Μάθημα 10

Παράγωγος συνάρτησης
Κανόνες παραγώγισης
Εξίσωση εφαπτομένης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ι. Παράγωγος συνάρτησης - κανόνες παραγώγισης

Ορισμός

Η f λέγεται παραγωγίσιμη στο διάστημα Α όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του Α.

Η συνάρτηση που απεικονίζει κάθε x του Α στον παράγωγο αριθμό του $f'(x)$, ονομάζεται παράγωγος της f και συμβολίζεται με $f'(x)$ ή $\frac{df}{dx}$ ή $\frac{dy}{dx}$ (αν $y=f(x)$).

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

α. Αν $f(x)=c,\ c\in R$ τότε $f'(x)=0$ $\qquad (c)'=0$

β. Αν $f(x)=x$ τότε $f'(x)=1$ $\qquad (x)'=1$

γ. Αν $f(x)=x^{\nu}$ $\nu\in N\text{-}\{0,1\}$ τότε $f'(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}$ $\qquad (x^{\nu})'=\nu\cdot x^{\nu-1}$

δ. Αν $f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$ (στο $x=0$ δεν είναι παραγωγίσιμη)

Για $x\in(0,+\infty)$ είναι: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

ε. Αν $f(x)=\eta\mu x$ τότε $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ $\qquad (\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$

στ. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ τότε $f'(x)=-\eta\mu x$ $\qquad (\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$

ζ. Αν $f(x)=e^x$ τότε $f'(x)=e^x$ $\qquad (e^x)'=e^x$

η. Αν $f(x)=\ln x,\ x>0$ τότε $f'(x)=\frac{1}{x}$ $\qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$

Κανόνες παραγώγισης

α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $(f+g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $(f\cdot g)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

Αν $c\in R$ και f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $(cf)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$ τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Προσοχή:

Αν $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in N^*$ τότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίστιμη στο R^* με $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$

Άρα γενικά ισχύει: $(x^\kappa)'=\kappa\cdot x^{\kappa-1}$ για κάθε $\kappa\in Z-\{0,1\}$.

Επίσης με τον κανόνα του πηλίκου εύκολα προκύπτουν :

$$(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x},\sigma\upsilon\nu x\neq 0 \qquad (\sigma\varphi x)'=-\frac{1}{\eta\mu^2 x},\eta\mu x\neq 0$$

Σχόλια

1. Αν η $(f+g)$ είναι παραγωγίσιμη στο A, αυτό δεν σημαίνει ότι υποχρεωτικά οι f, g είναι συγχρόνως και οι δύο παραγωγίσιμες στο A.

2. Επίσης , μπορεί η $|f|$ να είναι παραγωγίσιμη στο A, χωρίς κατ' ανάγκη η f να είναι παραγωγίσιμη.

3. Αν μία μόνο από τις f, g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η $(f+g)$ και η $(f-g)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

4. Δεν ισχύει το ίδιο όμως για την $(f\cdot g)$. Αν κάποια από τις δύο δεν είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο δεν βγάζουμε άμεσα συμπέρασμα για την παράγωγο του γινομένου.

Παράδειγμα

Έστω $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\eta\mu x$. Η $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}\eta\mu x}{x}=0\cdot 1=0$

Άρα η $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Ενώ η $f(x)=\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

5. Αν γνωρίζουμε τον $f'(\alpha)$ τότε το $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ είναι ίσο με την τιμή της f' στο α.

Γράφουμε $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)_{x=\alpha}$.

Για παράδειγμα είναι : $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}=\left(\dfrac{d(e^x)}{dx}\right)_{x=\alpha}=(e^x)_{x=\alpha}=e^\alpha$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ell nx}{x-1}=\left(\frac{d(\ell nx)}{dx}\right)_{x=1}=\left(\frac{1}{x}\right)_{x=1}=\frac{1}{1}=1$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων :

i. $f(x)=3x^4+x^2-4$ **ii.** $f(x)=-x^3+\eta\mu x+\sqrt{x}$

iii. $f(x)=\sqrt{x}+\ln x$ **iv.** $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\ln 5$

v. $f(x)=2\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x-1$ **vi.** $f(x)=x^4+x+\sqrt{5}$

Λύση

i. $f'(x)=\left(3x^4+x^2-4\right)'=12x^3+2x$

ii. $f'(x)=\left(-x^3+\eta\mu x+\sqrt{x}\right)'=-3x^2+\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

iii. $f'(x)=\left(\sqrt{x}+\ln x\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}$

iv. $f'(x)=(2\sigma\upsilon\nu x+\ln 5)'=-2\eta\mu x$

v. $f'(x)=(2\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x-1)'=\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$

vi. $f'(x)=\left(x^4+x+\sqrt{5}\right)'=4x^3+1$

Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

i. $f(x)=\ln x\cdot ημx$ **ii.** $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-x^2\ln x$

iii. $f(x)=\sqrt{x}\cdot ημx$ **iv.** $f(x)=(x^3-2)\ln x$

v. $f(x)=ημx\cdot συνx$ **vi.** $f(x)=-3x\cdot ημx$

Λύση

i. $f'(x)=(\ln x\cdot ημx)'=(\ln x)'\cdot ημx+\ln x\cdot(ημx)'=\dfrac{1}{x}ημx+\ln x\cdot συνx$

ii. $f'(x)=\left(\dfrac{x^4}{4}-x^2\ln x\right)'=\dfrac{4x^3}{4}-\left(2x\ln x+x^2\dfrac{1}{x}\right)=x^3-2x\ln x-x$

iii. $f'(x)=\left(\sqrt{x}\cdot ημx\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}ημx+\sqrt{x}\cdot συνx$

iv. $f'(x)=\left((x^3-2)\ln x\right)'=3x^2\ln x+(x^3-2)\cdot\dfrac{1}{x}$

v. $f'(x)=(ημx\cdot συνx)'=(ημx)'\cdot συνx+ημx\cdot(συνx)'=συν^2x-ημ^2x=συν2x$

vi. $f'(x)=(-3x\cdot ημx)'=-3ημx-3x\cdot συνx$

Παράδειγμα 3

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

i. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x}$ **ii.** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **iii.** $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$

iv. $f(x)=\dfrac{x^3}{\ln x}$ **v.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **vi.** $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

Λύση

i. $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x^2+4x}\right)'=\dfrac{1'\cdot(x^2+4x)-1\cdot(x^2+4x)'}{(x^2+4x)^2}=\dfrac{-(2x+4)}{(x^2+4x)^2}=-\dfrac{2(x+2)}{(x^2+4x)^2}$

ii. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)'=\dfrac{(x^2+1)'(x^2-1)-(x^2+1)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=$

$$\frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

iii. $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{e^x}\right)'=\dfrac{(\ln x)'\cdot e^x-\ln x\,(e^x)'}{(e^x)^2}=\dfrac{\frac{1}{x}e^x-\ln x\cdot e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{e^x\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)}{(e^x)^2}=$

$\dfrac{\frac{1-x\ln x}{x}}{e^x}=\dfrac{1-x\ln x}{x\cdot e^x}$

iv. $f'(x)=\left(\dfrac{x^3}{\ln x}\right)'=\dfrac{(x^3)'\cdot\ln x-x^3(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\dfrac{3x^2\cdot\ln x-x^3\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{3x^2\cdot\ln x-x^2}{(\ln x)^2}=\dfrac{x^2\cdot(3\ell nx-1)}{\ell n^2x}$

v. $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\dfrac{1'\cdot\sqrt{x}-1\cdot(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=-\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

vi. $f'(x)=\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)'=\dfrac{(e^x+1)'(e^x-1)-(e^x+1)(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\dfrac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2}=$

$\dfrac{e^x(e^x-1-e^x-1)}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

- Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η σύνθεση της g με την f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

- Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(g(x))$ με την $g(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στο Α και την $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $g(A)$. Η $h=fog$ είναι παραγωγίσιμη στο Α με $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ ή $\dfrac{dh}{dx}=\dfrac{dh}{du}\dfrac{du}{dx}$ όπου $u=g(x)$. (Κανόνας αλυσίδας).

Προσοχή:

Αν $\alpha\in R-Z$ τότε $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $x>0$.

Αν $\alpha>0$ τότε $(\alpha^x)'=\alpha^x\cdot\ln\alpha$, $x\in R$ και $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$, $x\in R^*$.

Αν $0<\alpha\neq 1$ τότε $(\ell og_\alpha|x|)'=\dfrac{1}{\ell n\alpha}\cdot\dfrac{1}{x}$, $x\in R^*$

Αν $f(x)>0$ τότε $\left(f(x)^{g(x)}\right)'=\left(e^{g(x)\ell nf(x)}\right)'=f(x)^{g(x)}\left[g(x)\ell nf(x)\right]'$

Αναφέρουμε τις παραγώγους βασικών σύνθετων συναρτήσεων μόνο τυπικά
(χωρίς το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων)

Συνάρτηση	Παράγωγος	Συνάρτηση	Παράγωγος
f^{ν}	$\nu \cdot f^{\nu-1} \cdot f'$	$\sqrt{f}$	$\frac{1}{2\sqrt{f}}f'$
$\eta\mu f$	$\sigma\upsilon\nu f \cdot f'$	$\sigma\upsilon\nu f$	$-\eta\mu f \cdot f'$
$\varepsilon\varphi f$	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f} \cdot f'$	$\sigma\varphi f$	$-\frac{1}{\eta\mu^2 f} \cdot f'$
e^f	$e^f \cdot f'$	$\ln f$	$\frac{1}{f}f'$
$\alpha^f, \alpha > 0$	$\alpha^f \ln\alpha \cdot f'$	$\log_\alpha f,\ 0<\alpha\neq 1$	$\frac{1}{\ell n\alpha} \cdot \frac{1}{f} \cdot f'$

Παράδειγμα 4

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

i. $f(x) = (4x^3 + x - 1)^4$ **ii.** $f(x) = \ln(\sqrt{x} + 1)$ **iii.** $f(x) = \sqrt{\ln x}$

iv. $f(x) = 5\eta\mu^3 x + 1$ **v.** $f(x) = \eta\mu(3x - 1)$ **vi.** $f(x) = e^{x^2+1}$

Λύση

i. Είναι $f'(x) = \left((4x^3+x-1)^4\right)' = 4(4x^3+x-1)^3(4x^3+x-1)' = 4(4x^3+x-1)^3(12x^2+1)$

ii. Επίσης $f'(x) = \left(\ln(\sqrt{x}+1)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}+1}(\sqrt{x}+1)' = \frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

iii. Ισχύει $f'(x) = (\sqrt{\ln x})' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

iv. Έχουμε $f'(x) = (5\eta\mu^3 x + 1)' = 15\eta\mu^2 x \cdot (\eta\mu x)' = 15\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

v. $f'(x) = (\eta\mu(3x-1))' = \sigma\upsilon\nu(3x-1)(3x-1)' = 3\sigma\upsilon\nu(3x-1)$

vi. $f'(x) = \left(e^{x^2+1}\right)' = e^{x^2+1}\cdot(x^2+1)' = 2x\cdot e^{x^2+1}$

Παράδειγμα 5

Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}$ **ii.** $f(x) = \sqrt[5]{x^2+1}$ **iii.** $f(x) = \sqrt[6]{3x-2}$

Λύση

i. Έχουμε $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}$ με $x\geq 0$.

Είναι $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}+\sqrt{x}\right)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

για $x>0$.

ii. Είναι $f(x)=\sqrt[5]{x^2+1}$, με $x\in R$.

Είναι $f(x)=\left(\sqrt[5]{x^2+1}\right)'=\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{5}}\right)'=\frac{1}{5}\left(x^2+1\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\left(x^2+1\right)'=\frac{1}{5}\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{5}}}\cdot 2x=\frac{2x}{5\cdot\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^4}}$

iii. Είναι $f(x)=\sqrt[6]{3x-2}$, με $3x\text{-}2\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{2}{3}$.

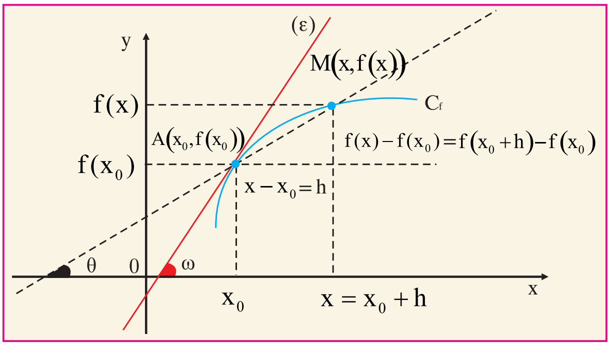
Είναι $f'(x)=\left(\sqrt[6]{3x-2}\right)'=\left((3x-2)^{\frac{1}{6}}\right)'=\frac{1}{6}(3x-2)^{-\frac{5}{6}}(3x-2)'=$

$\frac{1}{6}\frac{1}{(3x-2)^{\frac{5}{6}}}\cdot 3=\frac{3}{6\cdot\sqrt[6]{(3x-2)^5}}=\frac{1}{2\sqrt[6]{(3x-2)^5}}$, για $x>\frac{2}{3}$.

Παρατήρηση: Οι συναρτήσεις **i.** $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}$ και **ii.** $f(x)=\sqrt[6]{3x-2}$ με χρήση του ορισμού αποδεικνύεται ότι δεν είναι παραγωγίσιμες στις θέσεις $x=0$ και $x=\frac{2}{3}$ αντίστοιχα.

ΙΙ. Εξίσωση εφαπτομένης

Έχουμε ήδη αναφερθεί στο μάθημα 9 χωρίς να γνωρίζουμε τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων και τους κανόνες παραγώγισης. Υπενθυμίζουμε ότι:



αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ορίζουμε την ευθεία που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Ο αριθμός $f'(x_o) = \lambda_\varepsilon = εφω$ ονομάζεται και κλίση της C_f στο σημείο Α.

Σχόλια

1. Προφανώς αν η f δεν είναι συνεχής στο x_o δεν έχει νόημα η αναζήτηση εφαπτομένης.

2. Μπορεί η εφαπτομένη (ε) να έχει και άλλα σημεία επαφής με την C_f.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Ζητείται η εξίσωση της εφαπτομένης σε καθορισμένο σημείο x_0. Βρίσκουμε την τιμή $f(x_0)$, την $f'(x)$ και στη συνέχεια την $f'(x_0)$.

Αν στο x_0 αλλάζει ο τύπος της f ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα με πλευρικά όρια.

Τέλος γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης.

Παράδειγμα 1

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη x_0 όταν:

i. $f(x) = x^3 + x - 3, \quad x_0 = 1$ **ii.** $f(x) = 2ημx - 2συνx, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

Λύση

i. Είναι: $f'(x) = 3x^2 + 1,\ x \in R$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{για } x_0=1 \text{ είναι:} \\ f'(x_0)=3\cdot 1^2+1=4 \\ f(x_0)=1^3+1-3=-1 \end{array}\right\}$$

Και επειδή η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ παίρνουμε

$y\text{-}(-1)=4\cdot(x-1)\Leftrightarrow y+1=4x-4\Leftrightarrow \boxed{\varepsilon: y=4x-5}$

ii. Είναι $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x$, $x\in R$

$$\left.\begin{array}{l} x_0=\dfrac{\pi}{4} \\ f'(x_0)=2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}+2\eta\mu\dfrac{\pi}{4}= \\ =2\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2} \\ f(x_0)=2\eta\mu\dfrac{\pi}{4}-2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}= \\ =2\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0 \end{array}\right\}$$

Είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

οπότε

$y\text{-}\ 0=2\sqrt{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\boxed{\varepsilon: y=2\sqrt{2}x-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}}$

Παράδειγμα 2

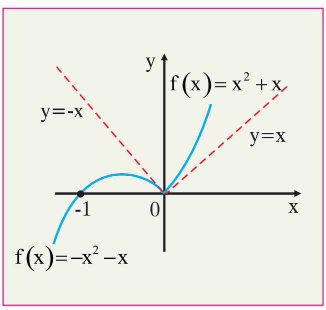
Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|(x+1)$ ορισμένη στο R. Να ελέγξετε αν η C_f δέχεται εφαπτομένη στη θέση $x=0$.

Λύση

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$

και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x-1)=-1$

Και επομένως δεν ορίζεται εφαπτομένη στη θέση x = 0. (Υπάρχουν δύο ημιεφαπτόμενες με εξισώσεις $y=x$ και $y=$-x)



Παράδειγμα 3

Αν $f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{9}{4}, & x\le \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-3\sqrt{3}}{4x}, & x>\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ **να δείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\dfrac{\pi}{3}$.**

Λύση

Πρέπει η f να είναι συνεχής στο $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ δηλαδή πρέπει $\lim\limits_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}^+} f(x)=f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, το οποίο ισχύει.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}^-}\frac{x^2-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}^-}\frac{x^2-\frac{3}{4}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}^-}\frac{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=$$

$$\lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}^-}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3} \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}^+}\frac{f(x)-f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}^+}\frac{\frac{-3\sqrt{3}}{4x}+\frac{3}{2}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}^+}\frac{\frac{-3\sqrt{3}+6x}{4x}}{\frac{2x-\sqrt{3}}{2}}=\lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}^+}\frac{2\left(6x-3\sqrt{3}\right)}{4x\cdot\left(2x-\sqrt{3}\right)}=$$

$$\lim_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}^+}\frac{3\left(2x-\sqrt{3}\right)}{2x\cdot\left(2x-\sqrt{3}\right)}=\frac{3}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

Παρατηρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ με $f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$.

Ορίζεται επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και έστω ω η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.

Τότε $f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\text{εφ}\omega \Leftrightarrow \sqrt{3}=\text{εφ}\omega$, οπότε $\omega=\dfrac{\pi}{3}$ διότι $0\le\omega<\pi$.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Για την εύρεση εφαπτομένων της C_f που πληρούν μια ιδιότητα I, θεωρούμε $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής και βρίσκουμε για ποιες τιμές του x_0 η εφαπτομένη (ε) έχει την ιδιότητα I. Η εύρεση του σημείου επαφής μας δίνει την εξίσωση που ζητάμε.

Όταν ζητείται η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο Κ (α, β) το οποίο δεν ανήκει στη γραφική παράσταση C_f της f γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f, που είναι : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ και απαιτούμε να διέρχεται απο το σημείο Κ (α , β), δηλαδή να ισχύει : $\beta-f(x_0)=f'(x_0)(\alpha-x_0)$. Η λύση της τελευταίας εξίσωσης μας δίνει το πλήθος των σημείων επαφής και τις τετμημένες τους.

Παράδειγμα 4

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^2-x$ η οποία “άγεται” από το σημείο Κ (3, 5).

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=2x-1$. Το σημείο Κ προφανώς δεν ανήκει στην γραφική παράσταση της f γιατί $f(3)=6\neq 5$. Αν $A(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο Α είναι η :

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \text{ ή } y-(x_0^2-x_0)=(2x_0-1)(x-x_0) \qquad (1)$$

Η (1) πρέπει να επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου Κ. Δηλ.

$$5-x_0^2+x_0=(2x_0-1)(3-x_0) \Leftrightarrow 5-x_0^2+x_0=6x_0-2x_0^2-3+x_0 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2-6x_0+8=0 \text{ με ρίζες } x_0=4 \text{ και } x_0=2$$

Άρα προκύπτουν δύο εφαπτόμενες με εξισώσεις :

$$y-f(4)=f'(4)(x-4) \Leftrightarrow y-12=7(x-4) \Leftrightarrow y=7x-16 \text{ και}$$

$$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-2=3(x-2) \Leftrightarrow y=3x-4.$$

Παράδειγμα 5

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2-x+1$ που διέρχεται από το Μ (1,1).

Λύση

Έστω $A(x_0, y_0)$ το σημείο επαφής. Είναι $f'(x)=2x-1$, οπότε

$f'(x_0)=2x_0-1$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-(x_0^2-x_0+1)=(2x_0-1)(x-x_0).$$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$, οπότε :

$$1-\left(x_0^{\,2}-x_0+1\right)=\left(2x_0-1\right)\left(1-x_0\right)\Leftrightarrow 1-x_0^{\,2}+x_0-1=2x_0-2x_0^{\,2}-1+x_0\Leftrightarrow$$

$$x_0^{\,2}-2x_0+1=0\Leftrightarrow\left(x_0-1\right)^2=0\quad\Leftrightarrow\quad x_0=1$$

Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$\varepsilon: y-\left(1^2-1+1\right)=\left(2\cdot 1-1\right)\cdot\left(x-1\right)\Leftrightarrow y-1=x-1\Leftrightarrow y=x\ .$$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη C_f που είναι :

i. κάθετη προς γνωστή ευθεία (ε_1) με $\lambda_{\varepsilon_1}\neq 0$.

ii. παράλληλη προς γνωστή ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης πραγματικό αριθμό.

Τότε:

i. Αυτό σημαίνει ότι: $\lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot\lambda_{\varepsilon_1}=-1$ δηλαδή $f'\left(x_0\right)\cdot\lambda_{\varepsilon_1}=-1$ (1).

Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε το x_0 και αντικαθιστούμε την τιμή του στην εξίσωση της εφαπτομένης.

ii. Πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της δοσμένης ευθείας να ισούται με τον παράγωγο αριθμό της f στο σημείο επαφής.

Παράδειγμα 6

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στη γραφική παράσταση της $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$, οι οποίες είναι κάθετες προς την ευθεία $2y-x+1=0$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $R-\{-2\}$ με

$$f'\left(x\right)=\frac{\left(x^2-1\right)'\left(x+2\right)-\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)'}{\left(x+2\right)^2}\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\frac{2x\left(x+2\right)-\left(x^2-1\right)}{\left(x+2\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$f'\left(x\right)=\frac{2x^2+4x-x^2+1}{\left(x+2\right)^2}=\frac{x^2+4x+1}{\left(x+2\right)^2}$$

Πρέπει :

$$f'\left(x_0\right)\cdot\frac{1}{2}=-1\Leftrightarrow\frac{x_0^{\,2}+4x_0+1}{\left(x_0+2\right)^2}\cdot\frac{1}{2}=-1\Leftrightarrow x_0^{\,2}+4x_0+1=-2\left(x_0^{\,2}+4x_0+4\right)\Leftrightarrow$$

$$x_0^{\,2}+4x_0+1+2x_0^{\,2}+8x_0+8=0\Leftrightarrow 3x_0^{\,2}+12x_0+9=0\Leftrightarrow 3\left(x_0^{\,2}+4x_0+3\right)=0\Leftrightarrow$$

$$x_0=-1 \text{ ή } x_0=-3$$

i. Για $x_0=-1$ η εφαπτομένη είναι :

$$y-f\left(-1\right)=f'\left(-1\right)\left(x+1\right)\Leftrightarrow y-0=-2\left(x+1\right)\Leftrightarrow y=-2x-2$$

ii. Για $x_0 = -3$ η εφαπτομένη είναι :

$$y - f(-3) = f'(-3)(x+3) \Leftrightarrow y + 8 = -2(x+3) \Leftrightarrow y = -2x - 14$$

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι μια ευθεία $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, χωρίς να μας προσδιορίζουν το σημείο επαφής.

Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ στο οποίο η εφαπτομένη ταυτίζεται με την ευθεία (ε). Αρκεί λοιπόν να βρούμε σημείο $A(x_0, y_0)$ έτσι ώστε:

$$(1)\quad y_0 = \alpha x_0 + \beta$$

$$(2)\quad y_0 = f(x_0)$$

$$(3)\quad f'(x_0) = \alpha$$

Παράδειγμα 7

Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in R$ ώστε η ευθεία $y = x + \alpha$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + \alpha x + 1$ και να προσδιοριστεί το σημείο επαφής.

Λύση

Η $f(x) = x^2 + \alpha x + 1$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = 2x + \alpha$. Για να εφάπτεται η ευθεία $y = x + \alpha$ στην C_f αρκεί να υπάρχει σημείο (x_0, y_0) τέτοιο ώστε :

$$\begin{cases} y_0 = x_0 + \alpha & (1) \\ y_0 = x_0^2 + \alpha x_0 + 1 & (2) \\ 2x_0 + \alpha = 1 & (3) \end{cases}$$

Από την (3) προκύπτει ότι: $x_0 = \dfrac{1-\alpha}{2}$

Από την (1) προκύπτει ότι: $y_0 = \dfrac{1-\alpha}{2} + \alpha = \dfrac{1+\alpha}{2}$

Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε: $\dfrac{1+\alpha}{2} = \left(\dfrac{1-\alpha}{2}\right)^2 + \alpha\dfrac{1-\alpha}{2} + 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \;\text{ ή }\; \alpha = -3$

Για $\alpha = 1$

Η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + x + 1$ στο Α (0, 1).

Για $\alpha = -3$

Η ευθεία $y = x - 3$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 3x + 1$ στο Β (2, -1).

Κατηγορία – Μέθοδος 5

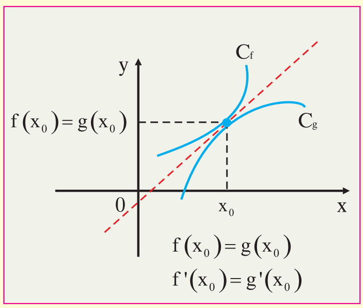
Ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης σε κοινό σημείο $M(x_0, y_0)$ των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f, g.

Αφού το Μ είναι κοινό σημείο πρέπει να επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις : $\begin{matrix} y = f(x) \\ y = g(x) \end{matrix}$.

Άρα είναι λύση της εξίσωσης , $f(x) = g(x)$ δηλαδή $f(x_0) = g(x_0)$ (1)

Αφού οι f, g παραγωγίζονται στο x_0 πρέπει οι εφαπτομένες των C_f, C_g στο Μ να ταυτίζονται, δηλαδή να έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης δηλαδή $f'(x_0) = g'(x_0)$ (2).

Έτσι έχουμε το σύστημα : $\begin{matrix} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{matrix}$



Παράδειγμα 8

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των

$f(x) = x^2 + \alpha x + 1$ **και** $g(x) = 2x^2 + x + \beta$ **να έχουν κοινή εφαπτομένη**

στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες με $f'(x) = 2x + \alpha$ και

$g'(x) = 4x + 1$. Πρέπει να ισχύουν : $\begin{cases} f'(1) = g'(1) \\ f(1) = g(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \alpha = 4 + 1 \\ \alpha = 1 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{matrix}$

Παράδειγμα 9

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 1$ **και** $g(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$ **να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.**

Λύση

Είναι $f'(x)=2\alpha x+\beta$ και $g'(x)=\dfrac{3\left(x^2+1\right)-3x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{3x^2+3-6x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{3-3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

Αφού οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0=1$ πρέπει : $f(1)=g(1)$ και $f'(1)=g'(1)$

Είναι $\left.\begin{array}{l} f(1)=\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1-1 \Leftrightarrow f(1)=\alpha+\beta-1 \\ g(1)=\dfrac{3\cdot 1}{1^2+1}\Leftrightarrow g(1)=\dfrac{3}{2}\end{array}\right\}$ Οπότε $\alpha+\beta-1=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 2\alpha+2\beta-2=3\Leftrightarrow$

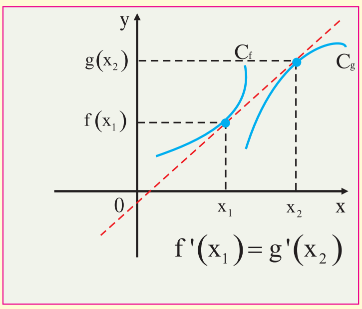
$2\alpha+2\beta=5 \quad (1)$

Επίσης $\left.\begin{array}{l} f'(1)=2\alpha\cdot 1+\beta \Leftrightarrow f'(1)=2\alpha+\beta \\ g'(1)=\dfrac{3-3\cdot 1^2}{1^2+1}\Leftrightarrow g'(1)=0\end{array}\right\}$ Οπότε $2\alpha+\beta=0 \ (2)$

Απο τις (1) και (2) προκύπτει : $\alpha=-\dfrac{5}{2}$ και $\beta=5$.

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f, g σε διαφορετικά σημεία έστω A και B αντίστοιχα.



Αν τα σημεία A, B είναι γνωστά και ε_1 η εφαπτομένη της C_f στο A με εξίσωση

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1) \ \text{ ή } \ y=f'(x_1)x+f(x_1)-f'(x_1)x_1$$

και ε_2 η εφαπτομένη της C_g στο B με εξίσωση:

$$y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2) \ \text{ ή } \ y=g'(x_2)x+g(x_2)-g'(x_2)x_2$$

για να ταυτίζονται οι ευθείες αυτές πρέπει οι εξισώσεις τους να είναι ίδιες :

Δηλ. πρέπει $f'(x_1)=g'(x_2)$ και $f(x_1)-f'(x_1)x_1=g(x_2)-g'(x_2)x_2$.

Αν είναι γνωστό το ένα από τα δύο σημεία, έστω το $A(x_1, y_1)$, τότε θεωρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο A, έστω $y=\alpha x+\beta$ και εξετάζουμε αν η ευθεία (ε) εφάπτεται και της C_g.

Παράδειγμα 10

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=2x^2+x+1$ **και** $g(x)=3x^2-11x+13$**. Να εξετάσετε αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη των γραφικών τους παραστάσεων. Αν ναι, να βρεθεί η εξίσωσή της.**

Λύση

i. Εξετάζουμε αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο, δηλαδή αν έχει λύση το σύστημα :

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x+1=3x^2-11x+13 \\ 4x+1=6x-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12x+12=0 \\ 2x=12 \end{cases}$$

που είναι φανερά αδύνατο , οπότε δεν υπάρχει κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο.

ii. Εξετάζουμε αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη που εφάπτεται των C_f, C_g σε διαφορετικά σημεία έστω $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$ ελέγχοντας αν έχει λύση το σύστημα:

$$\begin{cases} f'(x_1)=g'(x_2) \\ f(x_1)-x_1f'(x_1)=g(x_2)-x_2g'(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x_1+1=6x_2-11 \Leftrightarrow 2x_1=3(x_2-2) & (1) \\ 2x_1^{\ 2}+x_1+1-x_1(4x_1+1)=3x_2^{\ 2}-11x_2+13-x_2(6x_2-11) & (2) \end{cases}$$

και λύνοντας με τη βοήθεια της (1) προκύπτει : $x_2=2$ και $x_2=10$.

Για $x_2=2$ είναι $g'(2)=12-11=1$ και $g(2)=3$

Έτσι η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$y-g(2)=g'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-3=x-2 \Leftrightarrow y=x+1$

Για $x_2=2$ η σχέση (1) δίνει $x_1=0$.

Οπότε $f(x_1)=f(0)=1$ και τα σημεία επαφής είναι Α (0, 1), Β (2, 3).

Για $x_2=10$ είναι: $g(10)=203$, $g'(10)=49$

Έτσι η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$y-g(10)=g'(10)(x-10) \Leftrightarrow y-203=49(x-10) \Leftrightarrow y=49x-287$

Για $x_2=10$ η σχέση (1) δίνει $x_1=12$ άρα $f(x_1)=f(12)=301$ και τα σημεία επαφής είναι Α (12, 301) Β (10, 203).

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνονται οι $f: A \to A$ **και** $g: A \to A$ **, Α διάστημα, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και αντιστρέψιμες στο Α. Για τις δύο συναρτήσεις ισχύουν:** $f'(x)=g^{-1}(x)$ **και** $g'(x)=f^{-1}(x)$**.**

Να δείξετε ότι $[(fog+gof)(x)]'=x[(f+g)(x)]'$**.**

Λύση

Ισχύει ότι $(f^{-1}of)(x)=x$

Είναι $[(fog+gof)(x)]'=(f(g(x)))'+(g(f(x)))'=f'(g(x))g'(x)+g'(f(x))f'(x)=$

$=g^{-1}(g(x))g'(x)+f^{-1}(f(x))f'(x)=xg'(x)+xf'(x)=x[(g+f)(x)]'$

Άσκηση 2

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ **(1) για κάθε** $x,y\in R$ **. Να δειχθεί ότι** $f''(x)f(y)=f(x)f''(y)$**.**

Λύση

Είναι $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ (1)

(Παραγωγίζουμε με μεταβλητή x οπότε y και $f(y)$ είναι σταθερές)

Έτσι $f'(x+y)(x+y)'+f'(x-y)(x-y)'=2f(y)f'(x)$

$f'(x+y)+f'(x-y)=2f(y)f'(x)$ (Παραγωγίζουμε πάλι με μεταβλητή x)

$f''(x+y)(x+y)'+f''(x-y)(x-y)'=2f(y)f''(x)$

$f''(x+y)+f''(x-y)=2f(y)f''(x)$ (2)

Παραγωγίζουμε την σχέση (1) με μεταβλητή y.

$f'(x+y)(x+y)'+f'(x-y)(x-y)'=2f(x)f'(y)$

$f'(x+y)-f'(x-y)=2f(x)f'(y)$ (Παραγωγίζουμε πάλι με μεταβλητή y) οπότε

$f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y)$ (3)

Από τις (2) και (3) έχουμε $f(y)f''(x)=f(x)f''(y)$

Άσκηση 3

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x\,x'$ όταν:

i. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ **ii.** $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x}$

Λύση

i. Είναι $f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-(\ln x)(x)'}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

Έτσι $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow\ln x=1\Leftrightarrow x=e$ και επειδή

$f(e)=\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ii. Είναι $f'(x)=\left(\dfrac{x^3+2}{x}\right)'=\dfrac{(x^3+2)'\cdot x-(x^3+2)\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{3x^2\cdot x-x^3-2}{x^2}=\dfrac{2x^3-2}{x^2}$

Είναι : $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^3-2}{x^2}\Leftrightarrow 2x^3-2=0\Leftrightarrow 2(x^3-1)=0\Leftrightarrow x^3=1\Leftrightarrow x=1$ και επειδή $f(1)=1^3+2=3$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1,3)$ είναι παράλληλη στον x΄x.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

α. $f(x)=-4x^5$ **β.** $f(x)=-\dfrac{5}{x^2}$ **γ.** $f(x)=x^{\frac{2}{5}}$ **δ.** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

ε. $f(x)=-\dfrac{1}{2}\ln x$ **στ.** $f(x)=\dfrac{7}{\sqrt{x}}$ **ζ.** $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+5x-3$

2. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α. $f(x)=3\ln x(x^2+1)$ **β.** $f(x)=-6(x^2+1)(x^3-2)$ **γ.** $f(x)=x^2\eta\mu x$

δ. $f(x)=\dfrac{x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ **ε.** $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$ **στ.** $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$

3. Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α. $f(x)=(x^2+1)^5$ **β.** $f(x)=\sqrt{x^3+x^5}$ **γ.** $f(x)=\ln(\eta\mu x)$

δ. $f(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x}$ **ε.** $f(x)=\eta\mu^3x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ **στ.** $f(x)=5\eta\mu^2x(4x+1)$

ζ. $f(x)=x^x$ **η.** $f(x)=x^{\eta\mu x}$ **θ.** $f(x)=-3\ln^3(\sqrt{x})$

ι. $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ **κ.** $f(x)=(\ell nx)^{x^2}$ **λ.** $f(x)=\varepsilon\varphi(3^x)$

4. Να βρεθούν τα α, β∈ R για τα οποία η ευθεία με εξίσωση $y=-2x+3$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+1$ στο σημείο A (1, 1).

(**Απ.:**α = -2, β = 2)

5. Να βρείτε τα α, β∈ R ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους $f(x)=\alpha x^2+\beta x-1$ και $g(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0=-1$.

$\left(\textbf{Απ.:}\ \alpha=\dfrac{1}{2},\beta=1\right)$

6. Να βρείτε τα σημεία της C_f της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=-2\eta\mu^2x+\eta\mu 2x, x\in[0,2\pi]$ στα οποία οι εφαπτόμενες της είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

$\left(\textbf{Απ.:} \left(\frac{\pi}{2},-2\right), (\pi,0), \left(\frac{3\pi}{2},-2\right), (2\pi,0)\right)$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{4}$. Να βρείτε σημείο του άξονα y΄y από το οποίο οι εφαπτομένες που άγονται προς την C_f να είναι κάθετες.

8. Έστω $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+\beta, & x\le 2 \\ x^3+\gamma x, & x>2 \end{cases}$

Να βρείτε τα α, β, $\gamma\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της f στο σημείο M με τετμημένη 2 να έχει εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 2x+y-1=0$.

9. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x)=\sqrt{x-2}+x^2-1$ στο σημείο της με τετμημένη $x=2$.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=\frac{1}{x}$. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των C_f, C_g (όχι σε κοινό σημείο των C_f, C_g).

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x-2$. Να βρεθεί η τιμή του $\alpha\in R$ ώστε η εξίσωση $y=\alpha x-3$ να εφάπτεται της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ και να προσδιορίσετε το σημείο M.

12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+\beta, & x\le 1 \\ \frac{\gamma}{x}, & x>1 \end{cases}$

Να βρείτε τα α, β, $\gamma\in R$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη 1 να είναι κάθετη στην ευθεία $x-y-1=0$.

(**Απ.:** $\alpha=0,\ \beta=-1,\ \gamma=1$)

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-x^2$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y=f(x)$ η οποία:

i. είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon_1: x-y+2=0$

ii. είναι κάθετη προς την ευθεία $\varepsilon_2: x+5y+2=0$

14. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\sqrt[5]{x^4}$ **β.** $f(x)=\sqrt[5]{x^8}$ **γ.** $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$

15. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f(x^2-1)-xf(x+1)=2x$, για κάθε $x\in R$ να δείξεται ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο $A(0,f(0))$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης και στο $B(2,f(2))$.

16. Να δικαιολογήσετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: R\to R$ που να ικανοποιεί ταυτόχρονα της σχέσεις:

i. $f'(1)=1$ και **ii.** $\left[f(1+x)\right]^3=\left[f(1-x)\right]^2-x$ για κάθε $x\in R$.

(**Υπ.: i.** Θεωρήστε ότι υπάρχει και παραγωγήστε την
ii. Στην τελική σχέση θέτουμε x = 0 και καταλήγουμε σε άτοπο.

17. Δίνεται η συνάρτηση f με τις ιδιότητες:

i. $f(x+y)=e^x\cdot f(y)+e^y\cdot f(x)$ **ii.** η f είναι παραγωγίσιμη **iii.** $f'(0)=1$

Να δείξετε ότι $f'(x)-f(x)=e^x$ για κάθε $x\in R$.

(**Υπ.:** Θέτουμε y = 0 και βρίσκουμε f(0) = 0, $f'(x)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=...=e^x+f(x)$)

18. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $\left|f(x)-2\ell nx\right|\le 3(x-1)^2$, $x>0$. Να δειχθεί ότι:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ell nx}{x-1}=1$ **β.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

19. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $f(x\cdot y)=f(x)-f(y)$ (1) για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$. Να δείξετε ότι $xf'(x)+yf'(y)=0$.

(**Υπ.:** Παραγωγίστε την (1) ως προς x και μετά ως προς y)

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. α. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ είναι $f'(x)=0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

β. Έστω συνάρτηση $f:R^*\to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και έστω ότι όλες οι εφαπτόμενες του γραφήματος της f διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=Cx,\ x\in R^*$ και $C\in R$.

Β. Δίνεται ότι η συνάρτηση f^3 είναι παραγωγίσιμη στη θέση x_0. Να εξεταστεί εάν η συνεχής συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στη θέση x_0.

Γ. Να προσδιοριστεί το πλήθος των καθέτων που άγονται από το σημείο $A=(\alpha,\beta)$ προς την παραβολή $y=x^2$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha,\beta\in R$.