2$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0 , 1).

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$ και ισχύει: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(xe^x+\ln x-2\right)=-\infty$

Συνεπώς υπάρχει $k\in(0,1)$: $f(k)<0$ και επίσης είναι $f(1)=1e^1+\ln1-2=e-2>0$. Η f είναι συνεχής στο [k , 1], άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 στο (k , 1) (άρα και στο (0,1)) τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6
Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζουμε ασκήσεις που αφορούν το **πρόσημο** συνεχούς συνάρτησης υπαγορεύεται από τις επόμενες δύο προτάσεις
Πρόταση 1
Αν για την συνεχή συνάρτηση f σε διάστημα Δ είναι $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in\Delta$ τότε η f διατηρεί το πρόσημο των τιμών της στο Δ.

Απόδειξη

Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο. Τότε υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \Delta$ με $\kappa < \lambda$ ώστε $f(\kappa)f(\lambda) < 0$. Από το Θ. Bolzano η f θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (κ, λ) που είναι άτοπο αφού $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$.

Πρόταση 2

Το πρόσημο συνεχούς συνάρτησης μεταξύ δύο διαδοχικών της ριζών είναι σταθερό.
Η απόδειξη είναι όμοια με την πρόταση 1.

Παράδειγμα 7

Αν η f είναι συνεχής στο R με $f(2003) = -2004$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{[f(\alpha) - 2005]x^5 + 6x^4 - 3x + 4}{f(\alpha)x^3 + x^2 - 9} = +\infty$

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{[f(\alpha) - 2005]x^5 + 6x^4 - 3x + 4}{f(\alpha)x^3 + x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(\alpha) - 2005}{f(\alpha)} x^2 = +\infty$. Διότι αφού η f είναι συνεχής στο R και $f(2003) = -20004 < 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ θα είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in R$ άρα $f(\alpha) < 0$ και $f(\alpha) - 2005 < 0$ οπότε ο λόγος $\dfrac{f(\alpha) - 2005}{f(\alpha)} > 0$.

Παράδειγμα 8

Για την f που είναι συνεχής στο R γνωρίζουμε ότι έχει τρεις ακριβώς ρίζες -1, 2, 5 και επίσης $f(-2) = 4$, $f(0) = 3$ και $f(4) = -1$, $f(6) = 3$.

Να βρεθεί το πρόσημο της f

Λύση

Το πρόσημο της f φαίνεται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
f(x)		+	0	+	0	-	0	+	
		f(-2) = 4		f(0) = 3		f(4) = -1		f(6) = 3	

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η ύπαρξη x_0 που πληρεί μια συνθήκη.

Θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση h η οποία υποδηλώνεται από τη ζητούμενη συνθήκη σε κατάλληλο κλειστό διάστημα. Η ισχύς του Θ.Β. για την h εξασφαλίζει την ύπαρξη του x_0 που αναζητάμε.

Παράδειγμα 9

Έστω οι συναρτήσεις f, g, συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και $g(x)\neq 0$ για τα $x\in[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{1}{\xi-\alpha}+\dfrac{1}{\xi-\beta}$ (1)

Λύση

Από την (1) έχουμε με απαλοιφή:

$f(\xi)(\xi-\alpha)(\xi-\beta)=g(\xi)(\xi-\beta)+g(\xi)(\xi-\alpha)$ (2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)(x-\alpha)(x-\beta)-g(x)(x-\beta)-g(x)(x-\alpha)$.

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$ και των $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$ που είναι επίσης συνεχείς.
- $h(\alpha)=-g(\alpha)(\alpha-\beta)$

  $h(\beta)=-g(\beta)(\beta-\alpha)=g(\beta)\cdot(\alpha-\beta)$

  Άρα $h(\alpha)h(\beta)=-g(\alpha)g(\beta)(\alpha-\beta)^2<0$ διότι $(\alpha-\beta)^2>0$ και $g(\alpha)$, $g(\beta)$ είναι ομόσημοι αφού g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $g(x)\neq 0$ οπότε η g διατηρεί σταθερό πρόσημο.

  Από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $h(\xi)=0$ άρα και $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{1}{\xi-\alpha}+\dfrac{1}{\xi-\beta}$ αφού οι (1), (2) είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα 10

Έστω $f:[-\alpha,\alpha]\to[-\alpha,\alpha]$ συνεχής.

Να δειχτεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[-\alpha,\alpha]$ ώστε $f(x_0)=x_0$

Λύση

Έστω $h(x)=f(x)-x$ ορισμένη στο $[-\alpha,\alpha]$. Η h είναι συνεχής.

Ισχύουν επίσης: $h(-\alpha)=f(-\alpha)+\alpha$ (1)

$h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha$ (2)

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το $[-\alpha,\alpha]$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$ ισχύει $-\alpha\leq f(x)\leq\alpha$ οπότε

$$\begin{cases}-\alpha\leq f(\alpha)\leq\alpha\\ -\alpha\leq f(-\alpha)\leq\alpha\end{cases}$$

Από αυτές και τις (1), (2) φαίνεται ότι $h(-\alpha)\geq 0$ και $h(\alpha)\leq 0$. Οπότε $h(-\alpha)\cdot h(\alpha)\leq 0$.

(α) Εάν $h(-\alpha)\cdot h(\alpha)<0$, από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(-\alpha,\alpha)$ ώστε $h(x_0)=0$.

(β) Εάν $h(-\alpha)\cdot h(\alpha)=0$ τότε $h(-\alpha)=0$ ή $h(\alpha)=0$, οπότε $x_0=-\alpha$ ή $x_0=\alpha$

Από (α), (β) λοιπόν αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[-\alpha,\alpha]$ ώστε:
$h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

Παράδειγμα 11

Έστω f συνεχής στο $[1,2]$ με $f(1)=f(2)$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\theta\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$ ώστε $f(\theta)=f\left(\theta+\frac{1}{2}\right)$.

Λύση

Πρέπει $1\le\theta+\frac{1}{2}\le 2$ οπότε ο θ είναι μικρότερος ή ίσος του $\frac{3}{2}$.

Έστω $g:\left[1,\frac{3}{2}\right]\to R$ με $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ και ισχύει:

$g(1)=f(1)-f\left(\frac{3}{2}\right)$ και $g\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)-f(2)=f\left(\frac{3}{2}\right)-f(1)$ (υπόθεση).

Άρα $g(1)\cdot g\left(\frac{3}{2}\right)=-\left[f\left(\frac{3}{2}\right)-f(1)\right]^2\le 0$.

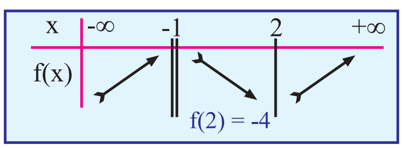
(α) Αν $g(1)\cdot g\left(\frac{3}{2}\right)<0$ τότε από το Θ. Bolzano υπάρχει $\theta\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ ώστε $g(\theta)=0$.

(β) Αν $g(1)\cdot g\left(\frac{3}{2}\right)=0$ τότε $g(1)=0$ ή $g\left(\frac{3}{2}\right)=0$ άρα το θ είναι το 1 ή το $\frac{3}{2}$.

Από (α), (β) φαίνεται ότι υπάρχει $\theta\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$ με $g(\theta)=0\Leftrightarrow f(\theta)=f\left(\theta+\frac{1}{2}\right)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 8
Ασκήσεις που ζητείται η εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης που είναι συνεχής και γνησίως μονότονη κατά διαστήματα. Τότε:
Βρίσκουμε το σύνολο τιμών στα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη. Η ένωσή τους μας δίνει το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

Παράδειγμα 12



Για την συνάρτηση f γνωρίζουμε τον διπλανό πίνακα και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$

$f(2)=-4$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=10$. **Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.**

Λύση

- Για τα $x \in (-\infty, -1)$ το σύνολο τιμών της f είναι $B_1 = (0, +\infty)$.
- Για τα $x \in (-1, 2)$ το σύνολο τιμών της f είναι $B_2 = (-4, +\infty)$.
- Για τα $x \in [2, +\infty)$ το σύνολο τιμών της f είναι $B_3 = [-4, 10)$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = [-4, +\infty)$.

Κατηγορία – Μέθοδος 9
Εφαρμογές των θεωρημάτων
- Ενδιάμεσης τιμής
- Μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Παράδειγμα 13

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in [\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_\nu)}{\nu}$.

Λύση

Η f ως συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ έχει ελάχιστη τιμή μ και μέγιστη M.

Άρα
$$\left.\begin{aligned} &\mu \le f(x_1) \le M \\ &\mu \le f(x_2) \le M \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mu \le f(x_\nu) \le M \end{aligned}\right\}$$
Προσθέτουμε και έχουμε: $\nu\mu \le f(x_1) + \ldots + f(x_\nu) \le \nu M$
$$\mu \le \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_\nu)}{\nu} \le M$$

Αφού ο αριθμός $\dfrac{f(x_1) + \ldots + f(x_\nu)}{\nu}$ είναι μεταξύ ελάχιστης (μ) και μέγιστης (M) τιμής συνεχούς συνάρτησης θα ανήκει στο σύνολο τιμών της και συνεπώς θα υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(\xi) = \dfrac{f(x_1) + \ldots + f(x_\nu)}{\nu}$.

Παρατήρηση: Αν η f σταθερή στο $[\alpha, \beta]$ τότε η ζητούμενη προς απόδειξη σχέση ισχύει για κάθε $\xi \in [\alpha, \beta]$.

Παράδειγμα 14

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to R$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) = \dfrac{\mu f(\alpha) + \nu f(\beta)}{\mu + \nu}$ με $\mu, \nu > 0$.

Λύση

Η f ως συνεχής στο [α,β] έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή , έστω m και M αντίστοιχα.

Τότε : $\begin{cases} m \le f(\alpha) \le M \\ m \le f(\beta) \le M \end{cases}$ και επειδή $\mu, \nu > 0$ $\begin{cases} \mu m \le \mu f(\alpha) \le \mu M & (1) \\ \nu m \le \nu f(\beta) \le \nu M & (2) \end{cases}$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε :

$$(\mu+\nu)m \le \mu f(\alpha)+\nu f(\beta) \le (\mu+\nu)M \Leftrightarrow m \le \frac{\mu f(\alpha)+\nu f(\beta)}{\mu+\nu} \le M \quad (3)$$

- Αν **m < M** τότε σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών υπάρχει

  $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi) = \dfrac{\mu f(\alpha)+\nu f(\beta)}{\mu+\nu}$.
- Αν **m = M** τότε η f είναι σταθερή και το ξ μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος [α,β].

Παράδειγμα 15

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln x + e^x$ και πεδίο ορισμού το (0,1].

i. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

ii. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα (0,1).

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο (0,1] διότι είναι άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1] διότι για κάθε $x_1, x_2 \in (0,1]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$\ln x_1 < \ln x_2$ και $e^{x_1} < e^{x_2}$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε :

$$\ln x_1 + e^{x_1} < \ln x_2 + e^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,1].

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x + e^x) = -\infty$ και $f(1) = \ln 1 + e^1 = 0 + e = e$

το σύνολο τιμών της f είναι : $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, e]$.

ii. Το 0 ανήκει στο πεδίο τιμών της f. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1]$ τέτοιο ώστε να ισχύει : $f(x_0) = 0$ και επειδή $x_0 \ne 1$ έπεται ότι $x_0 \in (0,1)$.Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να αποδειχθεί ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στη συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 & , \ -2 \le x \le 0 \\ x^2 - 3x + 1 & , \ \ 0 < x \le 1 \end{cases}$$ **στο διάστημα [-2,1]**

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[-2,0)\cup(0,1]$ σαν πολυωνυμική.

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=1=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)$, η είναι συνεχής και στο $x_0=0$.

Άρα είναι συνεχής στο $[-2,1]$. Ισχύει $f(-2)=9$ και $f(1)=-1$ οπότε $f(-2)\cdot f(1)=-9<0$.

Άρα εφαρμόζεται το Θ. Bolzano στο διάστημα [-2,1].

Άσκηση 2

Να δειχτεί ότι η εξίσωση $3\text{συν}x - x - 2 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

Έστω $f(x)=3\text{συν}x-x-2$ ορισμένη στα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ και $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Η f είναι συνεχής στα $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ και $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και ισχύουν:

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot f(0)=\left(\frac{\pi-4}{2}\right)\cdot1<0$ ενώ $f(0)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\cdot\left(\frac{-\pi-4}{2}\right)<0$.

Άρα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Τελικά υπάρχουν δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Άσκηση 3

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to R$ με $\alpha\le f(x)\le\beta$ τέτοια ώστε για κάθε $x,y\in[\alpha,\beta]$ να ισχύει $|f(x)-f(y)|\le\kappa|x-y|$, με $\kappa\in(0,1)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

ii. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_0)=x_0$.

Λύση

i. Για $y=x_0$ τυχαίο έχουμε:

$$|f(x)-f(x_0)|\le\kappa|x-x_0|\Leftrightarrow-\kappa|x-x_0|\le f(x)-f(x_0)\le\kappa|x-x_0|.$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Άρα προκύπτει ότι η f είναι συνεχής στο $x_0\in[\alpha,\beta]$ δηλαδή συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

ii. Έστω $g(x)=f(x)-x$ ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής.

Επειδή $g(\alpha)\cdot g(\beta)=(f(\alpha)-\alpha)\cdot(f(\beta)-\beta)\le0$ (από την υπόθεση), σύμφωνα με το Θ. Bolzano θα υπάρχει $x_0 \in [\alpha,\beta]$ ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

Η μοναδικότητα του x_0 θα εξασφαλιστεί από την μονοτονία της g.

Είναι $\lambda = \dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{f(x_1)-x_1-f(x_2)+x_2}{x_1-x_2} = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-1$ (1)

Από τη δοθείσα είναι:

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right| \le \kappa \Leftrightarrow -\kappa \le \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \le \kappa \Leftrightarrow -\kappa-1 \le \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-1 \le \kappa-1$$

Όμως $\kappa<1 \Leftrightarrow \kappa-1<0$ άρα $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<0$ δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Σχόλιο

Μια άλλη απόδειξη της μοναδικότητας είναι η εξής:

Έστω ότι υπάρχουν δύο αριθμοί ρ_1, ρ_2 με την ιδιότητα $f(\rho_1)=\rho_1$ και $f(\rho_2)=\rho_2$.

Τότε η σχέση για $x=\rho_1$ και $y=\rho_2$ γίνεται:

$$|f(\rho_1)-f(\rho_2)| \le \kappa|\rho_1-\rho_2|$$

$$|\rho_1-\rho_2| \le \kappa|\rho_1-\rho_2|$$

$1 \le \kappa$ που είναι άτοπο από την υπόθεση. Άρα υπάρχει ακριβώς ένα x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.

Άσκηση 4

Έστω $f(x)=(x^2-3x+2)\cdot h(x)$ για κάθε $x \in R$ όπου h είναι συνεχής συνάρτηση στο R. Αν οι αριθμοί 1, 2 είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, να αποδειχθεί ότι $h(1)\cdot h(2) \ge 0$.

Λύση

Έστω $h(1)\cdot h(2)<0$. Επειδή η h είναι και συνεχής συνάρτηση h στο $[1,2]$ και πληρεί τις προυποθέσεις του Θ. Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ ώστε $h(x_0)=0$.

Τότε όμως $f(x_0)=(x_0^2-3x_0+2)\cdot h(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)=0$. Άρα το $x_0 \in (1,2)$ είναι ρίζα της f, άτοπο αφού η f έχει τους 1, 2 διαδοχικές ρίζες. Οπότε δεν ισχύει η $h(1)\cdot h(2)<0$ και συνεπώς ισχύει $h(1)\cdot h(2) \ge 0$.

Άσκηση 5

Έστω συναρτήσεις f και g ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα [α,β] με σύνολο τιμών το [α,β] και α διάφορο του μηδενός.

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [α,β] και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο [α,β], να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\beta f(\xi)+\alpha g(\xi)=\xi(\alpha+\beta)$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\beta f(x)+\alpha g(x)-x(\alpha+\beta)$, που είναι συνεχής στο [α,β] ως άθροισμα συνεχών.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο [α,β] και το σύνολο τιμών της είναι το [α,β] θα είναι $f(\alpha)=\alpha$ και $f(\beta)=\beta$ (1).

Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο [α,β] και το σύνολο τιμών της είναι το [α,β] θα είναι $g(\alpha)=\beta$ και $g(\beta)=\alpha$ (2).

Είναι: $h(\alpha)=\beta f(\alpha)+\alpha g(\alpha)-\alpha(\alpha+\beta)\overset{(1),(2)}{=}\beta\alpha+\alpha\beta-\alpha(\alpha+\beta)=\alpha(\beta-\alpha)$

$$h(\beta)=\beta f(\beta)+\alpha g(\beta)-\beta(\alpha+\beta)\overset{(1),(2)}{=}\beta^2+\alpha^2-\beta(\alpha+\beta)=-\alpha(\beta-\alpha)$$

Οπότε

$$h(\alpha)h(\beta)=\alpha(\beta-\alpha)\left[-\alpha(\beta-\alpha)\right]=-\alpha^2(\beta-\alpha)^2<0$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow \beta f(\xi)+\alpha g(\xi)=\xi(\alpha+\beta)$$

Άσκηση 6

Έστω $f:R\to R$ συνεχής με $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta$ και $\alpha+\beta<-1$ με $\beta>0$.

Να δειχτεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ακριβώς ρίζες στο R.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο R. Ισχύουν: $f(0)=\beta>0,\ \ f(1)=1+\alpha+\beta<0,$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$$

Από το πρώτο όριο, υπάρχει $x_1>1$ ώστε $f(x_1)>0$ και από το δεύτερο όριο υπάρχει $x_2<0$ ώστε $f(x_2)<0$. Στα διαστήματα $[x_2,0]$, $[0,1]$, $[1,x_1]$, η f πληρεί τις προϋποθέσεις του Bolzano άρα υπάρχουν τρεις τουλάχιστον ρίζες, μια σε κάθε ένα από τα διαστήματα. Επειδή όμως η f είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες. Τελικά οι ρίζες είναι ακριβώς τρεις.

Άσκηση 7

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3+\lambda x-2=0$ με $\lambda>0$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα.

Λύση

Έστω $f(x)=x^3+\lambda x-2$ ορισμένη στο $[0,2]$ **(εδώ δεν αναφέρεται το διάστημα, οπότε το βρίσκουμε κάνοντας δοκιμές)**.

Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και $f(0)\cdot f(2)=-2\cdot(2\lambda+6)<0$. Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$ ώστε $f(x_0)=0$.

Επειδή όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, η ρίζα είναι μοναδική.

Σημείωση : Για την μονοτονία της f έχουμε : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=x_2^2+x_1\cdot x_2+x_1^2+\lambda>0$

(τριώνυμο με αρνητική Διακρίνουσα). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{2\kappa}-2x+1=0$ με $\kappa>1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0, 1).

Λύση

Έστω $P(x)=x^{2\kappa}-2x+1$. Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο και έχουμε:

$$P(x)=x^{2\kappa}-2x+1=x^{2\kappa}-x-x+1=x\left(x^{2\kappa-1}-1\right)-(x-1)=$$

$$=x(x-1)\left(x^{2\kappa-2}+x^{2\kappa-3}+\ldots+x+1\right)-(x-1)=$$

$$=(x-1)\left(x^{2\kappa-1}+x^{2\kappa-2}+\ldots+x^2+x-1\right)\qquad(1)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση π με $\pi(x)=x^{2\kappa-1}+x^{2\kappa-2}+\ldots+x-1$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$

με $\pi(0)=-1$ και $\pi(1)=\underbrace{1+\ldots..+1}_{2\kappa-1}-1=2\kappa-2=2(\kappa-1)>0$ (από την υπόθεση).

Από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $\pi(x_0)=0$. Άρα η (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

Άσκηση 9

Έστω f συνεχής στο [α,β] με α < β και $x_1,x_2,\ldots,x_\nu\in[\alpha,\beta]$.

Να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ ώστε $\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}\cdot f(\xi)=f(x_1)+2f(x_2)+\ldots..+\nu\cdot f(x_\nu)$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, οπότε παρουσιάζει ελάχιστη και μέγιστη τιμή m, M αντίστοιχα.

Δηλαδή: $m\le f(x_1)\le M$, $2m\le 2f(x_2)\le 2M$, $3m\le 3f(x_3)\le 3M$, ..., $\nu m\le \nu f(x_\nu)\le \nu M$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω ανισώσεων έχουμε:

$$m\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}\le f(x_1)+2f(x_2)+\ldots..+\nu\cdot f(x_\nu)\le M\cdot\frac{\nu(\nu+1)}{2}\Leftrightarrow$$

$$m\le 2\cdot\frac{f(x_1)+2f(x_2)+\ldots..+\nu\cdot f(x_\nu)}{\nu(\nu+1)}\le M$$

Από το Θ. ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει ξ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ώστε

$$f(\xi)=2\cdot\frac{f(x_1)+.....+\nu\cdot f(x_\nu)}{\nu(\nu+1)} \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu+1)}{2}\cdot f(\xi)=f(x_1)+2\cdot f(x_2)+.....+\nu\cdot f(x_\nu)$$

Άσκηση 10

Έστω $\kappa,\lambda,\mu\in R$ με $\kappa\neq 0$ και $\mu^2+\mu\lambda+\kappa\mu<0$. Να δειχθεί ότι $\lambda^2>4\kappa\mu$.

Λύση

Έστω $f(x)=\kappa x^2+\lambda x+\mu$ με $\kappa\neq 0$ ορισμένη και συνεχής στο $[0,1]$.

Είναι $f(0)\cdot f(1)=\mu(\kappa+\lambda+\mu)=\kappa\mu+\lambda\mu+\mu^2<0$.

Άρα θα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 της f στο $(0,1)$. Οπότε $\kappa x_0^2+\lambda x_0+\mu=0$.

Άρα $\Delta\geq 0\Leftrightarrow \lambda^2-4\kappa\mu\geq 0\Leftrightarrow \lambda^2\geq 4\kappa\mu \quad (1)$

Αν ήταν $\Delta=0$ τότε η $f(x)=0$ θα είχε διπλή ρίζα άρα $f(x)=\kappa\left(x+\frac{\lambda}{2\kappa}\right)^2$

Αλλά τότε $f(0)\cdot f(1)=\frac{1}{16}\cdot\frac{\lambda^2}{\kappa^2}(2\kappa+\lambda)^2\geq 0$, άτοπο. Άρα από την (1) ισχύει $\lambda^2>4\kappa\mu$.

Άσκηση 11

Έστω $f:R\to R$, συνεχής συνάρτηση με $f(3)+f(5)+f(7)=0$ (1).

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα .

Λύση

- Αν $f(3)=0$ ή $f(5)=0$ ή $f(7)=0$ τότε είναι προφανές το ζητούμενο.
- Αν $f(3)\cdot f(5)\cdot f(7)\neq 0$, δηλαδή κανένας απο τους όρους του γινομένου δεν είναι 0 , προκύπτει απο την (1) ότι δύο τουλάχιστον απο τους $f(3),f(5),f(7)$ είναι ετερόσημοι.

  Έτσι αν $f(3)\cdot f(5)<0$ προκύπτει απο το θεώρημα του Bolzano ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (3 , 5).
- Ομοίως αν $f(5)\cdot f(7)<0$ ή $f(3)\cdot f(7)<0$, προκύπτει πάλι απο το θεώρημα του Bolzano ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διαστήμα (5 , 7) ή (3 , 7) αντίστοιχα.

Άσκηση 12

Έστω $f:[0,10]\to R$ με $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$.

Να βρεθεί το σύνολο των τιμών της f και να ορίσετε την f^{-1} .

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[0,10]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,10]$ (αποδεικνύεται με τον λόγο μεταβολής).

Άρα $f(A)=[f(0),\ f(10)]=\left[0,\dfrac{100}{101}\right]$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και 1-1, οπότε ορίζεται η $f^{-1}:\left[0,\dfrac{100}{101}\right]\to R$. Για την εύρεση του τύπου της f^{-1} λύνουμε την εξίσωση $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ ως προς x. Έχουμε $f^{-1}(y)=\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$ με $y\in[0,1)$.

Άσκηση 13

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to Z$ συνεχής με $\alpha<\beta,\quad \alpha,\beta\in R$. Να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή.

Λύση

Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή άρα θα υπάρχουν δύο αριθμοί $\kappa,\lambda\in[\alpha,\beta]$ με $\kappa<\lambda$ ώστε $f(\kappa)\neq f(\lambda)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\kappa,\lambda]$, από το Θ. ενδιάμεσων τιμών η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\kappa),\ f(\lambda)$ οι οποίοι είναι ακέραιοι λόγω του πεδίου τιμών.
Μεταξύ όμως δύο ακεραίων αριθμών υπάρχουν και ρητοί και άρρητοι. Άρα θα υπάρχει $x_0\in(\kappa,\lambda)$ τέτοιο ώστε το $f(x_0)$ να μην είναι ακέραιος. Αυτό είναι άτοπο γιατί το σύνολο τιμών είναι το Z.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}3x-1 & ,\ x\le 1\\ x+1 & ,\ x>1\end{cases}$

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.
ii. Να δειχθεί ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $f(x)=0$ στο $(0,2)$.

(**Υπ.: i.** Εξετάστε την συνέχεια στο $x_0=1$ και δείξτε ότι είναι συνεχής στο R,
ii. Εφαρμόστε το Θ.Β. στο $[0,2]$)

2. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [0,8] για την οποία ισχύουν :

$f(0)=1$, $f(2)=-2$, $f(4)=2$, $f(6)=-4$, $f(8)=1$

i. Να βρείτε πόσες τουλάχιστον φορές η γραφική παράσταση της f θα τέμνει τον άξονα x΄x στο διάστημα (0 , 8).
ii. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα [0,2] και [4,6] και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα [2,4] και [6,8] να βρείτε πόσες ρίζες θα έχει η εξίσωση $f(x)=0$.

(**Υπ.: i.** Εφαρμόστε το Θ.Β. στα $[0,2]$, $[2,4]$, $[4,6]$, $[6,8]$. **Απ.: i.** 4 τουλάχιστον φορές **ii.** Ακριβώς 4)

3. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο [α,β] με $f(\alpha)\neq 0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $\frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(\beta)+f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

(**Υπ.:** Βλέπε Μέθοδος 1. Εφαρμόστε το Θ. Β. στην συνάρτηση $h(x)=f(x)(\beta-\alpha)-(x-\alpha)(f(\beta)+f(\alpha))$ στο $[\alpha,\beta]$)

4. Να δείξετε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

5. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+.....+\frac{1}{x-\nu}=0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(1,2)$, $(2,3)$,.....$(\nu-1,\ \nu)$.

(**Υπ.:** Κάνετε απαλοιφή παρανομαστών και εφαρμόστε το Θ.Β. σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2]$, $[2,3]$, ..., $[\nu-1,\nu]$)

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4+(\kappa+\lambda-5)x+1=0$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $(0,1)$, εάν $\kappa+\lambda=1$.

(**Υπ.:** Εφαρμόστε Θ.Β. στο $[0,1]$ και δείξτε ότι $f(0)f(1)<0$ με τη βοήθεια της σχέσης $\kappa+\lambda=1$)

7. Έστω $f:[-\alpha,\alpha]\to R$ συνεχής με $x^2+f^2(x)=\alpha^2$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$. Να δείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\alpha,\alpha)$.

(**Υπ.:** Παρατηρήστε ότι $f(x)=0$ όταν $x=\pm\alpha$: Υποθέστε ότι δεν διατηρεί πρόσημο στο $(-\alpha,\alpha)$ και καταλήξτε σε **άτοπο**)

8. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)+\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}x\right)$ παίρνει την τιμή -4 για κάποιο $x\in(-2,-1)$.

(**Υπ.:** Παρατηρήστε ότι $f(-2)<-4<f(-1)$ και εφαρμόστε Θ.Ε.Τ.)

9. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3-3x+1=0$ έχει δύο μόνο ρίζες στο διάστημα $(0,2)$.

(**Υπ.:** Δείξτε ότι έχει μια τουλάχιστον ρίζα στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$ οπότε αφού είναι 3[ου] βαθμού θα έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $(0,2)$)

10. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x\cdot\ell n\sqrt{x}+x^2\cdot\ell nx=2$ έχει μια τουλάχιστο ρίζα στο $(1,e)$.

(**Υπ.:** Εφαρμόστε Θ.Β. στο $[1,e]$ για την $h(x)=x\ell n\sqrt{x}+x^2\ell nx-2$)

11. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β] με: $\alpha\le f(x)\le\beta$ και $\alpha\le g(x)\le\beta$.

Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε: $(fog)(x_0)+(gof)(x_0)=2x_0$.

(**Υπ.:**Θεωρήστε την $h(x)=fog(x)+gof(x)-2x=fog(x)-x+gof(x)-x$ και εφαρμόστε το Θ. Bolzano στο $[\alpha,\beta]$. Προσέξτε τις περιπτώσεις $x_0=\alpha$ ή $x_0=\beta$)

12. Έστω f, g συνεχείς στο R με $f(x)\le 0\le g(x)$ και έστω ότι υπάρχουν $\alpha,\beta\in R$ ώστε $f(\alpha)=\alpha$ και $g(\beta)=\beta$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\gamma\in R$ ώστε $f(\gamma)+g(\gamma)=\gamma$.

(**Υπ.:**Θεωρήστε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+g(x)-x$ και εργαστείτε όπως στη μέθοδο)

13. Έστω f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha,\beta)$ και $B(\beta,\alpha)$. Αν ισχύει για κάθε $x\in R$ ότι $\alpha<g(x)<\beta$, να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν ένα τουλάχιστο κοινό σημείο.

(**Υπ.:**Παρατηρήστε $f(\alpha)=\beta$ και $f(\beta)=\alpha$. Αρκεί να δείξετε ότι $f(x_0)=g(x_0)$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Bolzano στο $[\alpha,\beta]$)

14. Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-3)\ell nx-x+2$. Να εξεταστεί αν ο αριθμός 0,946506500 είναι τιμή της συνάρτησης.

(**Υπ.:**Θεώρημα Bolzano σε διάστημα $[3,\theta]$. Αρκεί $f(\theta)>0$ (π.χ. $\theta=e^2$))

15. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[0,\alpha]$ με $f(0)=f(\alpha)$.

i. Να δειχθεί ότι η $h(x)=f(x)-f\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)$ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\alpha}{2}\right]$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x)=f\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\alpha}{2}\right)$

(**Υπ.:i.** Αν $x\in\left[0,\frac{\alpha}{2}\right]$ τότε $x+\frac{\alpha}{2}\in\left[\frac{\alpha}{2},\alpha\right]$ άρα $h(x)$ καλά ορισμένη και συνεχής

ii. Εφαρμόστε το Θ. Bolzano για την $h(x)$ στο $\left[0,\frac{\alpha}{2}\right]$)

16. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και $0\le g(x)\le 1$ για κάθε $x\in[0,1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ ώστε $f(g(\xi))+g(\xi)=f(\xi)+\xi$.

(**Υπ.:**Θεωρήστε την $h(x)=f(g(x))+g(x)-f(x)-x$ και εφαρμόστε το Θ. Bolzano στο $[0,1]$)

17. Έστω η συνάρτηση f περιττή και συνεχής στο $[-\pi,\pi]$. Να δείξετε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $f(x)=0$ στο $[-\pi,\pi]$.

(**Υπ.:** Εφαρμόστε Θ. Bolzano στο $[-\pi,\pi]$ λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι αφού f περιττή $f(-x)=-f(x)$)

18. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3,3]$. Να δείξετε ότι αν $f(1)>0$ και για κάθε $x\in(-2,2)$ ισχύει $2x^2+5f^2(x)=8$ τότε για κάθε $x\in(-2,2)$ είναι $f(x)>0$.

(**Υπ.:** Δείξτε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2,2)$ και αφού $f(1)>0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-3,3)$.)

19. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)=2\eta\mu x+1$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$.

$\left(\textbf{Απ}: f\left(\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\right)=[1,2)\right)$

20. Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και $f(0)=1$, $f(1)=2$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

(**Υπ.:** Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ τότε $f(0)<f(x)<f(1)\Leftrightarrow 1<f(x)<2$. Εφαρμόστε Θ.Ε.Τ. αφού δείξετε ότι $1<\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}<2$)

21. Αν η f συνεχής στο $[1,3]$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[1,3]$ τέτοιο ώστε:

$f(x_0)=\dfrac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6}$.

(**Υπ.:** Εφαρμόστε Θ.Ε.Τ. στο $[1,3]$ λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι αφού η f είναι συνεχής στο $[1,3]$ έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη M)

22. Η ανάβαση από μια ομάδα προσκόπων στην κορυφή ενός βουνού κ από πόλη Π που βρίσκεται στους πρόποδες του βουνού γίνεται μια μέρα από τις 8:00 έως τις 16:00. Η κατάβαση γίνεται την άλλη μέρα τις ίδιες ώρες και από το ίδιο μονοπάτι.
Να δείξετε ότι υπάρχει μια χρονική στιγμή t_0 που η ομάδα βρίσκεται στο ίδιο σημείο κατά την ανάβαση και κατά την κατάβαση.
(**Υπ.:** Θεωρήστε $s_1(t)$, $s_2(t)$ τις συναρτήσεις θέσης κατά την ανάβαση και την κατάβαση αντίστοιχα και εφαρμόστε Θ. Bolzano στην συνάρτηση $h(t)=s_1(t)-s_2(t)$ στο $[8,16]$. Λάβετε υπ΄όψιν σας ότι οι συναρτήσεις θέσεις είναι συνεχείς εξ' ορισμού. Λάβετε υπ' όψιν σας επίσης ότι $s_1(16)=s_2(8)$ και $s_1(8)=s_2(16)$)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)+f(\beta)=\alpha+\beta$.

Να δειχτεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\dfrac{f(x_0)-\beta}{x_0-\alpha}=\dfrac{f(x_0)-\alpha}{x_0-\beta}$.