2ο Κεφάλαιο

9ο μάθημα
Ορισμός παραγώγου
Εξίσωση εφαπτομένης

10ο μάθημα
Παράγωγος συνάρτησης
Κανόνες παραγώγισης
Εξίσωση εφαπτομένης

11ο μάθημα
Ρυθμός μεταβολής

12ο μάθημα
Θεωρήματα
Rolle - Μέσης Τιμής
Συνέπειες του θεωρήματος
Μέσης Τιμής

13ο μάθημα
Μονοτονία
Ακρότατα συνάρτησης

14ο μάθημα
Κυρτότητα
Σημεία καμπής
συνάρτησης

15ο μάθημα
Κανόνες
De l’ Hospital

16ο μάθημα
Ασύμπτωτες

17ο μάθημα
Μελέτη και γραφική
παράσταση συνάρτησης

Μάθημα 9
Ορισμός παραγώγου
Εξίσωση εφαπτομένης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ι. Ορισμός παράγωγου αριθμού

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Αν θέσουμε $x-x_0=h \Leftrightarrow x=x_0+h$ τότε έχουμε: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Ορισμός 2

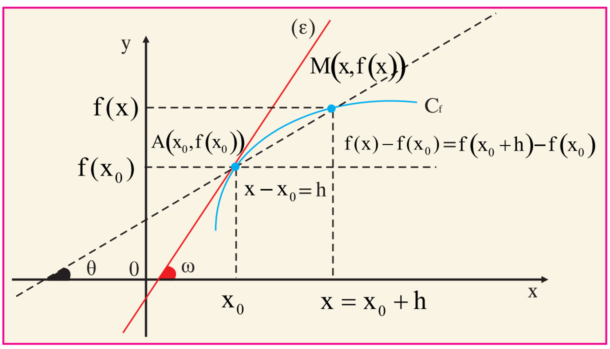
Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ,αν και μόνο αν ,υπάρχουν στο R τα όρια: $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ίσα.

Τα παραπάνω όρια ονομάζονται **πλευρικές παράγωγοι στο x_0.**

ΙΙ. Εξίσωση εφαπτομένης

Εάν $h\neq 0$,τότε δύο διακεκριμένα σημεία $A(x_0,f(x_0))$ και $M(x_0+h,f(x_0+h))$ καθορίζουν μια ευθεία (τέμνουσα) της C_f με κλίση :

$$\lambda=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}=\text{εφ}\theta .$$



Αν θεωρήσουμε το Α σταθερό και το Μ κινούμενο πάνω στη C_f,όπως δείχνει το σχήμα η εφαπτομένη ευθεία στο $(x_0, f(x_0))$ είναι το όριο των τεμνουσών ΑΜ καθώς το Μ πλησιάζει το Α ή ισοδύναμα καθώς το h τείνει στο 0 ή ισοδύναμα καθώς το x τείνει στο x_0.
Επομένως, είναι λογικό να ορίσουμε ως **κλίση της εφαπτομένης** το όριο του προηγούμενου πηλίκου, δηλαδή: $εφω = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Συνοψίζοντας, έστω συνάρτηση f και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f.

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός έστω λ, τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο Α την ευθεία (ε) που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Δηλαδή, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 ($λ = f'(x_0) = εφω$),
οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Παράγωγος και συνέχεια

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Προσοχή: **i.** Το αντίστροφο δεν ισχύει όπως εύκολα διαπιστώνουμε για την συνάρτηση $f(x) = |x|$ και $x_0 = 0$.
ii. Αν μια συνάρτηση **δεν** είναι συνεχής σ'ένα σημείο x_0 τότε αποκλείεται να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1
Εύρεση του παραγώγου αριθμού της f στο x_0 με χρήση του ορισμού
Έλεγχος για το αν είναι παραγωγίσιμη ή όχι μία συνάρτηση σε σημείο x_0 με χρήση του ορισμού.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την παράγωγο (αν υπάρχει) των συναρτήσεων :

α. $f(x) = 1 + ημ^2x$ στο $x_0 = 0$ **β.** $f(x) = 2\sqrt{x-3} + 5x + 1$ στο $x_0 = 3$

Λύση

α. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+ημ^2x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x}\cdot ημx\right) = 1\cdot 0 = 0 = f'(0)$

β. Η f έχει πεδίο ορισμού $[3, +\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+}\frac{2\sqrt{x-3}+5x+1-16}{x-3} =$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2\sqrt{x-3}+5x-15}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{2\sqrt{x-3}}{x-3}+\frac{5(x-3)}{(x-3)}\right]=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{2\sqrt{x-3}}{x-3}+5\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{2}{\sqrt{x-3}}+5\right)=+\infty.$$ Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$.

Παράδειγμα 2

Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-2$ (από δεξιά) η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x+2}$.

Λύση

Πρέπει $x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=[-2,+\infty)$.

Είναι: $$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2^+}\frac{\sqrt{x+2}-0}{x+2}=\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{\sqrt{x+2}}=+\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-2$.

Παράδειγμα 3

Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=2$ και $f(x+y)=f(x)+f(y)+5xy,\ \ x,y\in R$.

Να βρείτε την $f'(3)$.

Λύση

Είναι $$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3)+f(h)+15h-f(3)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)+15h}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}+15\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+15=2+15=17=f'(3)$$

Παράδειγμα 4

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=1$ για την οποία ισχύει:

$$x^2f^3(x)+2f(x)=x^2-1, \text{ για κάθε } x\in R$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, οπότε: $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$ (1)

Με $x=1$ στη σχέση που δόθηκε, παίρνουμε:

$$1^2\cdot f^3(1)+2f(1)=1^2-1\Leftrightarrow f^3(1)+2f(1)=0\Leftrightarrow f(1)\cdot\left(f^2(1)+2\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} f(1)=0\\ \text{ή}\\ f^2(1)+2=0\ \ (\text{αδύνατο})\end{array}\right\}\Leftrightarrow\ f(1)=0\quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$. Η δοσμένη σχέση γίνεται:

$x^2f^3(x)+2f(x)=x^2-1 \Leftrightarrow x^2f^2(x)f(x)+2f(x)=x^2-1$

(Για να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και είναι πραγματικός αριθμός).

Για κάθε $x\neq 1$ είναι :

$$\frac{x^2f^2(x)\cdot f(x)}{x-1}+\frac{2f(x)}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x^2f^2(x)\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+2\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2f^2(x)+2\right)\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x+1}{x^2f^2(x)+2}$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2f^2(x)+2}=\dfrac{2}{1\cdot 0+2}=\dfrac{2}{2}=1$. Άρα $f'(1)=1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Σε συναρτήσεις πολλαπλού τύπου όπου το x_0 είναι σημείο που εκατέρωθεν αυτού αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης ζητείται συχνά να βρούμε παραμέτρους ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

α. Απαιτούμε η f να είναι συνεχής στο x_0 και η απαίτηση αυτή θα δώσει μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων.

β. Βρίσκουμε τις πλευρικές παραγώγους:

(από δεξιά) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (και από αριστερά) $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,

αξιοποιώντας τη σχέση από τη συνέχεια. Εξισώνουμε τα δύο όρια και έχουμε ακόμη μία σχέση που με την προηγούμενη δημιουργείται σύστημα το οποίο επιλύουμε.

Παράδειγμα 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\alpha x+\beta+5, & x<3\\ \alpha x^2+\beta x, & x\geq 3\end{cases}$

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$ να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Λύση

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$ είναι και συνεχής στη θέση αυτή δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$$

Είναι: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2\alpha x+\beta+5)=6\alpha+\beta+5\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\alpha x^2+\beta x\right)=9\alpha+3\beta\\ \qquad\text{και}\\ f(3)=9\alpha+3\beta\end{array}\right\}$ οπότε ισχύει

$9\alpha+3\beta=6\alpha+\beta+5 \Leftrightarrow 3\alpha+2\beta=5 \Leftrightarrow 2\beta=5-3\alpha \ (1)$

Υπολογίζουμε τις πλευρικές παραγώγους στο 3 και είναι:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2\alpha x+\beta+5-(9\alpha+3\beta)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2\alpha x+\beta+5-9\alpha-3\beta}{x-3}=$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2\alpha x+5-9\alpha-2\beta}{x-3}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to 3^-}\frac{2\alpha x+5-9\alpha-5+3\alpha}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2\alpha x-6\alpha}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2\alpha(x-3)}{(x-3)}=2\alpha$$

και

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\alpha x^2+\beta x-(9\alpha+3\beta)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\alpha x^2+\beta x-9\alpha-3\beta}{x-3}=$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\alpha x^2-9\alpha+\beta x-3\beta}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\alpha(x^2-9)+\beta(x-3)}{x-3}=$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\alpha(x-3)(x+3)+\beta(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)\left[\alpha(x+3)+\beta\right]}{(x-3)}=\lim_{x\to 3^+}\left[\alpha(x+3)+\beta\right]=6\alpha+\beta$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 αν και μόνον αν : $2\alpha=6\alpha+\beta \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=0 \quad (2)$

Για να προσδιορίσουμε τα α,β λύνουμε το σύστημα των (1) και (2):

$$\left.\begin{aligned}3\alpha+2\beta&=5\\4\alpha+\beta&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \alpha=-1 \quad \text{και } \beta=4$$

Παράδειγμα 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta, & x\le 2\\ x^3+\gamma x, & x>2\end{cases}$

Να βρείτε τα α, β, γ $\in R$ **ώστε η** C_f **να έχει στο σημείο** $A(2,f(2))$ **εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία** $\varepsilon: y=-8x+10$**.**

Λύση

Για να ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=2$ πρέπει η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ οπότε πρέπει να είναι και συνεχής στη θέση αυτή.

Είναι $\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-}f(x)&=\lim_{x\to 2^-}(\alpha x^2+\beta)=4\alpha+\beta\\ \lim_{x\to 2^+}f(x)&=\lim_{x\to 2^+}(x^3+\gamma x)=8+2\gamma\\ f(2)&=4\alpha+\beta\end{aligned}\right\}$ Πρέπει $4\alpha+\beta=8+2\gamma \Leftrightarrow$

$4\alpha=8-\beta+2\gamma \quad (1)$

Επίσης: $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\alpha x^2+\beta-(4\alpha+\beta)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\alpha x^2+\beta-4\alpha-\beta}{x-2}=$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\alpha(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\alpha(x-2)(x+2)}{(x-2)}=4\alpha$$

και

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+\gamma x-(4\alpha+\beta)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+\gamma x-4\alpha-\beta}{x-2}\overset{(1)}{=}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3+\gamma x-8+\beta-2\gamma-\beta}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-8+\gamma x-2\gamma}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)+\gamma(x-2)}{x-2}=$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x^2+2x+4+\gamma)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}(x^2+2x+4+\gamma)=4+4+4+\gamma=12+\gamma$$

Είναι η f παραγωγίσιμη στο 3, αν και μόνον αν , $4\alpha=12+\gamma$.

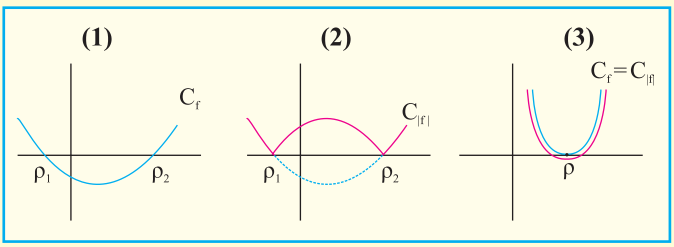
Αφού η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην $\varepsilon: y=-8x+10$ πρέπει :

$$f'(2)=-8\Leftrightarrow 4\alpha=12+\gamma=-8\Leftrightarrow \left.\begin{cases}4\alpha=-8\\ 12+\gamma=-8\end{cases}\right\}\Leftrightarrow \alpha=-2 \text{ και } \gamma=-20$$

Τότε απο την (1) παίρνουμε :

$$4(-2)=8-\beta+2\cdot(-20)\Leftrightarrow -8=8-\beta-40\Leftrightarrow \beta=8-40+8\Leftrightarrow \beta=-24.$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3



Παράγωγος και απόλυτη τιμή

Από τις γραφικές παραστάσεις των f και $|f|$ διαπιστώνουμε ότι στα σημεία στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη και δεν είναι ρίζες της και η απόλυτη τιμή της f είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα αν $f(\alpha)>0$ τότε $f'(\alpha)=|f|'(\alpha)$ ενώ αν $f(\alpha)<0$ τότε $f'(\alpha)=-|f|'(\alpha)$.

Στο σχήμα (2) φαίνεται ότι στις ρίζες ρ_1, ρ_2 της $f(x)=0$ η $|f|$ δεν είναι παραγωγίσιμη ενώ στο σχήμα (3) που η ρίζα ρ είναι διπλή η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη.

Χρήσιμη είναι η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση

Αν η συνάρτηση f με τύπο $y=f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο α και $f(\alpha)\neq 0$, να δείξετε ότι η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο α.

Λύση

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{|f(x)|-|f(\alpha)|}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{(|f(x)|-|f(\alpha)|)(|f(x)|+|f(\alpha)|)}{(x-\alpha)(|f(x)|+|f(\alpha)|)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{|f(x)|^2-|f(\alpha)|^2}{(x-\alpha)(|f(x)|+|f(\alpha)|)}=$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f^2(x)-f^2(\alpha)}{(x-\alpha)(|f(x)|+|f(\alpha)|)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{(f(x)-f(\alpha))}{x-\alpha}\frac{(f(x)+f(\alpha))}{|f(x)|+|f(\alpha)|}=$$

$$f'(\alpha)\frac{2f(\alpha)}{2|f(\alpha)|}=\begin{cases} f'(\alpha) & \text{αν } f(\alpha)>0\\ -f'(\alpha) & \text{αν } f(\alpha)<0\end{cases}$$. Άρα η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο α.

Παράδειγμα 7

Έστω $f(x)=|x-3|g(x)$ όπου g συνεχής συνάρτηση στο R με $g(3)\neq 0$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=3$.

Λύση

Είναι $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)g(x)}{x-3}=g(3)$

$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)g(x)}{x-3}=-g(3)$.

Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $x_0=3$ τότε $g(3)=-g(3)\Leftrightarrow g(3)=0$ (άτοπο). Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Από γνωστό όριο βρίσκουμε την παράγωγο σ' αριθμό.

Στο όριο του πηλίκου των διαφορών $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ επιδιώκουμε την εμφάνιση των συναρτήσεων που το όριό τους είναι γνωστό από την υπόθεση.

Παράδειγμα 8

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και ισχύει: $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+3}-2}=2$.

Αν η f είναι συνεχής στο “σημείο” $x_0=1$, να δείξετε ότι στο “σημείο” αυτό είναι και παραγωγίσιμη.

Λύση

Για $x\neq 1$ θεωρούμε $g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+3}-2}$, $\left(\lim_{x\to 1}g(x)=2\right)$ οπότε

$g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)=f(x)$ (1) κοντά στο $x=1$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\right]=2\cdot 0=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ έχουμε $f(1)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x-1}=$

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1} g(x)\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=2\cdot\frac{2}{4}=1$$

Άρα $f'(1)=1$.

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Ασκήσεις στις οποίες μας ζητείται να δείξουμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και για την f γνωρίζουμε ότι:

i. ικανοποιεί μια συναρτησιακή σχέση και
ii. είναι παραγωγίσιμη στο α.

Σκοπεύουμε να δείξουμε ότι το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ για κάθε $x_0\in\Delta$ είναι πραγματικός αριθμός.

Επειδή γνωρίζουμε:

1. το $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha)$, αφού η f ως παραγωγίσιμη στο α είναι και συνεχής στο $x=\alpha$

2. το $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$.

θα αλλάξουμε μεταβλητή και στη θέση του x θα θέσουμε μια συνάρτηση $g(h)$ μη σταθερή που θα έχει τα εξής δύο χαρακτηριστικά:

1° $\lim\limits_{h\to\alpha} g(h)=x_0$.

2° Ο τύπος της θα επαληθεύει την συναρτησιακή σχέση.

Υπόδειξη: Είναι χρήσιμη μια επανάληψη της μεθόδου 4 στο μάθημα 7.

Σχόλιο: Στην ειδική περίπτωση που γνωρίζουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο 0 μπορούμε άμεσα να βρούμε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Παράδειγμα 9

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x,y\in R$ ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+15xy$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\in R$, όπου x_0 τυχαίος πραγματικός αριθμός.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 ισχύει :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\quad (1)$$

Για να προσδιορίσουμε το f(0) θέτουμε στη δοσμένη σχέση $x=y=0$ οπότε παίρνουμε :

$f(0+0)=f(0)+f(0)+15\cdot 0\Leftrightarrow f(0)=f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$

και η σχέση (1) γίνεται: $\quad f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\quad (2)$

Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)+f(h)+15x_0h-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+15x_0h}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}+15x_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+15x_0\overset{(2)}{=}f'(0)+15x_0$$

Δείξαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in R$ αφού $f'(x_0)=f'(0)+15x_0$ είναι πραγματικός αριθμός οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=f'(0)+15x$, $x\in R$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Εύρεση ορίου με δεδομένο την παραγωγισιμότητα της f σε κάποιο θέση $x=\alpha$.
Για την άρση της απροσδιοριστίας που προκύπτει προσπαθούμε να εμφανίσουμε τα όρια $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$ (αφού η f ως παραγωγίσιμη στο $x=\alpha$ είναι και συνεχής στο α) και $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$ κάνοντας, όπου χρειάζεται, αλλαγή μεταβλητής.

Παράδειγμα 10

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο α να δείξετε ότι το $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha}=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)$**.**

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(\alpha)-\alpha f(x)}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(\alpha)-xf(x)+xf(x)-\alpha f(x)}{x-\alpha}=$

$$\lim_{x\to\alpha}\left[x\frac{f(\alpha)-f(x)}{x-\alpha}+f(x)\frac{x-\alpha}{x-\alpha}\right]=\lim_{x\to\alpha}\left[-x\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}+f(x)\right]=-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha).$$

Παράδειγμα 11

Έστω f παραγωγίσιμη στο $x \in R$. Να δείξετε ότι

i. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+\alpha h)-f(x)}{h} = \alpha f'(x)$, με $\alpha \in R^*$ **ii.** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f^2(x+4h)-f^2(x-h)}{h} = 10f(x)f'(x)$

Λύση

i. Είναι $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+\alpha h)-f(x)}{h} \underset{\lim\limits_{h\to 0}(\alpha h)=0}{\overset{\alpha h = t}{=}} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}\alpha = \alpha f'(x)$

ii. Είναι $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+4h)-f(x-h)}{h}[f(x+4h)+f(x-h)] =$

$$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(f(x+4h)-f(x))-(f(x-h)-f(x))}{h}[f(x+4h)+f(x-h)] =$$

$$\lim\limits_{h \to 0}\left[\frac{f(x+4h)-f(x)}{h} - \frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right][f(x+4h)+f(x-h)] \overset{(i)}{=}$$

$$[4f'(x)-(-1)f'(x)](f(x)+f(x)) = 10f'(x)f(x)$$

Κατηγορία – Μέθοδος 7

Για την εύρεση Παραγώγου με δεδομένη ανισοτική σχέση με κατάλληλους μετασχηματισμούς στην ανισοτική σχέση "παγιδεύουμε" το πηλίκο των διαφορών $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ή $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ μεταξύ δύο συναρτήσεων που έχουν το ίδιο όριο και αξιοποιούμε το **Κριτήριο της Παρεμβολής**.

Παράδειγμα 12

Έστω f συνάρτηση για την οποία ισχύει: $f(x)-2y^3 \le f(x+y) \le f(x)+2y^3$**, για κάθε** $x, y \in R$**.**
Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

Λύση

$$\left.\begin{array}{r} \text{Είναι } f(x)-2y^3 \le f(x+y) \le f(x)+2y^3 \\ \text{θετουμε } x = x_0 \\ y = h \end{array}\right\} \text{ οπότε η δοσμένη σχέση γίνεται:}$$

$f(x_0)-2h^3 \le f(x_0+h) \le f(x_0)+2h^3$

$\Leftrightarrow -2h^3 \le f(x_0+h)-f(x_0) \le 2h^3$ (1)

Αν $h>0$ τότε η (1) γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l} -2h^2 \le \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 2h^2 \\ \text{με } \lim\limits_{h\to 0^+}\left(-2h^2\right)=0 \\ \text{και } \lim\limits_{h\to 0^+}\left(2h^2\right)=0 \end{array}\right\} \text{οπότε } \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0 \quad (2)$$

σύμφωνα με το κριτήριο της Παρεμβολής.

Αν $h<0$ τότε η (1) γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l} -2h^2 \ge \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge 2h^2 \\ \text{με } \lim\limits_{h\to 0^-}\left(2h^2\right)=0 \\ \text{και } \lim\limits_{h\to 0^-}\left(-2h^2\right)=0 \end{array}\right\} \text{οπότε } \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0 \quad (3)$$

Από (2), (3) προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in R$ με $f'(x_0)=0$.

Άρα $f'(x)=0$ για κάθε $x\in R$.

Παράδειγμα 13

Αν η f πληρεί την συνθήκη $|f(x)-f(y)| \le \theta |x-y|^{\kappa}$, $\theta>0$, $\kappa>1$ για κάθε $x, y\in R$ τότε είναι παραγωγίσιμη στο R.

Λύση

Για $y=x_0$, $x_0\in R$ η σχέση γίνεται: $|f(x)-f(x_0)| \le \theta|x-x_0|^{\kappa}$

και για $x\ne x_0$ είναι:

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \le \theta|x-x_0|^{\kappa-1} \Leftrightarrow -\theta|x-x_0|^{\kappa-1} \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \theta|x-x_0|^{\kappa-1}$$

Αφού $\lim\limits_{x\to x_0}\theta|x-x_0|^{\kappa-1}=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\theta|x-x_0|^{\kappa-1}\right)=0$ από το κριτήριο της παρεμβολής είναι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0.$$

Άρα $f'(x_0)=0$ για κάθε $x_0\in R$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

(Θα δούμε αργότερα ότι $f'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=c$, για $x\in R$)

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-3x+2$ στο σημείο με τετμημένη $x=3$.

Σημείωση: Ως "κάθετη" στην C_f ορίζουμε την κάθετη στην εφαπτομένη στο αντίστοιχο σημείο

$\left(\textbf{Απ.: } y-2=-\frac{1}{3}(x-3)\right)$

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}\kappa x^2-\lambda, & \text{αν } x<1\\ -\frac{\mu}{x}, & \text{αν } x\geq 1\end{cases}$

Να βρείτε τα κ, λ, $\mu\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f στο σημείο $P(1,f(1))$ να έχει εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 3x+y-4=0$.

$\left(\textbf{Απ.: } \kappa=\frac{1}{6},\ \lambda=\frac{1}{2},\ \mu=\frac{1}{3}\right)$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g,h:R\to R$ τέτοιες ώστε:

$f(x)\leq g(x)\leq h(x)$, για κάθε $x\in R$, $f(2)=g(2)=h(2)$ και $f'(2)=h'(2)=2002$

Να δειχθεί ότι $g'(2)=2002$.

4. Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x_0=2$ για τις οποίες ισχύουν:

$f(x)-g(x)\leq x^2$, για κάθε $x\in R$ και $f(2)-g(2)=4$

Να δείξετε ότι $f'(2)-g'(2)=4$.

5. Να βρείτε τα α, $\beta\in R$, ώστε η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\begin{cases}x^2-\alpha x+2\beta, & x<0\\ -\sqrt{x^2+1}, & x\geq 0\end{cases}$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

$(\textbf{Απ.: } \alpha=0,\ \beta=-1\ )$

6. Να βρείτε τα α, $\beta\in R$, ώστε η συνάρτηση f με τύπο : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4\alpha x+\beta-3}{x-1}, & x<1\\ -\sqrt{x}, & x\geq 1\end{cases}$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$.

$\left(\textbf{Απ.: } \alpha=\frac{1}{2},\ \beta=4\right)$

7. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και παραγωγίσιμη στο R και η κλίση της στο σημείο με τετμημένη 4 είναι $\frac{1}{7}$, να βρείτε την κλίση της στο σημείο με τετμημένη - 4.

$\left(\textbf{Απ.: } f'(-4)=\frac{1}{7}\right)$

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=-\alpha x^2+3\beta x$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f στο σημείο Α (1, -3) έχει εφαπτομένη με κλίση -3.

(**Απ.:** $\alpha=0, \beta=-1$)

9. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

i. Η f είναι συνεχής στο $x=0$.

ii. $2x^3-4x^4 \le xf(x) \le 2x^3-4x^4$ για κάθε $x \in R$.

Να βρείτε:

α. την τιμή της f, στο $x=0$ **β.** την τιμή της f' στο $x=0$.

(**Απ.:** $f(0)=0, f'(0)=0$)

10. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+2|x-2|$ δεν δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $A(2, f(2))$.

11. Έστω $f: R \to R$ παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=5$. Αν $g(x)=2f(x)-x$ να βρεθεί η $g'(0)$.

(**Απ.:** $g'(0)=9$)

12. Να βρεθούν α, β, γ ώστε η f(x) να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+\beta x+3 & x<1 \\ 2 & x=1 \\ x^3+\gamma x+2 & x>1 \end{cases}$

(**Απ.:** $\alpha=3, \beta=-4, \gamma=-1$)

13. Αν η f είναι ορισμένη στο R και ισχύει $\eta\mu x \le f(x) \le x^2+\eta\mu x$ να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

(**Απ.:** Δικαιολογήστε ότι $f(0)=0$ και βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$)

14. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\alpha$ $(\alpha>0)$ να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{(f(x))^2-(f(\alpha))^2}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$

(**Απ.: i.** $2\sqrt{\alpha}\cdot f'(\alpha)$ **ii.** $4f(\alpha)\cdot\sqrt{\alpha}f'(\alpha)$)

15. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και για κάθε $x, y \in R(x, y \neq 0)$ ισχύει $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in R^*$

(**Υπ.:** Δείξτε ότι $f(1)=0$. Ισχύει $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

και προσπαθήστε να δείξετε ότι υπάρχει $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f:R \to R$ με $2(x-1) \le f(x) \le x^2-1$ (1)

i. Να δειχτεί ότι: $f(1)=0$

ii. Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και να βρεθεί η $f'(1)$.

(**Υπ.:** Για x = 1 η (1) δίνει f(1) = 0. Για x > 1 και μετά για x < 1 δημιουργείστε από την (1) την παράσταση $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και υπολογίστε το όριο της)

17. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: A \to R$ και $\alpha \in A$. Αν $f(\alpha)=g(\alpha)$ και $f(x)+x \le g(x)+\alpha$ για κάθε $x \in A$ να δείξετε ότι $f'(\alpha)+1=g'(\alpha)$.

(**Υπ.:** Δείξτε για x < α ότι $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)f(\alpha)}{x-\alpha}+1 \le \lim\limits_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$ και για x > α $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)f(\alpha)}{x-\alpha}+1 \le \lim\limits_{x\to\alpha}\frac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$ και λάβετε υπόψην σας ότι $f'(\alpha)=g'(\alpha)$)

18. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=2$. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)\cdot\sqrt{x^2+1}}{x}$$

(**Υπ.:** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)\cdot\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)+f(0)-f(0)\cdot\sqrt{x^2+1}}{x}=\ldots=2$

19. Αν για συνάρτηση f ισχύει: $f(0)=1$ και $f'(0)=2, f(x)\neq 0$ για κάθε $x \in R$ και $g(x)=2f(x)+\frac{x^2}{f(x)}$ να βρεθεί $g'(0)$.

(**Υπ.:** Ζητάμε $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$. Αξιοποιήστε τα δεδομένα)

20. Δίνεται η συνάρτηση $f:R \to R$ παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $x^2-5x+6=f^3(x)+f(x)$ (1). Να βρεθεί η $f'(2)$.

(**Υπ.:** Ζητάμε $f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$. Βρείτε f(2) από την (1) για $x=2$ και μετασχηματίστε την (1) σε $(x-3)(x-2)=f(x)\left(f^2(x)+2\right) \Rightarrow x-3=\frac{f(x)}{x-2}\left(f^2(x)+1\right)$ από όπου $f'(2)=-1$

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. Αν η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο της γραφικής της παράστασης με τετμημένη $x=3$ είναι $2y=2\sqrt{3}x+1-6\sqrt{3}$ να υπολογίσεται το $\ell im_{x\to 3}\frac{[f(x)]^2-\frac{1}{4}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

Β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(\alpha, 0)$ και είναι κάθετη στην εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=\sigma\upsilon\nu x$ στο σημείο της $\left(\frac{\pi}{2}, h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.