Μάθημα 11

Ρυθμός μεταβολής

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

- Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$ (ή και στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής).

  Γεωμετρικά εκφράζει την κλίση της C_f στο $(x_0, f(x_o))$.
- Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x, $x \in \Delta$ την παράγωγο συνάρτηση, $f'(x)$, $x \in \Delta$.

Παραδείγματα

Ο όγκος της σφαίρας είναι $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

- Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της ως προς την ακτίνα είναι $V'(r) = \frac{4}{3}3\pi r^2 = 4\pi r^2$.
- Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της όταν η ακτίνα είναι 2m είναι $V'(2) = 4 \cdot \pi 2^2 = 16\pi\ m^2$.
- Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου της σφαίρας όταν η ακτίνα της αυξάνει με ρυθμό $3cm/s$

  είναι: $V'(t) = 12\pi r^2(t)$ διότι $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$ οπότε $V'(t) = \frac{4}{3}3\pi r^2(t) r'(t)$ ή

  $V'(t) = 4\pi r^2(t) r'(t)$ και αφού $r'(t) = 3cm/s$, θα έχουμε: $V'(t) = 12\pi r^2(t)$
- Η ταχύτητα $\upsilon(t)$ ενός κινητού λέγεται και "ρυθμός μεταβολής της θέσης του" δηλαδή $\upsilon(t) = x'(t)$ αν $x(t)$ είναι η συνάρτηση θέσης του κινητού.
- Η επιτάχυνση $\alpha(t)$ ενός κινητού λέγεται και ρυθμός μεταβολής της ταχύτητάς του δηλαδή $\alpha(t) = \upsilon'(t)$.

  Εφαρμόζεται σ'οποιαδήποτε άλλη περίπτωση όπου κάποιο φυσικό, οικονομικό ή βιολογικό φαινόμενο μεταβάλλεται με το χρόνο.

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Σχηματίζουμε την εξίσωση που συνδέει τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν και στηρίζεται στην υπόθεση του προβλήματος.

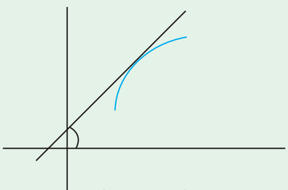
2. Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης που σχηματίσαμε ως προς κατάλληλη μεταβλητή (συνήθως είναι ο χρόνος), και έτσι εμφανίζουμε τον ζητούμενο ρυθμό μεταβολής.

3. Επιλύουμε την τελευταία ως προς τον ζητούμενο ρυθμό μεταβολής.

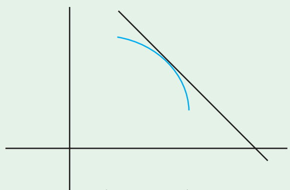
4. Αν ζητείται ο ρυθμός μεταβολής σε συγκεκριμένη θέση τότε θέτουμε στον τελικό τύπο τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές για την δεδομένη θέση και βρίσκουμε το αποτέλεσμα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

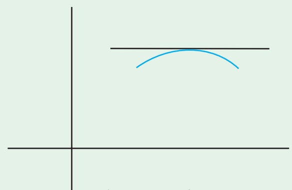
1. Το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής στο x_0 φανερώνει την "τάση" που έχει το μέγεθος $y = f(x)$ να μεταβληθεί στη θέση x_0.



(Σχήμα 1)



(Σχήμα 2)



(Σχήμα 3)

Έτσι: θετικός ρυθμός μεταβολής $(f'(x_0) > 0)$ σημαίνει αύξηση (σχ. 1)

αρνητικός ρυθμός μεταβολής $(f'(x_0) < 0)$ σημαίνει μείωση (σχ. 2)

$f'(x_0) = 0$ σημαίνει στασιμότητα (σχ. 3)

Μ'αυτήν τη λογική έχουμε τα πρόσημα στους αλγεβρικούς τύπους που προκύπτουν στην επίλυση των προβλημάτων.

Για παράδειγμα το μέγεθος x αυξάνει με ρυθμό Κ μονάδες/sec γράφουμε $x'(t) = K$, αν το μέγεθος x μειώνεται με ρυθμό Κ μονάδες/sec γράφουμε $x'(t) = -K$.

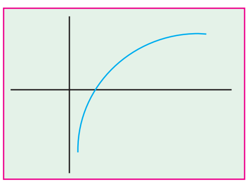
2. Μονάδα μέτρησης του ρυθμού μεταβολής του y ως προς x είναι το πηλίκο των μονάδων μέτρησης του μεγέθους y προς τις μονάδες μέτρησης του x.

3. Η δεύτερη παράγωγος της f είναι ο ρυθμός μεταβολής της πρώτης παραγώγου της f. Έτσι αν για παράδειγμα $f''(x_0) < 0$ σημαίνει ότι η f' έχει "μειωτική τάση" στο x_0 ανεξάρτητα με την τάση που έχει η ίδια η f στο x_0.

Για την $f(x) = \ell nx$ με $x > 0$

έχουμε $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$. Η f έχει τάση αύξησης.

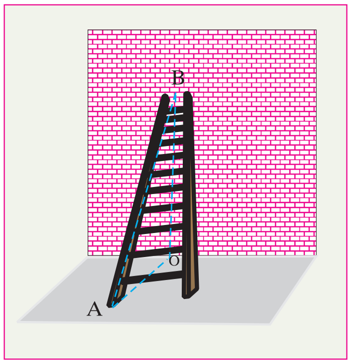
$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. Η f' έχει τάση μείωσης.



Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Μια σκάλα μήκους 13 m είναι στερεωμένη πλάγια σ' ένα τοίχο όπως στο σχήμα. Αν η βάση της γλυστράει με ρυθμό 4m/sec να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο πέφτει το πάνω μέρος της σκάλας τη χρονική στιγμή που το κάτω μέρος βρίσκεται σε απόσταση $x=5\text{m}$ από τον κατακόρυφο τοίχο.



Λύση

Έστω $OA = x(t)$, $OB = y(t)$ οπότε $x'(t) = 4$ m/sec (θετικό γιατί είναι απομάκρυνση από το 0). Ζητούμενο $y'(t_0)$ όπου t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία $x(t_0)=5$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει $x^2(t)+y^2(t)=13^2$.

Παραγωγίζουμε και είναι $2x(t)x'(t)+2y(t)\cdot y'(t)=0$.

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)=0$ (1). Επίσης είναι $x(t_0)=5$ και επειδή $x^2(t_0)+y^2(t_0)=13^2$ έχουμε $y(t_0)=\sqrt{169-25} \Leftrightarrow y(t_0)=12$ m.

Από την (1) έχουμε $5\cdot 4+12y'(t_0)=0$ οπότε είναι $y'(t_0)=-\dfrac{5}{3}$m/sec.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $y=\dfrac{1}{27}x^3$. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η τετμημένη ενός σημείου μεταβάλλεται γρηγορότερα της τεταγμένης του.

Λύση

Θέτουμε $x(t)$, $y(t)$ τις συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=\dfrac{1}{27}x^3$ και αφού μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου είναι: $y(t)=\dfrac{1}{27}x^3(t)$.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη και έχουμε:

$$(y(t))'=\left(\frac{1}{27}x^3(t)\right)' \Leftrightarrow y'(t)=\frac{1}{27}\cdot 3x^2(t)\cdot x'(t) \Leftrightarrow y'(t)=\frac{1}{9}x^2(t)\cdot x'(t) \Leftrightarrow$$

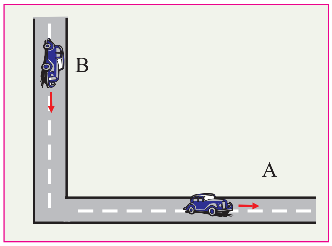
$$\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{x^2(t)}{9}$$ (1) (αφού $x'(t)\neq 0$). Απαιτούμε $x'(t)>y'(t) \Leftrightarrow \dfrac{y'(t)}{x'(t)}<1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$\frac{x^2(t)}{9}<1 \Leftrightarrow x^2(t)<9 \Leftrightarrow x^2(t)-9<0 \Leftrightarrow (x(t)-3)(x(t)+3)<0 \Leftrightarrow -3<x(t)<3$$

Έτσι όταν $-3<x<3$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης ενός σημείου είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

Άσκηση 3

Δύο αυτοκίνητα κινούνται σε κάθετους δρόμους. Το Α απομακρύνεται από τη διασταύρωση Ο με ταχύτητα 80 Km/h και το Β πλησιάζει τη διασταύρωση Ο με ταχύτητα 60 Km/h. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασής τους όταν το Α απέχει από το Ο 8 km και το Β απέχει από το Ο 6 Km.



Λύση

Θεωρούμε $OA = x(t)$, $OB = y(t)$ και $AB = s(t)$

Είναι $x'(t) = 80$ Km/h (το μέγεθος x αυξάνεται) και $y'(t) = -60$ Km/h (το μέγεθος y μειώνεται). Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $x^2(t) + y^2(t) = s^2(t)$.

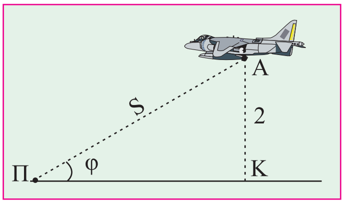
Παραγωγίζουμε και είναι $2x(t)x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) = 2s(t)s'(t)$.

Την χρονική στιγμή t_0 έχουμε: $2x(t_0)x'(t_0) + 2y(t_0)\cdot y'(t_0) = 2s(t_0)s'(t_0)$ (1) με $s(t_0) = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Άρα από την (1) προκύπτει: $8\cdot 80 + 6(-60) = 10\, s'(t_0) \Leftrightarrow s'(t_0) = 28$ Km/h

Άσκηση 4

Πολυβολητής (Π) αντιαεροπορικού βλέπει να έρχεται προς το μέρος του αεροπλάνο που πετά σε σταθερό ύψος 2 km με ταχύτητα 500 km/h . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας φ όταν η απόσταση του πολυβολητή από την προβολή Κ του αεροπλάνου στο έδαφος είναι 8 km.



Λύση

Θεωρούμε $AΠ = s(t)$, $ΠK = x(t)$, $x'(t) = -500$ km/h, $AK = 2$Km.

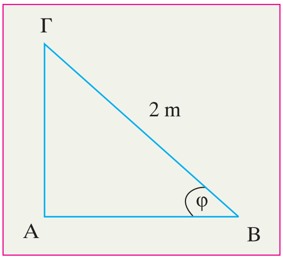
Είναι $εφ[φ(t)] = \frac{2}{x(t)}$ και με παραγώγιση έχουμε $\frac{1}{συν^2(φ(t))}\quad φ'(t) = \frac{-2x'(t)}{x^2(t)}$ (1).

Τη χρονική στιγμή t_0 όπου $x(t_0) = 8$ θα είναι $συν(φ(t_0)) = \frac{8}{s(t_0)} = \frac{8}{\sqrt{64+4}} = \frac{8}{\sqrt{68}}$.

Από την (1) έχουμε $φ'(t_0) = \frac{-2x'(t_0)}{x^2(t_0)}\cdot συν^2(φ(t_0)) = \frac{-2\cdot(-500)}{8^2}\cdot\left(\frac{8}{\sqrt{68}}\right)^2 = \frac{10^3}{68}$ rad / sec .

Άσκηση 5

Η γωνία του διπλανού σχήματος αυξάνεται με ρυθμό 1^0 ανά δευτερόλεπτο. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της πλευράς ΑΓ, ως προς τον χρόνο, όταν $φ = 60^0$.



Λύση

Έστω $AΓ = x$. Τότε $x = 2ημφ$, οπότε με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(2ημφ)}{dφ}\frac{dφ}{dt} = 2συνφ\frac{dφ}{dt}$$

Προσοχή!
Δίνεται ότι η γωνία μεταβάλλεται με ρυθμό 1^0 ανά δευτερόλεπτο.

Είναι λάθος να γράψουμε ότι $\frac{d\varphi}{dt}=1$, κι’ αυτό διότι η παραγώγιση έγινε με βάση τους γνωστούς κανόνες παραγώγισης τριγωνομετρικών συναρτήσεων οι οποίοι ισχύουν μόνο όταν οι γωνίες είναι εκφρασμένες σε rad , δηλαδή σε ακτίνια.
Άρα πρέπει να εκφράσουμε το ρυθμό μεταβολής σε rad / sec και όχι σε μοίρες / sec.

Επειδή 1^0 είναι $\frac{\pi}{180}$ rad , έχουμε : $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = 2\text{συν}60^0\,\frac{\pi}{180}\,\text{m/sec} = \frac{\pi}{180}\,\text{m/sec}$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο με ύψος υ. Να βρείτε :
i. το εμβαδόν Ε του τριγώνου ως συνάρτηση του ύψους
ii. το ρυθμό μεταβολής του Ε ως προς το ύψος όταν $\upsilon=\sqrt{6}$.

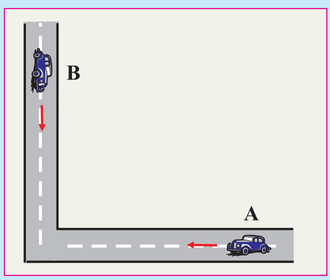
(**Απ.: i.** $E(\upsilon)=\frac{\sqrt{3}}{3}\upsilon^2$, **ii.** $E'(\sqrt{6})=2\sqrt{2}$)

2. Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις x, y. Οι διαστάσεις αυξάνουν με ρυθμό $4\,\text{m/sec}$ και $5\,\text{m/sec}$ αντίστοιχα. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε, ως συνάρτηση του χρόνου t, την χρονική στιγμή t_0 , όπου $x=30\text{cm}$ και $y=40\text{cm}$.

(**Απ. :** $3{,}1\text{m}^2/\text{sec}$)

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ=12 cm. Η κορυφή Α απομακρύνεται από την ΒΓ με ταχύτητα $3\,\text{m/sec}$. Τη χρονική στιγμή t_0 που η κορυφή απέχει από την ΒΓ 8 cm να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής :
α. της γωνίας ΒΑΓ **β.** της απόστασης ΑΒ.

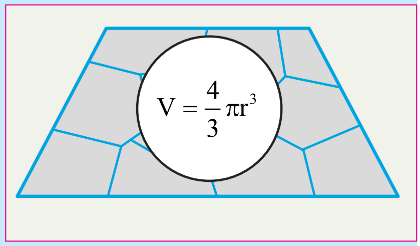
4. Οι τροχιές δύο οχημάτων Α και Β είναι κάθετες. Τα οχήματα Α, Β κινούνται όπως στο σχήμα έτσι ώστε:
$$(OA)+(OB)=20\,\text{m}.$$
Την χρονική στιγμή t_0 το όχημα Α κινείται με ταχύτητα $5\,\text{m/sec}$ και απέχει από το Ο απόσταση $(OA)=4$ cm.
Να βρείτε: **i.** την ταχύτητα του οχήματος Β
ii. τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΑΒ.



5. Ένας παρατηρητής (Π) βρίσκεται σε απόσταση 400 m από ένα αερόστατο (Α). Το αερόστατο ανέρχεται από το έδαφος με ταχύτητα $5\,\text{m/sec}$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\vartheta=\hat{\text{ΑΠΤ}}$ και της απόστασης ΠΤ την χρονική στιγμή t_0 την χρονική στιγμή κατά την οποία το αερόστατο βρίσκεται 500 m πάνω από το έδαφος, αν Τ η προβολή του αεροστάτου στο έδαφος.

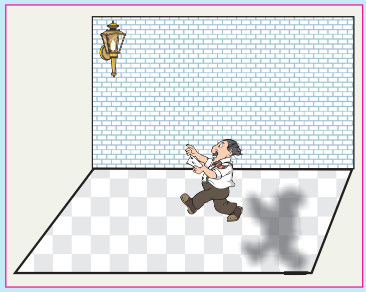
6. Μια μπάλα χιονιού σχήματος σφαίρας αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της μπάλας δίνεται από τον τύπο: $\rho = 5 - t^2$, ρ σε cm όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου της μπάλας την χρονική στιγμή $t = 2\,\text{sec}$.

(όγκος σφαίρας: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).



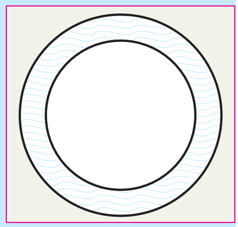
($\textbf{Απ.}: -16\pi\, cm^3/s$)

7. Ένας άνθρωπος με ύψος 1,70 m περπατάει με ταχύτητα $2\,m/sec$ προς ένα φανοστάτη ύψους 3 m από το έδαφος. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της σκιάς του ανθρώπου.



($\textbf{Απ.}: 2{,}6\ m/sec$)

8. Το εμβαδόν του δακτυλίου που περικλείεται ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κύκλους είναι σταθερό και ίσο με $10\pi\ cm^2$. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του μεγαλύτερου κύκλου είναι $5\,m^2/sec$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μήκους του μικρού κύκλου την χρονική στιγμή t_0 που το εμβαδόν του είναι $30\pi\ cm^2$.



9. Αν $\kappa(x), \pi(x)$ είναι το κόστος παραγωγής και η τιμή πώλησης x μονάδων προιόντος με τύπους: $\kappa(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 25x^2 - 300x + 500$ και $\pi(x) = 300x - 300$
να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους. Πότε ο ρυθμός μεταβολής είναι θετικός;

10. Η θέση ενός κινητού πάνω σε έναν άξονα κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο:
$x(t) = t^3 - 2t^2 + 7t - 3, \quad 0 \le t \le 8$

i. Να βρείτε την αρχική ταχύτητα του κινητού.
ii. Ποια χρονική στιγμή η ταχύτητα είναι 6 μονάδες ανά sec;

Ε ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Έστω $x > 1$ και τα σημεία $A(x-1, 0)$ και $B(0, \ell nx)$.

Αν το x αυξάνεται με ρυθμό $3\frac{cm}{sec}$, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής:

α. Της απόστασης (ΑΒ), τη χρονική στιγμή κατά την οποία $x = 2\ cm$.
β. Του ενβαδού του τριγώνου ΟΑΒ (Ο η αρχή των αξόνων) την ίδια χρονική στιγμή.

Δίνεται ότι: $\ell n2 \approx 0{,}7$ και $\sqrt{1{,}49} \approx 1{,}22$