Μάθημα 13 Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης

Α. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Θεώρημα 1

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ'ένα διάστημα Δ, τότε:

Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ.

Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του Δ, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ.

Σχόλιο

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει.

Για παράδειγμα η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R και ισχύει :

$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ και όχι $f'(x) > 0$.

Θεώρημα 2 (Fermat)

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε εσωτερικό σημείο x_0 του Δ στο οποίο παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε είναι : $f'(x_0) = 0$.

Σχόλια

1. Το παραπάνω θεώρημα μας οδηγεί στο να αναζητήσουμε τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης στις ρίζες της f'.

2. Επειδή δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος οι ρίζες της f' είναι πιθανές θέσεις τ. ακροτάτων για την f.

3. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει τοπικά ακρότατα και σε σημεία που δεν είναι ρίζες της f', όπως στα άκρα του πεδίου ορισμού της (αν είναι κλειστά) και σε σημεία που δεν είναι παραγωγίσιμη.

Οι ρίζες της f' και τα σημεία που η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη λέγονται **κρίσιμα σημεία.**

Χρειαζόμαστε επομένως ένα κριτήριο για να επιβεβαιώνουμε τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση παρουσιάζει τ. ακρότατα.

Αυτό είναι το επόμενο :

Θεώρημα 3

Έστω συνάρτηση f **συνεχής** στο (α,β).

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, x_0) και γνησίως φθίνουσα στο (x_0,β) τότε η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση x_0.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, x_0) και γνησίως αύξουσα στο (x_0,β) τότε η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στη θέση x_0.
ή με άλλη διατύπωση :

Έστω f συνάρτηση **συνεχής** στο (α,β) και παραγωγίσιμη σ' αυτό με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 του (α,β).

Αν $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$

και $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(x_0,\beta)$, τότε :

η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στη θέση x_0 το $f(x_0)$.

x	α	x_0	β
$f'(x)$	+		−
f	↗	$f(x_0)$ Τοπικό μέγιστο	↘

Αν $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$

και $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(x_0,\beta)$, τότε :

η f παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στη θέση x_0 το $f(x_0)$.

x	α	x_0	β
$f'(x)$	−		+
f	↘	$f(x_0)$ Τοπικό ελάχιστο	↗

Αν η f' διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ τότε:

i. το $f(x_0)$ δεν είναι τ. ακρότατο

ii. η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Β. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κατηγορία – Μέθοδος 1

Για να προσδιορίσουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης σύμφωνα με τα παραπάνω βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο αυτής και το πρόσημό της λύνοντας την ανισότητα $f'(x)>0$ ή $f'(x)<0$.

Απο τη λύση των παραπάνω ανισοτήτων προκύπτουν τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως μονότονη.

Τα τοπικά ακρότατα, μιας συνάρτησης προκύπτουν απο τα κρίσιμα σημεία εκατέρωθεν των οποίων αλλάζει πρόσημο η πρώτη παράγωγος. Επίσης τα κλειστά άκρα (αν υπάρχουν) του πεδίου ορισμού της συνάρτησης αποτελούν σίγουρες θέσεις τοπικών ακροτάτων αρκεί η f να είναι συνεχής.

Παράδειγμα 1

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x\ln x$, $x>0$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Λύση

Είναι $f'(x) = \ln x + x\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$, $x > 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και τα μόνα κρίσιμα σημεία είναι οι ρίζες της πρώτης παραγώγου, δηλαδή $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ell nx + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/e$.

Έχουμε $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \Leftrightarrow x > e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ και ανάλογα

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1/e$

Έτσι σχηματίζουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών για την f :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ Τοπικό ελάχιστο	$\nearrow$	

στον οποίο φαίνονται τα διαστήματα μονοτονίας και το ακρότατο της f.

Κατηγορία – Μέθοδος 2

Για να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών συνάρτησης σε ένα διάστημα (α,β) ή στο πεδίο ορισμού της βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης και χρησιμοποιούμε γνωστό θεώρημα απο το κεφάλαιο της συνέχειας που αφορά στο σύνολο τιμών.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με τύπο : $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$.

Λύση

Είναι $f'(x) = \left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και συνεπώς έχει σύνολο τιμών το διάστημα

$\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty)$, διότι : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty - \infty = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty - 0 = +\infty$

Κατηγορία – Μέθοδος 3

Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση έχει μοναδική ρίζα σε ένα διάστημα, αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας στο συγκεκριμένο διάστημα και στη συνέχεια δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι **γνησίως μονότονη** σ' αυτό το διάστημα.

Παράδειγμα 3

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g με $f(x)=\ln x$ **και** $g(x)=\dfrac{1}{x}$ **αντίστοιχα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.**

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$, $x>0$ και θα αποδείξουμε ότι έχει μοναδική ρίζα.

Είναι $h'(x)=\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$, για κάθε $x>0$.

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και συνεπώς έχει πεδίο τιμών το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to 0^+}h(x),\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)$, διότι: $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)=(-\infty-\infty)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty-0=+\infty$.

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών που είναι το $(-\infty,+\infty)$ η $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, συμπεραίνουμε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Απο τα παραπάνω λοιπόν συμπαιρένουμε ότι υπάρχει μοναδικό ξ στο $(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $h(\xi)=0$.

Κατηγορία – Μέθοδος 4

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής: $f(x)\geq g(x)$ ή $f(x)\leq g(x)$ θέτουμε $h(x)=f(x)-g(x)$ και απο τη μονοτονία και τα ακρότατα της h προκύπτει η ισχύς της προς απόδειξη ανισότητας.

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε ότι : $e^x\geq 1-\ln(x+1)$, για κάθε $x\geq 0$

Λύση

Θέτουμε $h(x)=e^x-1+\ln(x+1)$, $x\ge 0$.

Είναι $h'(x)=\left(e^x-1+\ln(x+1)\right)'=e^x+\dfrac{1}{x+1}>0$, για κάθε $x\ge 0$ που σημαίνει ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Επομένως , αν $x\ge 0$ έχουμε : $h(x)\ge h(0)=0 \Leftrightarrow e^x-1+\ln(x+1)\ge 0 \Leftrightarrow e^x\ge 1-\ln(x+1)$

Κατηγορία – Μέθοδος 5

Αν έχουμε ως προυπόθεση ότι ισχύει μια ανισοτική σχέση όπως για παράδειγμα $f(x)\ge \alpha$ ή $f(x)\le \alpha$ και θέλουμε να προσδιορίσουμε κάποια παράμετρο, βρίσκουμε x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0)=\alpha$, οπότε απο τη σχέση $f(x)\ge \alpha=f(x_0)$ ή $f(x)\le \alpha=f(x_0)$ και σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat , προκύπτει $f'(x_0)=0$. Απο την τελευταία εξίσωση προσδιορίζουμε την ζητούμενη παράμετρο.

Παράδειγμα 5

Αν $\alpha^x+5^x\ge 2$, για κάθε $x\in R$ όπου $\alpha>0$ να αποδείξετε ότι $\alpha=\dfrac{1}{5}$.

Λύση

Αν θέσουμε $f(x)=\alpha^x+5^x$ έχουμε :

$f(x)=\alpha^x+5^x\ge 2=f(0)$, που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το 2 στη θέση $x=0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα είναι : $f'(0)=0$.

Επειδή $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha+5^x\ln 5$ παίρνουμε :

$$f'(0)=0 \Leftrightarrow \alpha^0\ln\alpha+5^0\ln 5=0 \Leftrightarrow \ln\alpha+\ln 5=0 \Leftrightarrow \ln(\alpha 5)=0=\ln 1 \Leftrightarrow \alpha 5=1 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{5}$$

Κατηγορία – Μέθοδος 6

Όταν ζητείται τιμή μιας παραμέτρου ώστε μία συνάρτηση να παρουσιάζει f ακρότατο σε μια θέση , έστω x_0 , τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat πρέπει $f'(x_0)=0$. Απο τη συνθήκη αυτή προσδιορίζουμε την τιμή της παραμέτρου.

Επειδή η συνθήκη $f'(x_0)=0$ είναι αναγκαία και όχι ικανή πρέπει να γίνεται επαλήθευση με τον πίνακα μονοτονίας, δηλαδή να ελέγχουμε αν η παράγωγος αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, οπότε το x_0 είναι πράγματι θέση ακρότατου.

Παράδειγμα 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\alpha\sqrt{x}+\dfrac{\beta\ln x}{\sqrt{x}}$, $x>0$. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ ώστε η συνάρτηση να παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x=1$ με $f(1)=-2$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ και αφού το 1 είναι εσωτερικό του διαστήματος $(0,+\infty)$ σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat είναι $f'(1)=0$.

Έχουμε: $f'(x)=\left(\alpha\sqrt{x}+\dfrac{\beta\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=\dfrac{\alpha x+2\beta-\beta\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x>0$

Άρα $f'(1)=0\Leftrightarrow \dfrac{\alpha+2\beta-\beta\ln 1}{2}=0\Leftrightarrow \alpha+2\beta=0$ (1)

Επίσης έχουμε $f(1)=-2\Leftrightarrow \alpha\sqrt{1}+\dfrac{\beta\ln 1}{\sqrt{1}}=-2\Leftrightarrow \alpha=-2$ (2)

Απο τις (1) και (2) παίρνουμε $\alpha=-2$ και $\beta=1$.

Για τις τιμές αυτές είναι $f'(x)=\dfrac{2-2x-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x>0$ και πρέπει να μελετήσουμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του 1.
Το πρόσημο της f' εξαρτάται απο το πρόσημο του αριθμητή, αφού $x>0$.

Θέτουμε $g(x)=2-2x-\ln x$, $x>0$ και θα μελετήσουμε το πρόσημο της g.

Είναι $g'(x)=-2-\dfrac{1}{x}<0$, για κάθε $x>0$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$, με $g(1)=0$. Οπότε αν $x>1\Leftrightarrow g(x)<g(1)=0$, ενώ αν $x<1\Leftrightarrow g(x)>g(1)=0$ που σημαίνει ότι η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1 για τις τιμές των α και β που βρήκαμε και μάλιστα παρουσιάζει στη θέση αυτή τοπικό μέγιστο (που είναι και ολικό μέγιστο).

Γ. ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να εξεταστεί η μονοτονία των συναρτήσεων:

i. $f(x)=\ell n\dfrac{1}{x}$, **ii.** $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ **iii.** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

Λύση

i. Επειδή για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)=(-\ell n x)'=-\dfrac{1}{x}<0$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Επειδή για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$, η συνάρτηση εφx είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

iii. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ και για κάθε $x \in (-1,1)$ έχουμε $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ οπότε:

- $f'(x) > 0$ στο $(-1,0)$ που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,0]$.
- $f'(x) < 0$ στο $(0,1)$ που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$.

Άσκηση 2

i. Έστω συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x - ημ^2 x$ ορισμένη στο R. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα στο R.

ii. Όμοια για τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = x - ημx$ ορισμένη στο R.

Λύση

i. Είναι $f(x) = 2x - ημ^2 x$ ορισμένη στο R οπότε

$f'(x) = (2x - ημ^2 x)' = 2 - 2ημxσυνx = 2 - ημ2x$, $x \in R$.

Θέτουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - ημ2x = 0$ ($ημ2x = 2$ αδύνατη στο R)

Είναι $-1 \leq ημ2x \leq 1$ για κάθε $x \in R$ οπότε $-1 \leq -ημ2x \leq 1$ για κάθε $x \in R$ και $2 - 1 \leq 2 - ημ2x \leq 2 + 1$ για κάθε $x \in R$ ή $1 \leq 2 - ημ2x \leq 3$ για κάθε $x \in R$.

Επειδή $f'(x) = 2 - 2ημx$ δείξαμε ότι $1 \leq f'(x) \leq 3$, $x \in R$.

Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R (ασφαλώς δεν έχει ακρότατα)

ii. Είναι $g(x) = x - ημx$ ορισμένη στο R οπότε $g'(x) = (x - ημx)' = 1 - συνx$, $x \in R$.

Θέτουμε $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - συνx = 0 \Leftrightarrow συνx = 1 \Leftrightarrow συνx = συν0 \Leftrightarrow x = 2kπ, k \in Z$.

Όμως $συνx < 1 \Leftrightarrow συνx - 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - συνx > 0$ για κάθε $x \in R$ με $x \neq 2kπ, k \in Z$.

Έτσι αν και έχουμε άπειρες λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$ (άρα άπειρες πιθανές θέσεις ακροτάτων) επειδή $g'(x) > 0$ εκατέρωθεν των λύσεων και η g είναι συνεχής στις θέσεις αυτές η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R και δεν παρουσιάζει βέβαια και ακρότατα.

Άσκηση 3

Για τους διάφορους του μηδέν αριθμούς α, β, γ ισχύει: $3β^2 - 4αγ \leq 0$. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = αx^3 - 3βx^2 + 4γx + 5$, $x \in R$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Λύση

Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R με: $f'(x) = 3αx^3 - 6βx^2 + 4γ$.

Η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι εξίσωση β΄ βαθμού (ως προς x) και έχει:

$\Delta=36\beta^2-48\alpha\gamma=12(3\beta^2-4\alpha\gamma)\le 0$ (από υπόθεση)

Αυτό σημαίνει ότι: η εξίσωση $f'(x)=0$ ή δεν έχει πραγματικές ρίζες $(\Delta<0)$ ή αν έχει, τότε είναι μία διπλή $(\Delta=0)$, οπότε εκατέρωθεν αυτής η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο.
Έτσι σε κάθε περίπτωση δεν υπάρχουν τοπικά ακρότατα.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=xe^x-\alpha$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να προσδιοριστεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$.

Λύση

i. Είναι $f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Άρα έχουμε για την f τον πίνακα μεταβολών

Η f παρουσιάζει στη θέση $x=-1$ τοπικό (και ολικό) ελάχιστο, το $f(-1)=-\frac{1}{e}-\alpha$

ii. Αν $-\frac{1}{e}-\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha<-\frac{1}{e}$ τότε προφανώς $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη.

Αν $-\frac{1}{e}-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{e}$ τότε η $x=-1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (η ρίζα σε αυτήν την περίπτωση είναι διπλή).

Αν $-\frac{1}{e}-\alpha<0 \Leftrightarrow \alpha>-\frac{1}{e}$ τότε:

Στο διάστημα $(-\infty,-1]$, η f είναι γνησίως φθίνουσα με $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\alpha>0$ και επομένως υπάρχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα αυτό.

Στο διάστημα $[-1,+\infty)$, η f είναι γνησίως αύξουσα με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty>0$ και επομένως υπάρχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα αυτό.

Συνολικά δηλαδή η f έχει ακριβώς δύο ρίζες αν $\alpha>-\frac{1}{e}$.

Άσκηση 5

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in R$ με $-1<x<0$ ή $x>0$ ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}$.

Είναι $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$

Για $-1<x<0$ προφανώς ισχύει $f'(x)<0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα η ελάχιστη τιμή της f στο $[-1,0]$ είναι η $f(0)=0$ και συνεπώς $f(x)>f(0)$ για κάθε $x\in(-1,0)$ δηλαδή $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$ για κάθε $x\in(-1,0)$.

Για $x>0$ ισχύει $f'(x)>0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η ελάχιστη τιμή της f στο $[0,+\infty)$ είναι η $f(0)=0$ και συνεπώς $f(x)>f(0)$ για κάθε $x>0$ δηλαδή $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$ για κάθε $x>0$.

Δ. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x^3+2x-2\eta\mu x$, $x\in R$

α. Να βρεθεί η τρίτη παράγωγος της f.

β. Να βρεθούν τα πρόσημα των συναρτήσεων: f, f', f'', $f^{(3)}$, όταν $x<0$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=-e^x+x$ και $g(x)=x^3+6x^2$. Να αποδείξετε ότι, αν $x\in[-1,2]$, είναι $f(x)<g(x)$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=1-x^2$, $x\in R$.

α. Αποδείξτε ότι το σημείο $M(\eta\mu\theta,\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ανήκει στη C_g και η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο M είναι $\varepsilon: 2(\eta\mu\theta)x+y=1+\eta\mu^2\theta$.

β. Αν η ε τέμνει τη C_f στα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, αποδείξτε ότι:

$x_1\cdot x_2=-2-\eta\mu^2\theta$, $x_1+x_2=-2\eta\mu\theta$ και $y_1+y_2=2+6\eta\mu^2\theta$.

γ. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση φ με τύπο:

$\varphi(\theta)=x_1+x_2+4x_1x_2+y_1+y_2$, $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

4. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+1$ να παρουσιάζει στο $x_1=1$ τοπικό ελάχιστο, το $x_2=-\dfrac{1}{2}$ να είναι θέση σημείου καμπής και η εφαπτομένη της C_f στο $x_3=0$ να είναι κάθετη της ευθείας $\varepsilon: x-12y=0$.

5. α. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}3x^2-5x+6, & \text{αν } x\le 1\\ 2\sqrt{x^2+3}, & \text{αν } x>1\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

β. Έστω η συνάρτηση f με: $f(x)=3x^3-\alpha x^2+\beta x-3$, όπου $\alpha,\beta\in R$.

Αν η f έχει τοπικά ακρότατα στο $x_1=1$ και $x_2=-\dfrac{5}{9}$, να βρεθούν οι αριθμοί α και β.

6. Έστω δύο συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ, για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

i. Είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ.

ii. $f''=g''$

iii. $0\in\Delta$ και $f(0)=g(0)$.

Να δειχθεί οτι:

α. Για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $f(x)-g(x)=cx$, όπου $c\in\Delta$.

β. Αν η $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες ρ_1,ρ_2, τότε η $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x)=x^2+\dfrac{2\alpha}{x}+\beta$, $(\alpha,\beta\in R)$ η οποία μηδενίζεται στο $x_1=1$ και παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=2$.

α. Να βρεθούν τα α και β.

β. Να βρεθεί το είδος του ακρότατου και η τιμή του.

Ε. ΤΟ ΞΕΧΩΡΙΣΤΟ ΘΕΜΑ

Α. Έστω οι μιγαδικοί $z_1=\dfrac{1}{2}$ και $z_2=\dfrac{1}{x}+i\sqrt{x}$, $(x>0)$ και οι εικόνες τους Α, Β αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο. Να προσδιορίσετε το x έτσι ώστε η απόσταση ΑΒ να είναι η ελάχιστη.

Β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία άγονται τρεις εφαπτόμενες προς την καμπύλη $y=x^3-x$.

Γ. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Αν ισχύει $2f(x)\ge f(\alpha)+f(\beta)$ για κάθε $x\in R$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.