

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α – ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Α1. Η Ευθεία

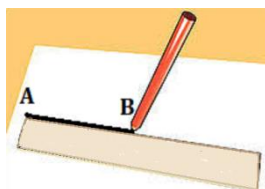
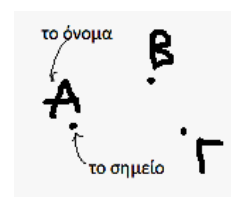


Το σημείο: η τομή δύο γραμμών, το ίχνος από το μολύβι μας σ' ένα χαρτί, μια τελεία, μας δίνουν μία εικόνα για το σημείο.

+	,	-	.	/
;	<	=	>	?

Το σημείο δεν έχει ούτε **μήκος**, ούτε **πλάτος**.

Στη γεωμετρία κάποιες φορές δίνουμε στα σημεία ονόματα. Το όνομα ενός σημείου είναι πάντα **ένα κεφαλαίο γράμμα**, π.χ. Α, Β, Γ, κ.λπ.



Ο πιο σύντομος δρόμος ανάμεσα σε δύο σημεία π.χ. τα Α και Β είναι ένα **ευθύγραμμο τμήμα** (μία τεντωμένη κλωστή με δύο άκρα Α και Β). Για να το σχεδιάσουμε χρειαζόμαστε έναν χάρακα (κανόνας¹). Το ευθύγραμμο τμήμα παίρνει το όνομα από τα άκρα του, λέμε δηλαδή **«το τμήμα ΑΒ»**. Η σειρά των γραμμάτων δεν έχει σημασία. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι το ίδιο με το ΒΑ.

Το ευθύγραμμο τμήμα έχει μόνο μήκος και δεν έχει πλάτος

Η ευθεία



Η ευθεία: ένα τεντωμένο σχοινί μας δίνει την εικόνα μιας ευθείας. Αν προεκτείνουμε με τη βοήθεια του κανόνα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ αριστερά του Α και δεξιά του Β όσο θέλουμε, τότε έχουμε μία ευθεία. Η ευθεία δεν έχει άκρα.



Το όνομα μιας ευθείας μπορεί να είναι...

ένα μικρό γράμμα, π.χ.
η ευθεία Ε.

Ε

ή δύο ίδια μικρά γράμματα (το ένα με τόνο) π.χ. **η ευθεία χ'χ.**

χ'

χ

ή το όνομα δύο σημείων πάνω στην ευθεία, π.χ. **η ευθεία ΑΒ.**

Α

Β

¹Ένας χάρακας χωρίς μονάδες μέτρησης.

Δραστηριότητα A1.2

Έστω ένα σημείο O .

- Σχεδιάσε μία ευθεία που να περνάει από το O .
- Μπορείς να σχεδιάσεις κι άλλη μία;
- Πόσες ευθείες νομίζεις ότι μπορούν να υπάρχουν που να περνάνε από το O ;

O
•

Έστω τώρα δύο σημεία A και B .

- Σχεδιάσε μία ευθεία που να περνάει από τα A και B .
- Μπορείς να σχεδιάσεις κι άλλη μία;
- Πόσες ευθείες νομίζεις μπορούν να υπάρχουν που να περνάνε από τα δύο αυτά σημεία;

A B
• •

Συμπληρώνω
Μαθαίνω

Από δύο σημεία περνάει

Από ένα σημείο περνάνε

Η ημιευθεία

Προεκτείνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB μόνο προς τη μία μεριά. Το νέο σχήμα λέγεται **ημιευθεία**. Η ημιευθεία έχει αρχή αλλά δεν έχει τέλος. Το **όνομα μιας ημιευθείας** είναι: ένα κεφαλαίο γράμμα (η αρχή της) κι ένα μικρό γράμμα (από τα τελευταία του ελληνικού αλφαβήτου π.χ. χ , ψ).



Λέμε για παράδειγμα η **ημιευθεία $A\chi$** . Το γράμμα χ δεν συμβολίζει τη θέση ενός σημείου.

Ένα σημείο A πάνω σε μία ευθεία $\chi'\chi$ ορίζει δύο ημιευθείες, την $A\chi'$ και την $A\chi$.



Δραστηριότητα A1.3 (Διατάξεις σημείων)

- A.** α) Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα τρία **σημεία A, B και Γ σε κάθε περίπτωση;**
β) Πόσες ευθείες ορίζουν τα τρία σημεία A, B, και Γ σε κάθε περίπτωση;



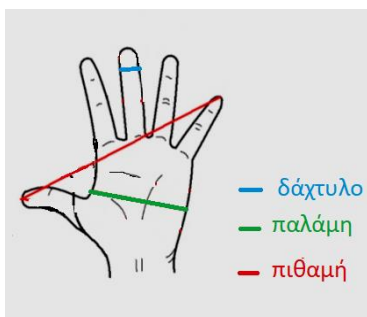
- B.** Σχεδιάσε τώρα **τέσσερα σημεία A, B, Γ και Δ**. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείς να το κάνεις; (ανάλογα με το πόσα σημεία βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία)

Η μέτρηση μήκους

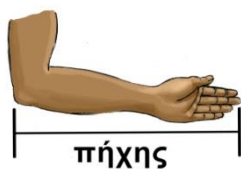
Η μέτρηση ενός μήκους, μιας απόστασης, ήταν ένα από τα πρώτα πράγματα που θέλησε να κάνει ο άνθρωπος.

Μέτρηση = Σύγκριση

Μετρώ ένα μήκος σημαίνει ότι το **συγκρίνω με ένα άλλο γνωστό και σταθερό μήκος** και υπολογίζω **πόσες φορές ακριβώς είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από αυτό**. Αυτό το γνωστό και σταθερό μήκος το λέμε **μονάδα μέτρησης**.



Πολύ παλιά, οι άνθρωποι χρησιμοποιούσαν ως μονάδα μέτρησης μέρη από το σώμα τους. Για μικρά μήκη χρησιμοποίησαν τα δάχτυλα, την παλάμη ή την πιθαμή. (Μία παλάμη $\approx$ 4 δάχτυλα, μία πιθαμή $\approx$ 2 παλάμες)

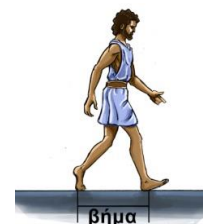


Για λίγο μεγαλύτερα μήκη, χρησιμοποιούσαν και το μέρος του μπράτσου, από τον αγκώνα ως τα δάχτυλα και το έλεγαν **πήχης** (1 πήχης $\approx$ 4 παλάμες).

Χρησιμοποίησαν ακόμη το **πόδι**



και τα **βήματα**.



Δραστηριότητα (Ομαδική)

- Προσπαθήστε να μετρήσετε το μήκος του θρανίου σας με μονάδα μέτρησης την παλάμη σας. Πόσες παλάμες είναι; Άρα πόσα δάχτυλα;
 - Μετρήστε το πλάτος του τετραδίου σας με μονάδα μέτρησης το δάχτυλό σας. Πόσα δάχτυλα είναι; Άρα, πόσες παλάμες;
 - Μετρήστε το πλάτος της αίθουσας που βρίσκεστε με μονάδα μέτρησης το πόδι σας. Πόσα πόδια είναι; Άρα, πόσες παλάμες;
- Συγκρίνετε τα αποτελέσματα που βρήκατε. Πόσο διαφέρουν; Γιατί;

Η μέτρηση με αυτές τις μονάδες δεν ήταν πάντα η ίδια. Η παλάμη για παράδειγμα διαφέρει από άνθρωπο σε άνθρωπο. Έτσι, οι περισσότερες χώρες, το 1791 στη Γαλλία, συμφώνησαν να χρησιμοποιούν **την ίδια μονάδα μέτρησης για το μήκος**. Ως μονάδα μέτρησης, πήραν το $\frac{1}{10.000.000}$ της απόστασης του Ισημερινού από το Βόρειο πόλο. Την απόσταση αυτή την ονόμασαν **μέτρο**.

Κάθε μονάδα μέτρησης χωρίζεται σε μικρότερες. Έτσι χωρίσαμε το 1 μέτρο σε 10 κομμάτια (dm), κάθε ένα από αυτά σε άλλα 10 (cm) και κάθε ένα από αυτά σε άλλα 10 (mm).

dm = decimeter = δέκατο.

cm = centimeter = εκατοστό.

mm = millimeter = χιλιοστό.

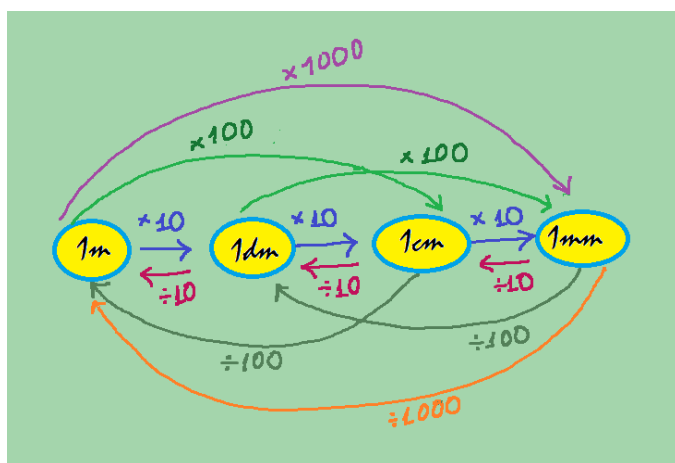
$$1\text{m} = 10\text{ dm} = 100\text{cm} = 1000\text{mm}$$

$$1\text{dm} = 10\text{cm} = 100\text{ mm}$$

$$1\text{cm} = 10\text{mm}$$

Για μεγάλες αποστάσεις χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης το **χιλιόμετρο (Km)**.

$$1\text{km} = 1000\text{m}$$



Τα παρακάτω σχήματα μας δείχνουν τη μετάβαση από μία μονάδα σε μία άλλη.

Για παράδειγμα:

$$3\text{cm} = (3 \times 10) = 30\text{mm}$$

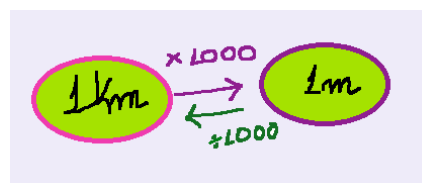
$$12\text{dm} = (12 \times 100) = 1200\text{mm}$$

$$3,2\text{m} = (3,2 \times 100) = 320\text{cm}$$

$$2,1\text{km} = (2,1 \times 1000) = 2100\text{m}$$

$$200\text{cm} = (200 : 100) = 2\text{m}$$

$$120\text{mm} = (120 : 100) = 1,2\text{dm}$$



Άσκηση 1

Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

i. $320\text{cm} = \dots\dots\dots \text{dm} = \dots\dots\dots \text{m}$

ii. $5,2\text{ km} = \dots\dots\dots \text{m} = \dots\dots\dots \text{mm}$

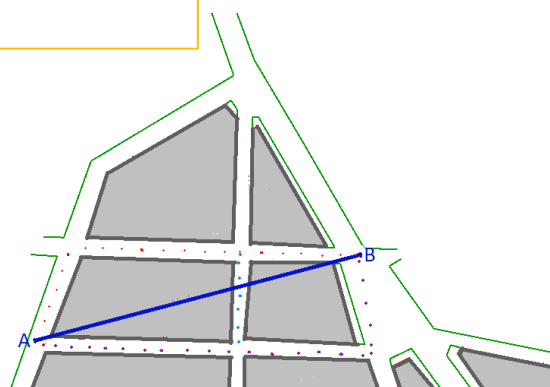
iii. $45000\text{ mm} = \dots\dots\dots \text{m}$

iv. $20\text{dm} = \dots\dots\dots \text{mm}$

v. $780\text{ cm} = \dots\dots\dots \text{m} = \dots\dots\dots \text{km}$

Άσκηση 2

Να βρείτε και να σχεδιάσετε τη συντομότερη διαδρομή από τη θέση Α στη θέση Β (Οι γκρι περιοχές είναι κτίρια και δεν μπορείτε να περπατήσετε εκεί).

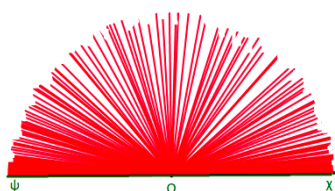
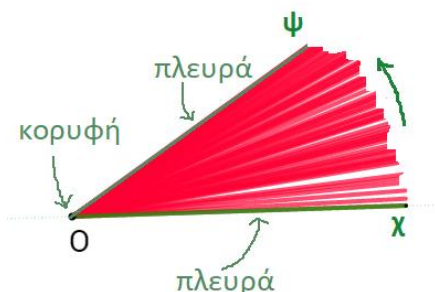


A.2 - Η Γωνία

Στροφή – στρίβω- γυρίζω γύρω από...

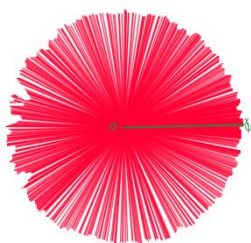


Έχουμε δύο ημιευθείες $O\chi$, $O\psi$ με την ίδια αρχή O . **Στρίβουμε την $O\psi$ γύρω από το O με τη φορά που βλέπετε.** Τότε η $O\psi$ διαγράφει («χρωματίζει») την κόκκινη περιοχή. Η περιοχή αυτή μαζί με τις ημιευθείες $O\chi$, $O\psi$ και το σημείο O λέγεται **γωνία**. Οι ημιευθείες $O\chi$, $O\psi$ λέγονται **πλευρές της γωνίας** και το σημείο O , **κορυφή της γωνίας**. Οι πλευρές της γωνίας μπορούν να προεκταθούν όσο θέλουμε.

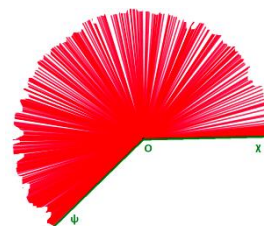


Όταν η ημιευθεία $O\psi$ με την ημιευθεία $O\chi$ γίνουν ευθεία, τότε λέμε ότι σχηματίζεται μία **ευθεία γωνία**. Μέχρι να φτάσει την ευθεία γωνία κάθε γωνία λέγεται **κυρτή**.

Εάν η $O\psi$ συνεχίσει να στρίβει τότε διαγράφει **μη κυρτή γωνία**.



Η ημιευθεία $O\psi$ κάνει μία ολόκληρη στροφή και «πέφτει» πάνω στην $O\chi$. Τότε η γωνία που έχει διαγράψει λέγεται **πλήρης γωνία**.

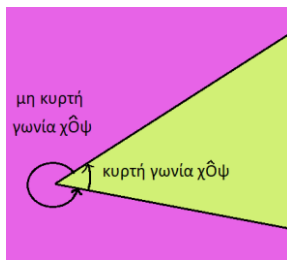


Πριν ξεκινήσει να στρίβει η ημιευθεία $O\psi$ βρίσκεται πάνω στην $O\chi$. Τότε η γωνία που σχηματίζεται είναι η **μηδενική γωνία**.



Το όνομα μιας γωνίας

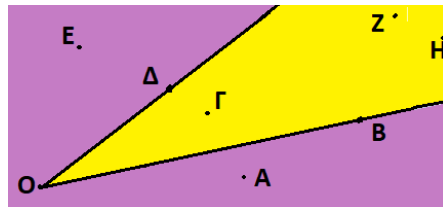
ένα μικρό γράμμα, π.χ. γωνία $\hat{\omega}$
 ή ένα κεφαλαίο (εάν δεν υπάρχει άλλη γωνία στο σχήμα με την ίδια κορυφή) π.χ. γωνία $\hat{B}$
 ή 3 γράμματα. Η κορυφή είναι πάντα στη μέση! π.χ. γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ ή $\widehat{\Gamma B A}$ ή γωνία $\widehat{\chi O \psi}$ ή $\widehat{\psi O \chi}$



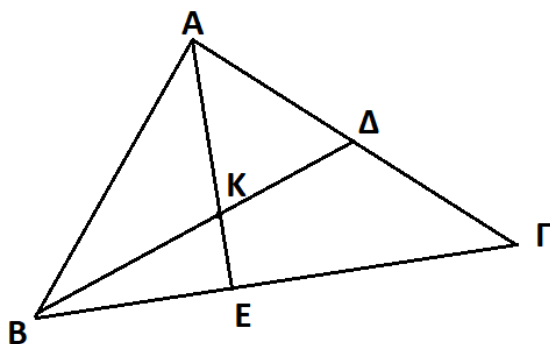
Δύο ημιευθείες $O\chi$, $O\psi$ με την ίδια αρχή O , σχηματίζουν πάντα 2 γωνίες, μία κυρτή και μία μη κυρτή.

Όταν λέμε γωνία $\widehat{\chi O \psi}$, εννοούμε την κυρτή γωνία. Εάν θέλουμε να πούμε για την μη κυρτή γωνία τότε λέμε: «**η μη κυρτή γωνία $\widehat{\chi O \psi}$** ».

Μια γωνία έχει: **κορυφή, πλευρές και εσωτερικά σημεία**. Ποια από τα σημεία που βλέπεις σημειωμένα ανήκουν στην γωνία $\hat{O}$;



Άσκηση A2.1: Ας ζωγραφίσουμε!



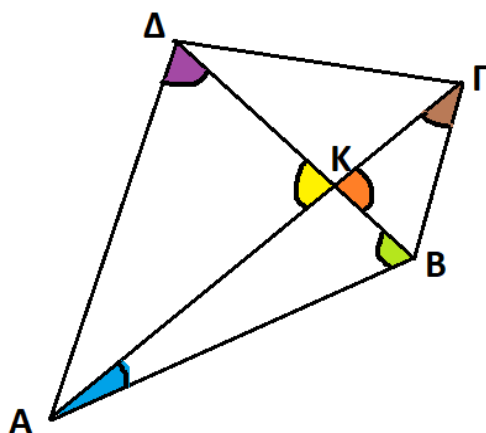
Χρωμάτισε με **μπλε** χρώμα τις γωνίες:

α) $\widehat{BKE}$ β) $\widehat{ABD}$ γ) $\widehat{BDG}$

Χρωμάτισε με **κόκκινο** χρώμα τις γωνίες:

β) $\widehat{KBE}$ β) $\widehat{ADB}$ γ) $\widehat{KET}$

Άσκηση A2.2: Γράψε το όνομα της γωνίας.



Γράψε (με τρία γράμματα) το **όνομα της γωνίας** που έχει χρώμα:

α) **πορτοκαλί**:

β) **Πράσινο**:

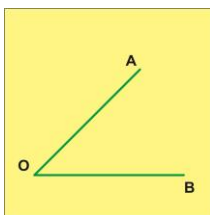
γ) **Μπλε**:

δ) **Κίτρινο**:

ε) **Καφέ**:

στ) **Μωβ**:

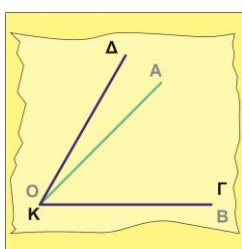
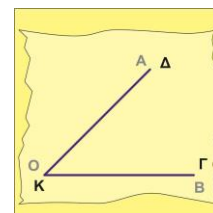
Δραστηριότητα A2.1: Σύγκριση γωνιών



Θέλουμε να συγκρίνουμε τη γωνία $\widehat{BOA}$ με μία γωνία $\widehat{ΓΚΔ}$. Τότε σκεφτόμαστε σαν να μεταφέρουμε τη γωνία $\widehat{Κ}$ πάνω στην $\widehat{Ο}$. Με τρόπο ώστε οι κορυφές Ο, Κ και οι πλευρές τους ΚΓ, ΟΑ να είναι η μία πάνω στην άλλη. Τι μπορεί να συμβεί τότε με τις άλλες πλευρές ΚΔ και ΟΒ;

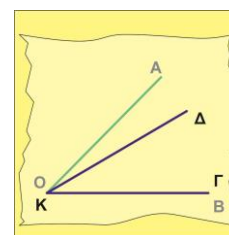
Συμπληρώστε τα κενά με την κατάλληλη λέξη (*ίσες, μικρότερη, μεγαλύτερη*) ή το κατάλληλο σύμβολο ($<, >, =$)

Α) Ή θα συμπίσει² και η άλλη πλευρά και τότε οι γωνίες θα είναι και γράφουμε $\widehat{ΑΟΒ} \dots \widehat{ΓΚΔ}$



Β) Ή θα «πέσει» στο εσωτερικό της $\widehat{Ο}$ και τότε η $\widehat{Κ}$ θα είναι της $\widehat{Ο}$ (μικρότερο «άνοιγμα») και γράφουμε $\widehat{ΑΟΒ} \dots \widehat{ΓΚΔ}$

Γ) Ή θα «πέσει» στο εξωτερικό της $\widehat{Ο}$ και τότε η $\widehat{Κ}$ θα είναι της $\widehat{Ο}$ (μεγαλύτερο «άνοιγμα») και γράφουμε $\widehat{ΑΟΒ} \dots \widehat{ΓΚΔ}$



Όταν δύο ευθείες τέμνονται και σχηματίζουν **4 ίσες γωνίες**, οι ευθείες λέγονται **κάθετες**. Η γωνία που σχηματίζεται λέγεται **ορθή γωνία**.



Οι καινούριες μου λέξεις

.....

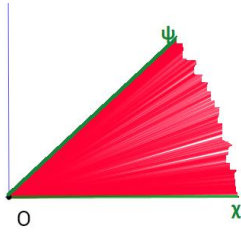
.....

.....

.....

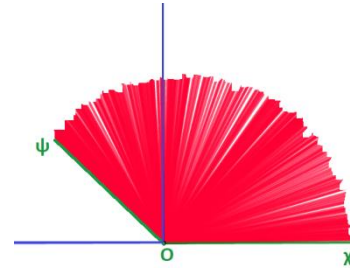
.....

² Συμπίσει = να πέσει η μία πάνω στην άλλη.



Κάθε γωνία μικρότερη από την ορθή λέγεται **οξεία γωνία**.

Κάθε γωνία μεγαλύτερη από την ορθής & μικρότερη από την ευθεία λέγεται **αμβλεία γωνία**.



Άσκηση Α.2.3: Τα είδη των γωνιών

Σχεδιάστε μία γωνία από κάθε είδος.

Μηδενική γωνία

Οξεία γωνία

Ορθή γωνία

Αμβλεία γωνία

Ευθεία γωνία

Μη-κυρτή γωνία

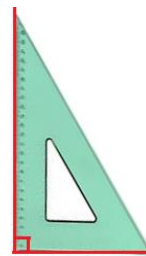
Πλήρης γωνία

A.3 – Η Απόσταση

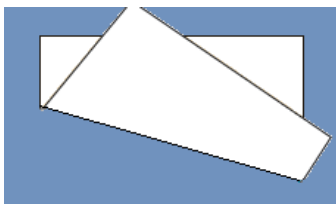
Κάθετη από... προς....

Για να σχεδιάσω σωστά μία ευθεία **κάθετη** σε μία άλλη χρησιμοποιώ ένα **ορθογώνιο τρίγωνο**. Το ορθογώνιο τρίγωνο έχει δύο πλευρές κάθετες που σχηματίζουν ορθή γωνία.

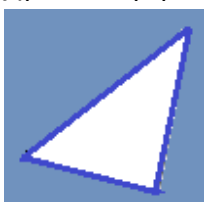
Αν δεν έχω, μπορώ να φτιάξω μία ορθή γωνία με ένα κομμάτι χαρτί.



Βήμα 1: Διπλώνω το χαρτί μία φορά



Βήμα 3: Αν θέλω, διπλώνω το υπόλοιπο χαρτί κατάλληλα ώστε να φτιάξω το σχήμα του τριγώνου.



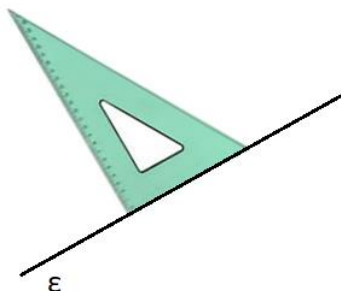
Βήμα 2:

Το ξαναδιπλώνω κατά μήκος της πρώτης τσάκισης. Η γωνία που έχει δημιουργεί είναι μία τέλεια ορθή γωνία.

Αν ξεδιπλώσουμε το χαρτί θα δούμε δύο ευθείες κάθετες!



Κάθετη **σε** σημείο **A** μιας ευθείας **ε**



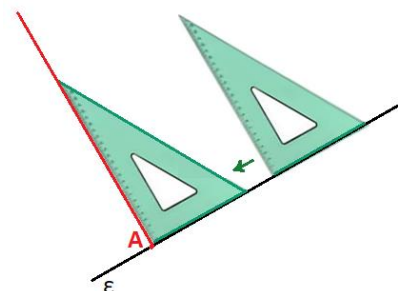
Έστω μία ευθεία ϵ . Θέλω να σχεδιάσω μία άλλη ευθεία ζ κάθετη στην ϵ .

Παίρνω το ορθογώνιο τρίγωνο και το τοποθετώ έτσι, ώστε η μία κάθετη πλευρά του (η μικρότερη) να «πέσει» πάνω στην ευθεία ϵ .

Πρέπει να ξέρω όμως και κάτι ακόμα.

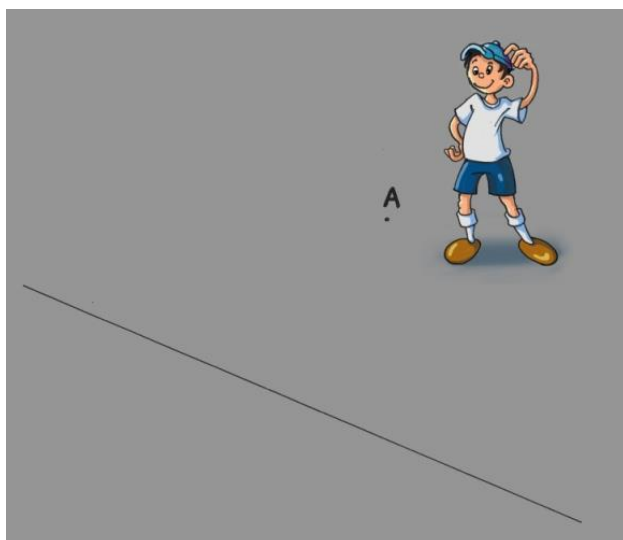
Σε ποιο σημείο της ευθείας ϵ θέλω να φέρω την κάθετη;

Έστω ότι θέλω **στο** σημείο **A**. Σέρνω το τρίγωνο πάνω στην ευθεία ϵ , μέχρι η γωνία του να συναντήσει το σημείο **A**. Τότε σχεδιάζω την κάθετη στην ϵ στο **A**.



Δραστηριότητα A3.1 (Απόσταση σημείου από ευθεία)

Συχνά υπολογίζουμε την πιο σύντομη διαδρομή για να φτάσουμε κάπου. Μπορείς να σχεδιάσεις για το παιδί, την πιο σύντομη διαδρομή προς το πεζοδρόμιο;

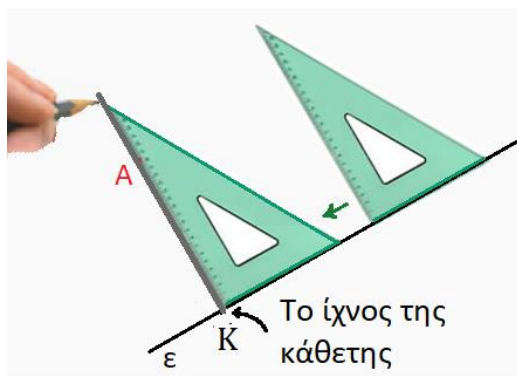
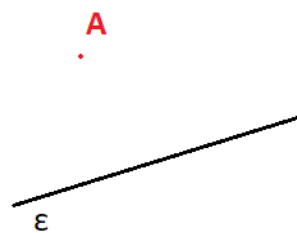


Το πρόβλημα είναι το ίδιο με το να βρούμε **την πιο μικρή απόσταση ενός σημείου από μία ευθεία**. Συζήτησε με την ομάδα σου και βρες τη λύση.

Κάθετη από σημείο A έξω από την ευθεία ε

Έχουμε μία ευθεία ε κι ένα σημείο A έξω από αυτήν.

Τοποθετούμε τον γνώμονα με την μία κάθετη πλευρά του πάνω στην ευθεία ε. Τον σέρνουμε πάνω στην ευθεία. Σταματάμε όταν η άλλη κάθετη πλευρά «πέσει» πάνω στο σημείο A. Σχεδιάζουμε την ευθεία στην άλλη κάθετη πλευρά του γνώμονα. Η κάθετη ευθεία τέμνει την ε στο K. Το σημείο K λέμε ότι είναι το **ίχνος της κάθετης**.

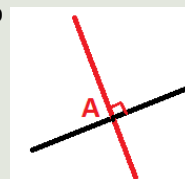


Από σημείο A έξω από την ευθεία ε μπορούμε να φέρουμε **μόνο μία κάθετη** προς αυτή.

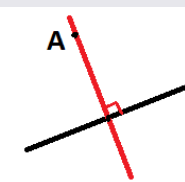
Το κάθετο τμήμα AK από το σημείο A προς την ευθεία ε είναι η πιο σύντομος δρόμος προς αυτήν. Το μήκος του κάθετου τμήματος AK το λέμε **απόσταση του σημείου από την ευθεία**.

Μία ευθεία δεν είναι κάθετη από μόνη της. Είναι πάντα κάθετη προς μία άλλη ευθεία...

... κάθετη σε κάποιο σημείο



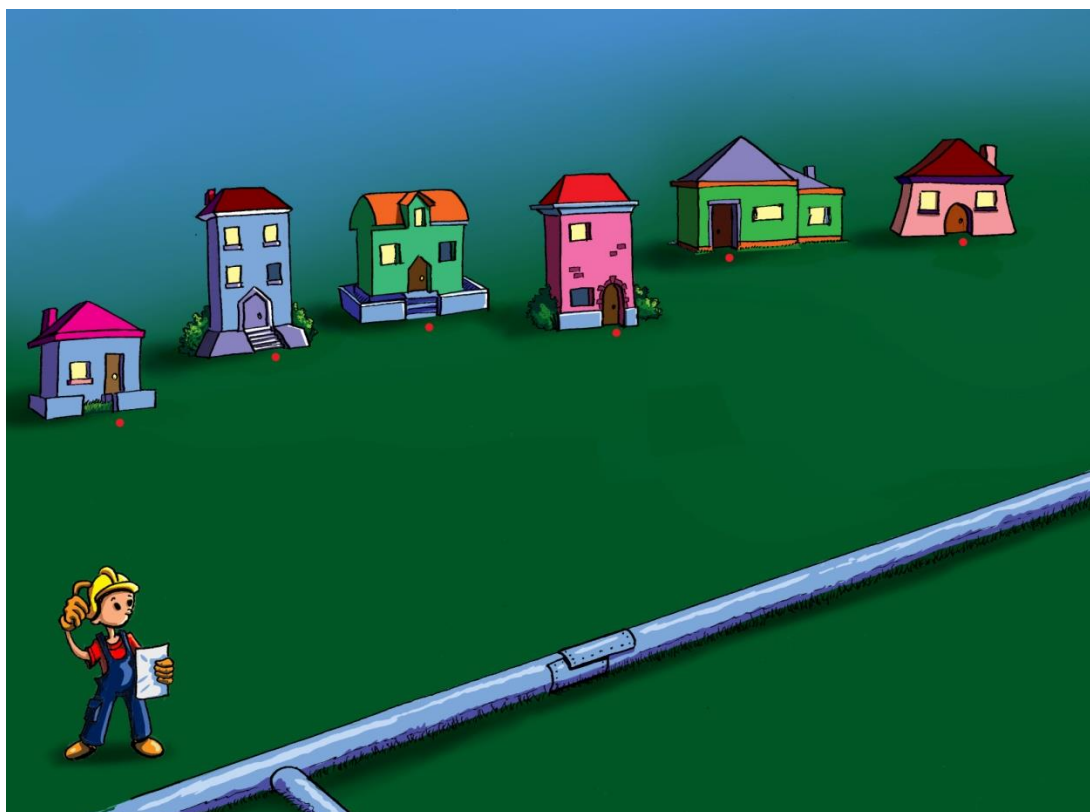
...ή κάθετη από κάποιο σημείο



Δραστηριότητα A3.2 (ομαδική) - Εξοικείωση με την κατασκευή κάθετης από σημείο προς ευθεία)

Τα σπίτια στην εικόνα θα συνδεθούν με τον σωλήνα νερού. Κάθε ιδιοκτήτης θα πληρώσει κάποια χρήματα. Τα χρήματα θα είναι ανάλογα με την απόσταση κάθε σπιτιού από τον σωλήνα. Το κόστος είναι 57€/m (στην εικόνα το 1cm αντιστοιχεί σε 1m).

1. Ποιος ιδιοκτήτης θα πληρώσει τα περισσότερα χρήματα;
2. Ποιος ιδιοκτήτης θα πληρώσει τα λιγότερα χρήματα;
3. Θα πληρώσουν κάποιοι ιδιοκτήτες τα ίδια χρήματα;

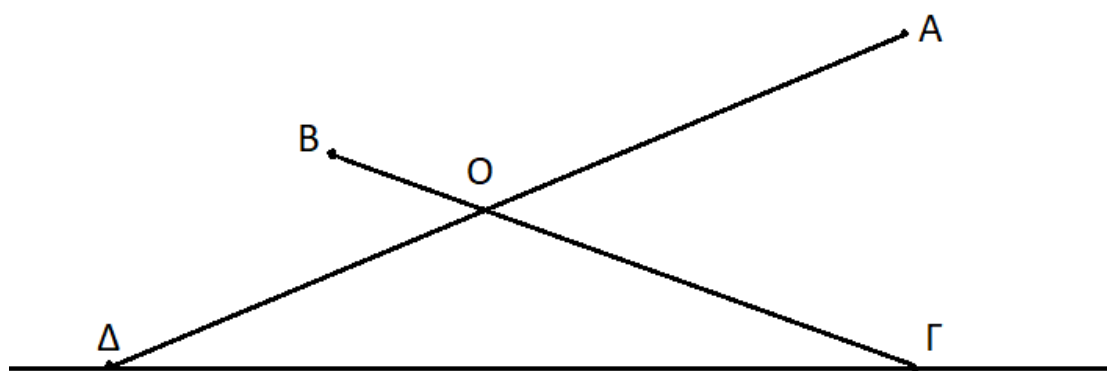


Σπίτι	Απόσταση από τον κεντρικό αγωγό	Κόστος σύνδεσης
A		
B		
Γ		
Δ		
E		
Z		

Για εξάσκηση

Στο παρακάτω σχήμα να φέρεις:

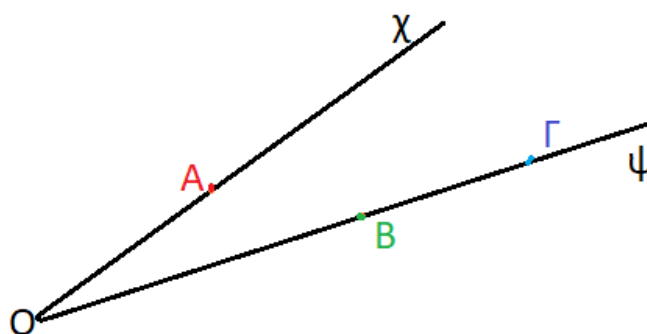
- i. Κάθετη από το Ο προς την ευθεία ΔΓ
- ii. Κάθετη από το Α προς την ευθεία ΒΓ
- iii. Κάθετη από το Α προς την ευθεία ΔΓ
- iv. Κάθετη από το Β προς την ευθεία ΔΑ
- v. Κάθετη από το Β προς την ευθεία ΔΓ
- vi. Κάθετη στην ΒΓ στο Β
- vii. Κάθετη στην ΔΑ στο Α



Κάθετη από... κάθετη στο...

Να σχεδιάσεις με τη βοήθεια του γνώμονα:

- A. Την κάθετη από το Β προς την Οψ.
- B. Την κάθετη από το Β προς την Οχ.
- Γ. Την κάθετη στην Οχ στο Γ.

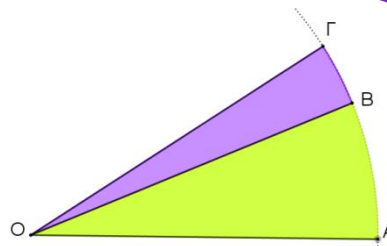


Α.4 –Πρόσθεση, αφαίρεση γωνιών

Τι κοινό έχουν οι γωνίες $\widehat{AOB}$ και $\widehat{BOΓ}$ στο διπλανό σχήμα;

.....

Τις γωνίες αυτές τις λέμε **εφεξής (διπλανές)**.



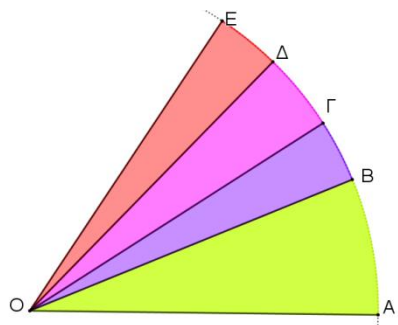
Τις διπλανές γωνίες μπορούμε να τις προσθέσουμε, δηλαδή:

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOΓ} = \widehat{AOG}$$

Αυτό ταυτόχρονα σημαίνει ότι: $\widehat{AOG} - \widehat{AOB} = \widehat{BOΓ}$

Όλα τα σημεία της γωνίας $\widehat{AOB}$ είναι και σημεία της $\widehat{AOG}$. Η $\widehat{AOB}$ είναι μέρος της $\widehat{AOG}$.

Πρόσθεση και Αφαίρεση Γωνιών



Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες με διαφορετικό χρώμα λέγονται **διαδοχικές**.

Τις διαδοχικές γωνίες μπορούμε να τις προσθέτουμε.

Οι προσθέσεις αυτές μας δείχνουν και τις αντίστοιχες αφαιρέσεις.

Συμπληρώστε τις ισότητες:

1. $\widehat{BOΓ} + \widehat{ΓΟΔ} = \underline{\hspace{2cm}}$

4. $\widehat{BOΔ} - \widehat{BOΓ} = \underline{\hspace{2cm}}$

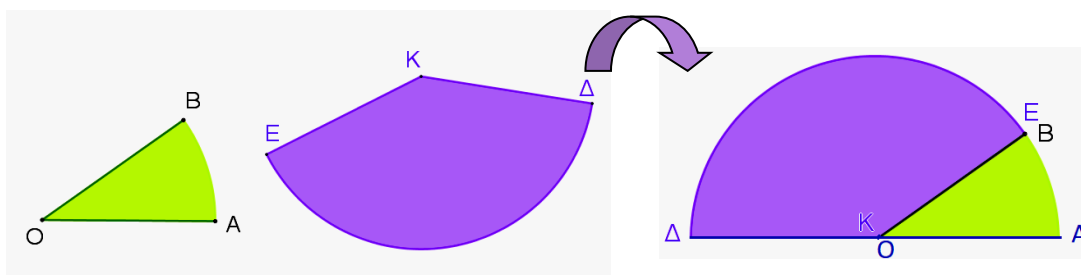
2. $\widehat{BOΔ} + \widehat{ΔΟΕ} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. $\widehat{BOΕ} - \widehat{BOΔ} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. $\widehat{BOΓ} + \widehat{ΓΟΕ} = \underline{\hspace{2cm}}$

6. $\widehat{BOΕ} - \widehat{ΓΟΕ} = \underline{\hspace{2cm}}$

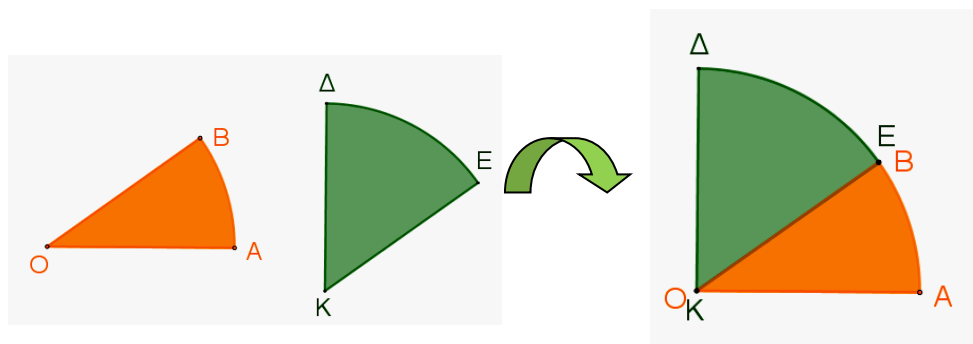
Δύο γωνίες που το άθροισμά τους είναι ευθεία γωνία λέγονται **παραπληρωματικές**.



Παραπληρωματικές γωνίες

Εφεξής & Παραπληρωματικές γωνίες

Δύο γωνίες που το άθροισμά τους είναι ορθή γωνία λέγονται **συμπληρωματικές**.



Συμπληρωματικές γωνίες

Εφεξής & Συμπληρωματικές γωνίες

Άσκηση :

A) Να σχεδιάσετε i) μία οξεία γωνία και ii) μία αμβλεία γωνία και μετά να σχεδιάσετε τις παραπληρωματικές τους.

B) Να σχεδιάσετε μία οξεία γωνία και μετά τη συμπληρωματική της.

Οι καινούριες μου λέξεις

A.5 – Ο Κύκλος



Ένα σχήμα που βλέπουμε συχνά γύρω μας είναι ο κύκλος.

Πώς σχεδιάζουμε έναν κύκλο;
Με το εργαλείο που λέγεται **διαβήτης**. Κρατάμε το ένα άκρο σταθερό και περιστρέφουμε το άλλο μέχρι να κάνουμε μία **πλήρη στροφή**.

Αυτό που κάνουμε λοιπόν όταν



σχεδιάζουμε τη γραμμή, είναι ότι **κρατάμε σταθερή απόσταση από ένα σημείο (το κέντρο)**.

Επομένως κύκλος είναι το σχήμα που όλα τα σημεία του απέχουν το ίδιο από ένα σημείο που το λέμε κέντρο του κύκλου.

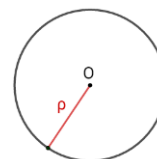
Δραστηριότητα A5.1

Σκεφτείτε και συζητήστε πώς θα σχεδιάζατε έναν κύκλο χωρίς διαβήτη

- A) Πάνω στο χώμα ή την άμμο
- B) Πάνω στον πίνακα με το χέρι σας
- Γ) Με το σώμα σας
- Δ) Με κάποιο άλλο αντικείμενο πάνω στο χαρτί.

Η απόσταση κάθε σημείου από το κέντρο λέγεται **ακτίνα** του κύκλου. Την ακτίνα τη συμβολίζουμε συνήθως με το γράμμα **ρ** .

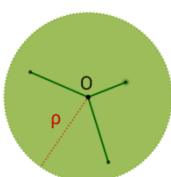
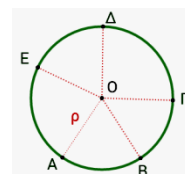
Όταν θέλουμε να μιλήσουμε για έναν κύκλο που έχει κέντρο το σημείο O και ακτίνα ρ , γράφουμε: **ο κύκλος (O, ρ)**.



Οι κύκλοι που έχουν ίσες ακτίνες, είναι ίσοι.

Ο κύκλος (O, ρ) επομένως χωρίζει τα σημεία του επιπέδου σε τρεις ομάδες:

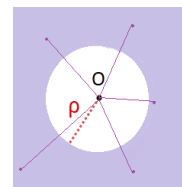
- A)** Τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το O απόσταση ίση με ρ . Αυτά είναι τα σημεία του κύκλου.



- B)** Τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το O απόσταση μικρότερη από ρ .

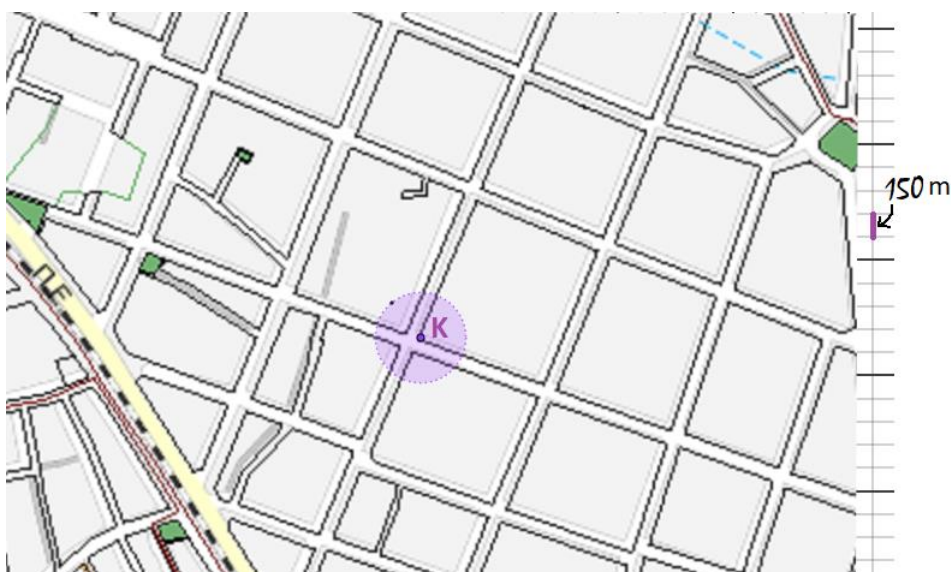
Την επιφάνεια που έχει τα όλα τα σημεία της ομάδας A) και της B) τη λέμε **κυκλικό δίσκο**.

Γ) Τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το O απόσταση μεγαλύτερη από ρ . Αυτά είναι τα εξωτερικά σημεία του κύκλου.

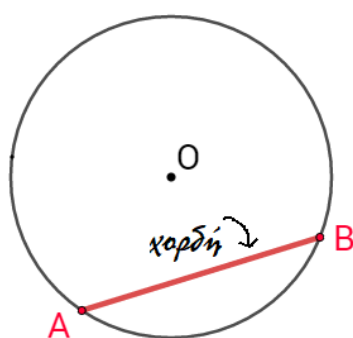


Δραστηριότητα A5.2 (Οι τόποι των σημείων που απέχουν απόσταση μικρότερη, μεγαλύτερη ή ίση με δοσμένο μήκος)

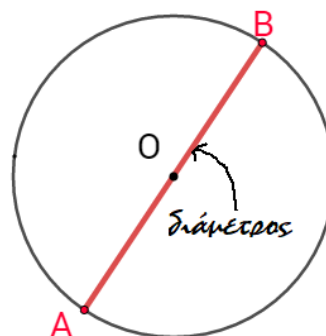
Στο σημείο K βρίσκεται μία κεραία κινητής τηλεφωνίας. Ο δήμος θέλει να χτίσει ένα σχολείο. Για την υγεία των παιδιών θα ήταν καλό να βρίσκεται σε απόσταση μεγαλύτερη των $300m$ από την κεραία. Για να έχει καλή σύνδεση θα ήταν καλύτερα να βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη των $1500m$ από την κεραία. Σε ποια περιοχή μπορεί να χτιστεί το σχολείο;



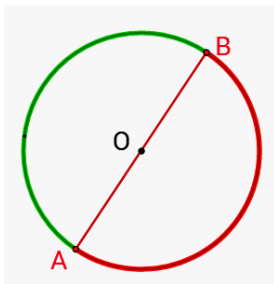
Ας γνωρίσουμε τον κύκλο λίγο καλύτερα



Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία πάνω στον κύκλο, το λέμε χορδή

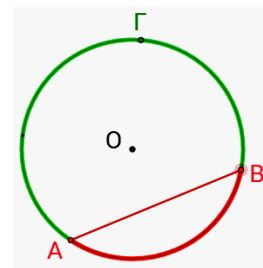


Τη χορδή που περνάει από το κέντρο του κύκλου, τη λέμε διάμετρο

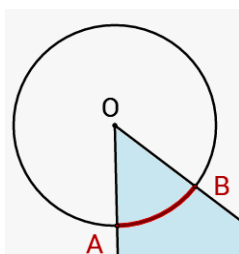


Τα άκρα A και B της διαμέτρου AB χωρίζουν τον κύκλο σε δύο ίσα κομμάτια. Κάθε ένα από αυτά το λέμε **ημικόκλιο**³.

Γενικά, δύο σημεία του κύκλου, χωρίζουν τον κύκλο σε δύο κομμάτια. Κάθε ένα από αυτά λέγεται **τόξο**. Το τόξο συμβολίζεται με $\widehat{AB}$. Για να ξεχωρίσουμε το μεγαλύτερο από τα δύο, βάζουμε κι ένα τρίτο σημείο και λέμε τόξο $\widehat{AGB}$.



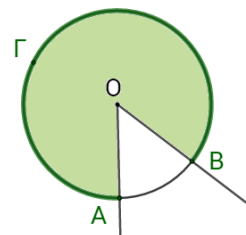
Επίκεντρη γωνία



Ας σχεδιάσουμε δύο ημιευθείες OA, OB, **με αρχή το κέντρο O** ενός κύκλου. Η γωνία $\widehat{AOB}$ που σχηματίζεται λέγεται **επίκεντρη γωνία**.

Οι πλευρές της επίκεντρης γωνίας $\widehat{AOB}$ «κόβουν» ένα κομμάτι από τον κύκλο, το τόξο $\widehat{AB}$. Το τόξο $\widehat{AB}$ το λέμε **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης γωνίας $\widehat{AOB}$.

Οι ίδιες ημιευθείες σχηματίζουν και την **μη-κυρτή γωνία** $\widehat{AOB}$. Το αντίστοιχο τόξο της μη-κυρτής γωνίας $\widehat{AOB}$ είναι το τόξο $\widehat{AGB}$.



- Κάθε τόξο κύκλου έχει μία και μοναδική αντίστοιχη επίκεντρη γωνία.
- Κάθε επίκεντρη γωνία ενός κύκλου έχει ένα και μοναδικό αντίστοιχο τόξο.

A.6 – Μέτρηση γωνίας & τόξου

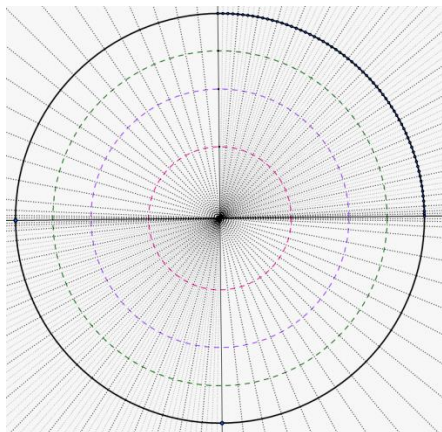
Για να μετρήσουμε μία γωνία χρειαζόμαστε μία μονάδα μέτρησης. Μονάδα μέτρησης της γωνίας είναι η **μοίρα**. Συμβολίζεται με **$^\circ$** .

Χωρίζουμε έναν κύκλο σε 360 ίσα κομμάτια. Κάθε ένα από αυτά τα κομμάτια, αντιστοιχεί σε μία και μοναδική επίκεντρη γωνία μίας μοίρας ή **1°** . Άρα **κάθε κύκλος είναι 360°** .

(η ακτίνα του κύκλου έχει σημασία; Συζητήστε στην τάξη).

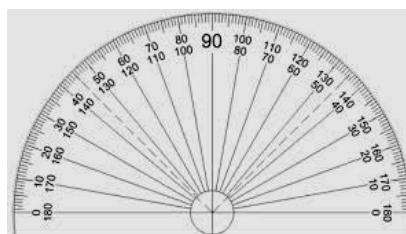
³ Ημικόκλιο: μισός κύκλος.

Συμπληρώστε στον πίνακα, το μέτρο της γωνίας που βρίσκεται στην αριστερή στήλη.



Η γωνία	Το μέτρο
Ορθή γωνία	
Ευθεία γωνία	
$1/6$ του κύκλου	
$1/3$ του κύκλου	
$1/8$ του κύκλου	
$1/12$ του κύκλου	

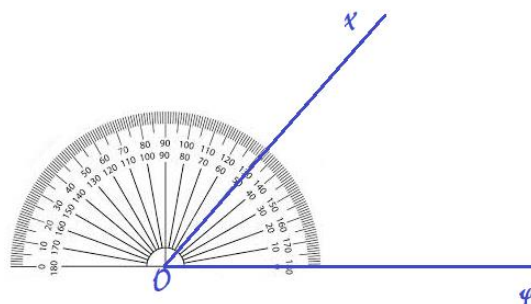
Το εργαλείο το οποίο χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε μία γωνία είναι το **μοιρογνωμόνιο**. Ένα ημικύκλιο χωρισμένο σε μοίρες.



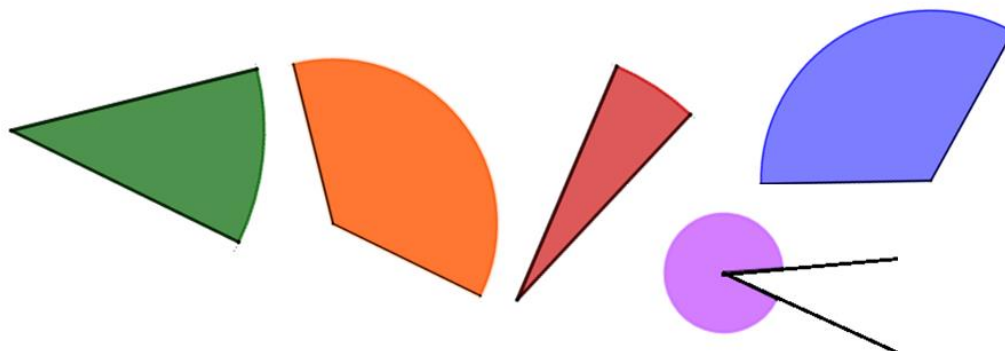
Πώς μετράμε μία γωνία;

Τοποθετούμε το μοιρογνωμόνιο με τέτοιο τρόπο ώστε:

1. Το κέντρο από το μοιρογνωμόνιο να είναι πάνω στην κορυφή της γωνίας.
2. Η μία πλευρά της γωνίας να είναι πάνω στην ευθεία που περνάει από το 0.
3. Ξεκινώντας από το 0, κοιτάμε τη μέτρηση που δείχνει η άλλη πλευρά της γωνίας.



ΑΣΚΗΣΗ: μπορείτε να μετρήσετε τις γωνίες στην παρακάτω εικόνα;

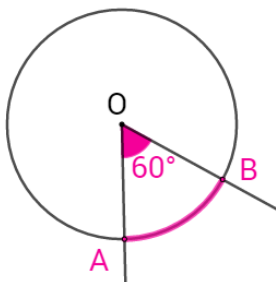


Μέτρηση τόξου

(Πώς μετράμε το τόξο ενός κύκλου;)

Κάθε τόξο έχει μία και μοναδική επίκεντρη γωνία.

Το μέτρο μιας επίκεντρης γωνίας είναι το ίδιο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της.



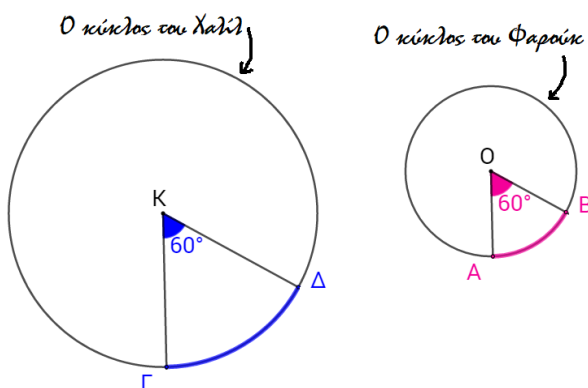
Άρα, μονάδα μέτρησης και του τόξου είναι οι μοίρες. Για παράδειγμα ένα τόξο που αντιστοιχεί σε μία γωνία 60° , λέμε ότι είναι κι αυτό 60° και γράφουμε $\widehat{AB} = 60^\circ$.

Δραστηριότητα A6.2 (Μία γνωστή παρανόηση μεταξύ μήκους και μέτρου τόξου)

Ο Χαλίλ και ο Φαρούκ σχεδίασαν έναν κύκλο και μία επίκεντρη γωνία 60° . Γίνεται ο παρακάτω διάλογος:

- Χαλίλ: Τα τόξα είναι ίσα!
- Φαρούκ: Όχι, δεν είναι ίσα! Πώς μπορεί να είναι ίσα; Δεν βλέπεις ότι το τόξο ΓΔ είναι μεγαλύτερο;
- Χαλίλ: Μα αφού και τα δύο είναι 60° !

Εσείς τι νομίζετε; Ποιος έχει δίκιο;



Το μέτρο ενός τόξου δείχνει τι μέρος (κλάσμα) του κύκλου είναι. Γι' αυτό μπορούμε να συγκρίνουμε τόξα μόνο όταν βρίσκονται στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους.

Ένας κύκλος είναι μία πλήρης γωνία. Μία πλήρης γωνία είναι 360° . Άρα **μία γωνία 60° είναι το $1/6$ του κύκλου** (σκέφτομαι: $6 \times 60^\circ = 360^\circ$ άρα $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$).

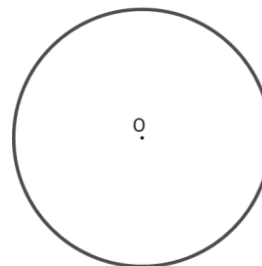
Γωνία σε μοίρες	Κλασματικό μέρος του κύκλου
90°	
180°	
30°	
45°	
120°	
270°	

Στον διπλανό πίνακα συμπλήρωσε τη δεξιά στήλη. Σε τι μέρος (κλάσμα) του κύκλου αντιστοιχεί η γωνία που βρίσκεται στην αριστερή στήλη;

Δραστηριότητα Α 6.1 (Διαμέριση κύκλου σε ίσα τόξα)

Να χωρίσετε τον παρακάτω κύκλο σε 4 ίσα κομμάτια

- A) με μοιρογνωμόνιο
B) χωρίς μοιρογνωμόνιο.



Ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε μία γωνία 35° . Μετά να σχεδιάσετε τη συμπληρωματική της.
2. Να σχεδιάσετε μία γωνία που είναι τα $\frac{2}{3}$ της ορθής.
3. Να σχεδιάσετε μία γωνία που είναι τα $\frac{4}{5}$ μιας ευθείας γωνίας.
4. Να σχεδιάσετε μία γωνία που είναι τα $\frac{3}{2}$ μιας ευθείας γωνίας.
5. Να σχεδιάσετε μία γωνία που είναι $\frac{5}{4}$ μιας ευθείας γωνίας.
6. Η γωνία $\hat{\alpha}$ είναι τριπλάσια μιας γωνίας $\hat{\beta}$. Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι και παραπληρωματικές. Μπορείτε να βρείτε ποιες είναι;

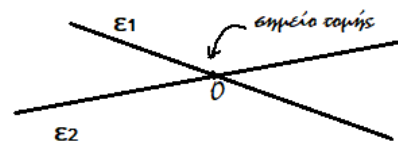
Δραστηριότητα Α6.3

- A) Να σχεδιάσετε έναν κύκλο στο τετράδιό σας και να τον χωρίσετε **σε 6 ίσα τόξα**. Να συγκρίνετε την ακτίνα του κύκλου με τη χορδή από κάθε τόξο. Τι παρατηρείτε;
- B) Με βάση αυτό που βρήκατε στην ερώτηση Α σκεφτείτε: μπορούμε να χωρίσουμε έναν κύκλο σε 6 ίσα τόξα, **χωρίς** μοιρογνωμόνιο;

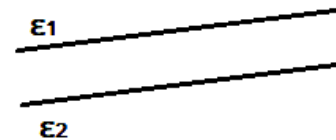
Α.7 – Ευθεία & ευθεία



ή

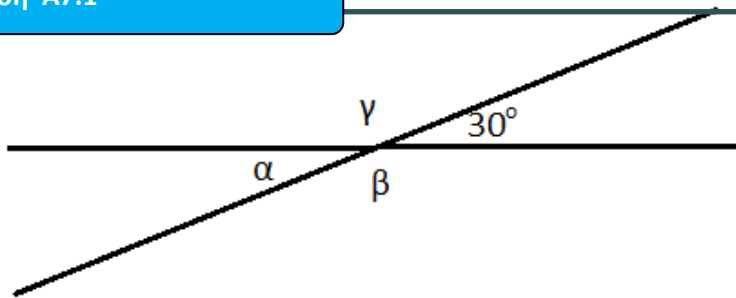


Δύο ευθείες στο επίπεδο ή τέμνονται και λέγονται **τεμνόμενες**



δεν τέμνονται όσο κι αν τις προεκτείνουμε και τότε λέγονται **παράλληλες** και γράφουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

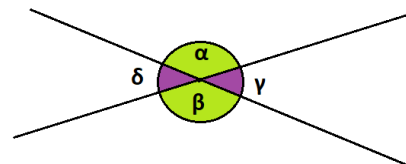
Άσκηση Α7.1



1. Είναι $\hat{\gamma} + 30^\circ = \dots\dots\dots$, άρα $\hat{\gamma} = \dots\dots\dots$
2. Είναι $\hat{\beta} + 30^\circ = \dots\dots\dots$, άρα $\hat{\beta} = \dots\dots\dots$
3. Μπορείς να βρεις τη γωνία $\hat{\alpha}$;
4. Τι παρατηρείς;

Δύο ευθείες που τέμνονται σχηματίζουν πάντα 4 γωνίες.

- Οι διπλανές (εφεξής), λέγονται $\dots\dots\dots$ γιατί σχηματίζουν ευθεία γωνία.
- Οι απέναντι, δηλαδή οι: $\hat{\alpha}$ με την $\hat{\beta}$ και οι $\hat{\gamma}$ με την $\hat{\delta}$ λέγονται **κατακορυφήν**.



Συμπληρώνω

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ λέγονται **κατακορυφήν** και είναι

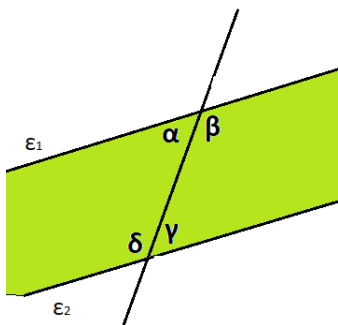
Οι γωνίες $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$ λέγονται και είναι

Άσκηση A7.2

Συμπλήρωσε τον πίνακα:

Γωνία $\hat{\omega}$	Παραπληρωματική της $\hat{\omega}$	Συμπληρωματική της $\hat{\omega}$
45°		
120°		
90°		
12°		
180°		

Γωνίες που σχηματίζονται από δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη ευθεία

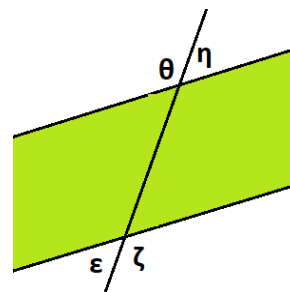


Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ($\varepsilon_1 // \varepsilon_2$) και η ευθεία ε τις τέμνει. Τότε σχηματίζονται 8 γωνίες.

Οι 4 γωνίες βρίσκονται μέσα στη ζώνη που σχηματίζουν οι δύο παράλληλες (πράσινη περιοχή) και λέγονται γωνίες **εντός**⁴. Είναι οι **γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$** .

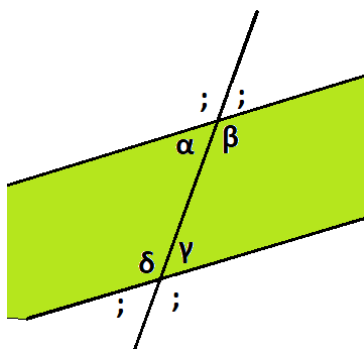
Οι άλλες 4 γωνίες βρίσκονται έξω από τη ζώνη (άσπρη περιοχή) και λέγονται γωνίες **εκτός**⁵. Είναι οι γωνίες $\hat{\varepsilon}, \hat{\zeta}, \hat{\eta}$ και $\hat{\theta}$.

Κάθε μία από αυτές όμως είναι κατακορυφήν με μία γωνία εντός (άρα και ίση).



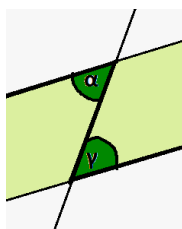
⁴ Εντός = μέσα.

⁵ Εκτός = έξω.



Δραστηριότητα A7.1

Για να δείξουμε πάνω στο σχήμα ότι δύο γωνίες είναι ίσες τους δίνουμε το ίδιο όνομα. Μπορείς να **συμπληρώσεις** το κατάλληλο όνομα στις γωνίες **εκτός**; (το όνομα θα πρέπει να είναι το ίδιο με το όνομα της ίσης γωνίας)

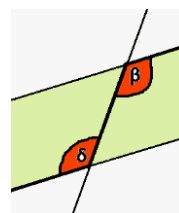


Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\gamma}$ λέγονται **εντός κι εναλλάξ** και είναι **ίσες**.

$$\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$$

Οι γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$ λέγονται **εντός κι εναλλάξ** και είναι **ίσες**.

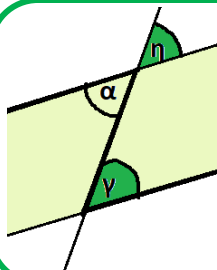
$$\hat{\beta} = \hat{\delta}$$



Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\eta}$ είναι **κατακορυφήν** και είναι ίσες. $\hat{\alpha} = \hat{\eta}$

Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\gamma}$ είναι **εντός κι εναλλάξ** και είναι ίσες. $\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$

Επομένως θα είναι και $\hat{\gamma} = \hat{\eta}$



Οι γωνίες $\hat{\gamma}$ και $\hat{\eta}$ λέγονται **εντός-εκτός κι επί τα' αυτά⁶** και είναι ίσες.

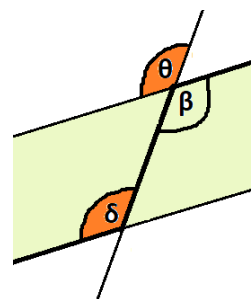
$$\hat{\gamma} = \hat{\eta}$$

Άσκηση A7.1: Συμπλήρωσε τις παρακάτω προτάσεις.

Οι γωνίες $\hat{\delta}$ και $\hat{\theta}$ λέγονται
και είναι

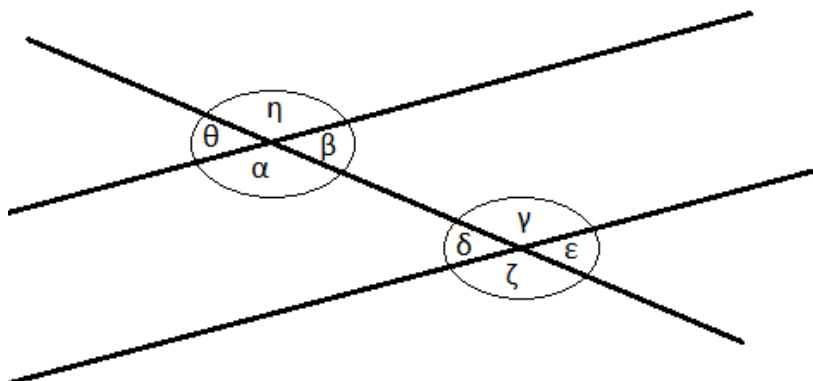
Οι γωνίες $\hat{\delta}$ και $\hat{\beta}$ λέγονται
και είναι

Οι γωνίες $\hat{\theta}$ και $\hat{\beta}$ λέγονται και είναι



⁶ **Εντός-εκτός κι επί τα' αυτά:** σημαίνει ότι η μία είναι **εντός**, η άλλη είναι **εκτός** αλλά και οι δύο είναι **από την ίδια μεριά**.

Δραστηριότητα A7.2: Ας **χρωματίσουμε** τις ίσες γωνίες **με το ίδιο χρώμα**. Πόσα χρώματα θα χρειαστείς;



Υπάρχουν 4 οξείες + 4 αμβλείες = 8 γωνίες.

Όλες οι οξείες γωνίες στο σχήμα είναι και όλες οι αμβλείες γωνίες είναι επίσης

Η οξεία γωνία και η αμβλεία γωνία σ' αυτό το σχήμα είναι

Κατασκευή ευθείας παράλληλης σε άλλη ευθεία

Να σχεδιάσετε μία ευθεία ε. Μετά να σχεδιάσετε μία άλλη ευθεία **παράλληλη** στην ε. Πώς θα είστε σίγουροι ότι η ευθεία που σχεδιάσατε είναι πραγματικά παράλληλη; Η παρακάτω πρόταση θα σας βοηθήσει να βρείτε τον τρόπο.

Αν δύο ευθείες είναι κάθετες στην ίδια ευθεία, τότε είναι παράλληλες.

Οι καινούριες μου λέξεις

.....

.....

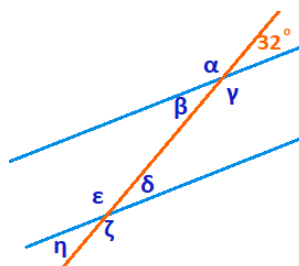
.....

.....

.....

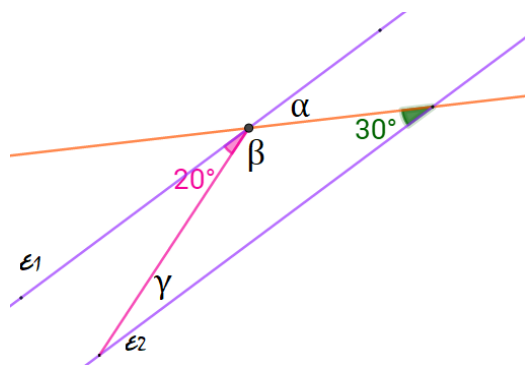
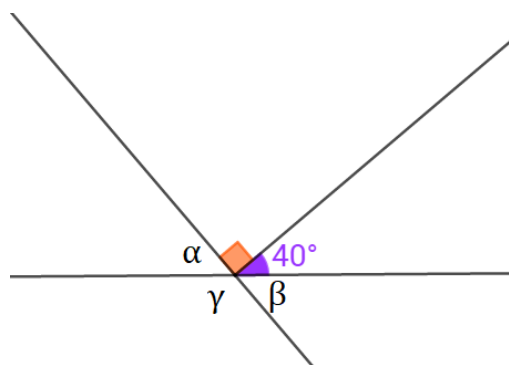
Άσκηση A7.1

Βρες τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\epsilon}$, $\hat{\zeta}$ και $\hat{\eta}$ στο διπλανό σχήμα.



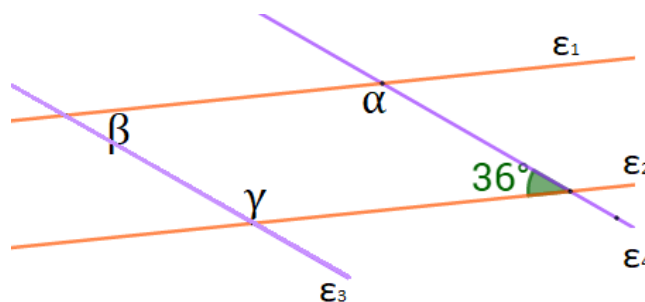
Ασκήσεις

Μπορείτε να βρείτε τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$ στα παρακάτω σχήματα;



Οι ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 είναι παράλληλες ($\epsilon_1 // \epsilon_2$)

Ισχύει: $\epsilon_1 // \epsilon_2$
και
 $\epsilon_3 // \epsilon_4$

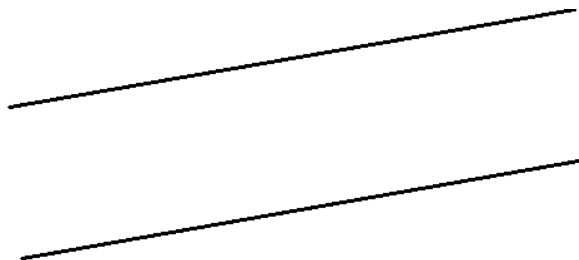


Απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών

Δραστηριότητα A7.3



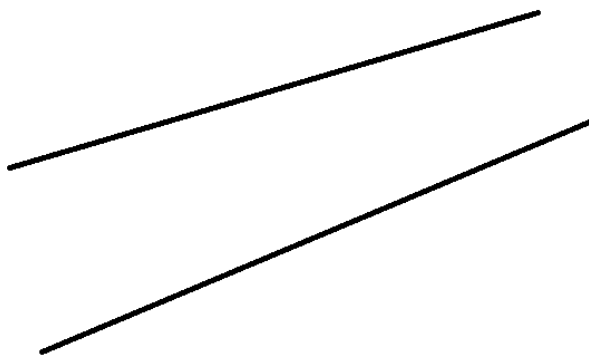
Ο Χαλίλ και η Μαρία μέτρησαν το πλάτος από το δρομάκι μπροστά στο σπίτι τους αλλά βρήκαν διαφορετικά αποτελέσματα. Το πρόβλημα είναι ίδιο με το να βρει κάποιος την απόσταση μεταξύ των δύο παραλλήλων ευθειών.



Πώς θα βρίσκατε εσείς την απόσταση αυτών των παραλλήλων; Συζητήστε με την ομάδα σας. Η απόσταση αυτή θα αλλάξει εάν προεκτείνουμε κι άλλο τα τμήματα που βλέπετε;

Δραστηριότητα A7.4

Οι ευθείες στο διπλανό σχήμα είναι παράλληλες ή όχι; Πώς το σκεφτήκατε;



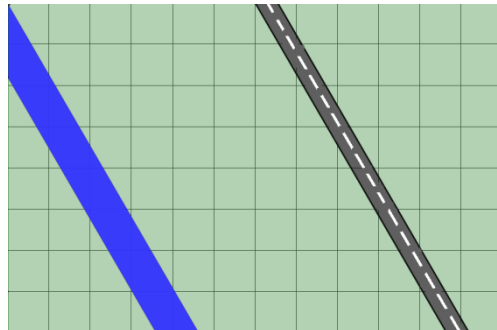
Όταν δύο ευθείες είναι παράλληλες, η απόστασή τους μένει

Για να βρούμε την απόσταση μεταξύ δύο παραλλήλων ευθειών μετράμε

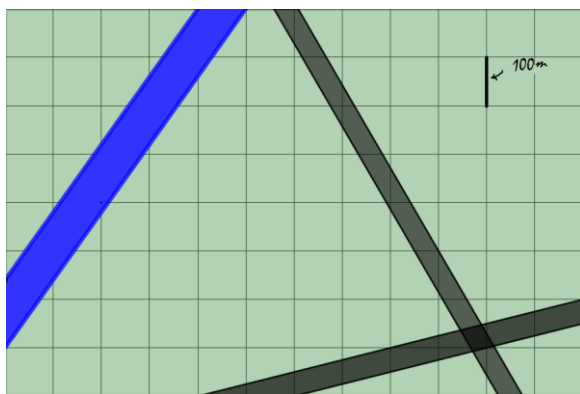
.....

Δραστηριότητα A7.5 (η ιδέα της μεσοπαράλληλης)

Ο Φάνης θέλει να περπατήσει **παράλληλα** με το ποτάμι και με το δρόμο. Θέλει όμως να έχει την ίδια απόσταση και από τα δύο. Μπορείτε να σχεδιάσετε τη διαδρομή που πρέπει να ακολουθήσει;



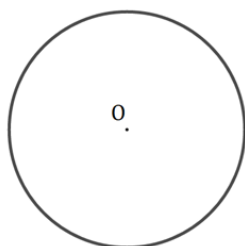
Δραστηριότητα A7.6



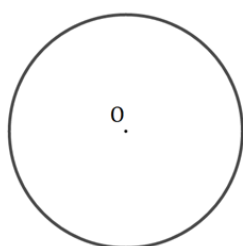
(Η παράλληλη ως γεωμετρικός τόπος των σημείων που απέχουν σταθερή απόσταση από δοσμένη ευθεία-Κατασκευή παράλληλης σε γνωστή απόσταση)

Ο Χαλίλ και η Μαριάμ θέλουν να στήσουν μία σκηνή που να απέχει πάνω από 200m από το ποτάμι και πάνω από 300m από κάθε δρόμο. Μπορείτε να τους δείξετε σε ποια περιοχή πρέπει να στήσουν τη σκηνή;

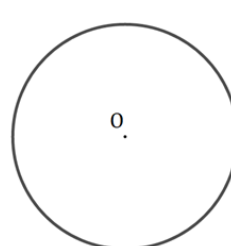
A.8 – Ευθεία & Κύκλος



σχήμα 1



σχήμα 2



σχήμα 3

Α) Πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει μία ευθεία με έναν κύκλο; Μπορεί να έχει τρία κοινά σημεία;

Β) Σχεδιάστε μία ευθεία ϵ που να έχει **δύο κοινά σημεία** με τον κύκλο (σχήμα 1).

Γ) Σχεδιάστε μία ευθεία ϵ που έχει **ένα μόνο κοινό σημείο** με τον κύκλο (σχήμα 2).

Δ) Σχεδιάστε μία ευθεία ϵ που δεν έχει **κανένα κοινό σημείο** με τον κύκλο (σχήμα 3).

Ε) Σχεδιάστε σε κάθε περίπτωση την **απόσταση του κέντρου O από την ευθεία ϵ** $d(O, \epsilon)$.

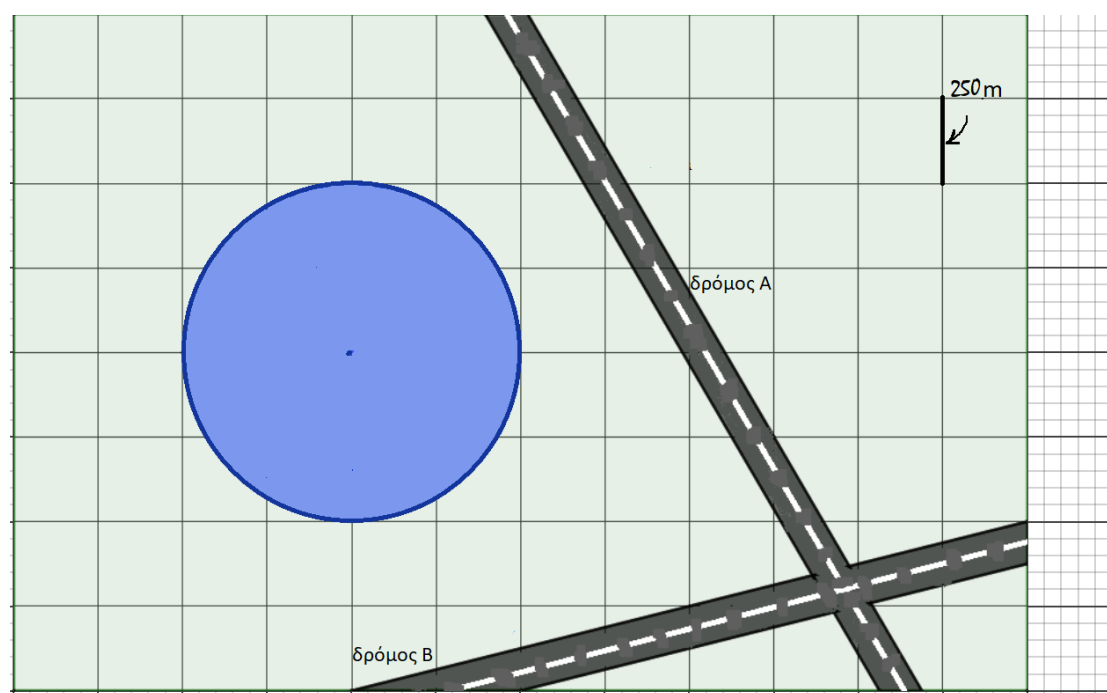
Η ευθεία στο σχήμα 1 λέγεται **τέμνουσα** και τότε $d(O, \epsilon) \dots \rho$ ($<$, $>$ ή $=$)

Η ευθεία στο σχήμα 2 λέγεται **εφαπτομένη** και τότε $d(O, \epsilon) \dots \rho$ ($<$, $>$ ή $=$)

Η ευθεία στο σχήμα 3 λέγεται **εξωτερική** και τότε $d(O, \epsilon) \dots \rho$ ($<$, $>$ ή $=$)

Δραστηριότητα A8.1

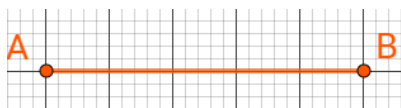
(Αναγνώριση των ζητούμενων τόπων και των τομών τους)



- A.** Ποια σημεία στην άκρη της λίμνης (μπλε κύκλος) απέχουν 1km από τον δρόμο B;
- B.** Ποιο σημείο της άκρης της λίμνης βρίσκεται πιο κοντά α) στον δρόμο A β) στον δρόμο B;
- Γ.** Σε ποια περιοχή της λίμνης πρέπει να βρίσκεται κάποιος, για να απέχει **περισσότερο από 750m** από τον δρόμο A;
- Δ.** Η Νάντια θέλει να φτιάξει ένα μαγαζί που να απέχει:
- από τη λίμνη, περισσότερο από 400m και λιγότερο από 800m,
 - από τον δρόμο A, περισσότερα από 400m και
 - από τον δρόμο B, περισσότερο από 350m.
- Μπορείτε να χρωματίσετε την κατάλληλη περιοχή;

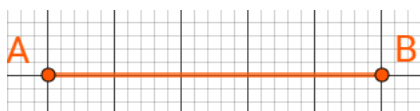
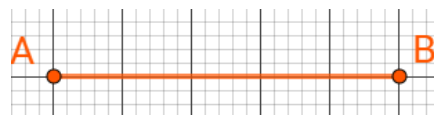
A.9 – Κύκλος & Κύκλος

Το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει μήκος 5.



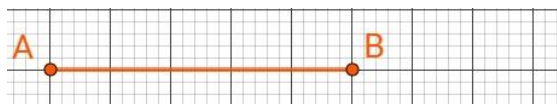
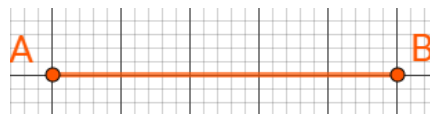
A) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (A, 4) και τον κύκλο (B, 3).

B) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (A, 3) και τον κύκλο (B, 2).



Γ) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (A, 5) και (B, 2).

Δ) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (A, 2) και (B, 1).



Ε) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (A, 8) και τον κύκλο (B, 2).

Πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει ένας κύκλος με έναν άλλον κύκλο; Μπορεί να έχουν τρία κοινά σημεία;

Περίπτωση Α: οι δύο κύκλοι **τέμνονται** κι έχουν τότε (πόσα;) κοινά σημεία.

Περίπτωση Β: οι δύο κύκλοι **εφάπτονται** κι έχουν κοινό σημείο.

Περίπτωση Γ: οι δύο κύκλοι **εφάπτονται** κι έχουν κοινό σημείο.

Περίπτωση Δ: ο ένας κύκλος είναι **έξω από τον άλλο** και έχουν

Περίπτωση Ε: ο ένας κύκλος είναι **μέσα στον άλλο** και έχουν

Σε κάθε περίπτωση, **να συγκρίνετε** το μήκος του AB (το τμήμα που ενώνει τα κέντρα των κύκλων) με το άθροισμα $r_1 + r_2$ ή με τη διαφορά $r_1 - r_2$. Μπορείτε να βρείτε τι πρέπει να συμβαίνει ώστε: α) οι δύο κύκλοι να **τέμνονται**; β) οι δύο κύκλοι να **εφάπτονται εξωτερικά** και γ) ο ένας να είναι **έξω από τον άλλο**;

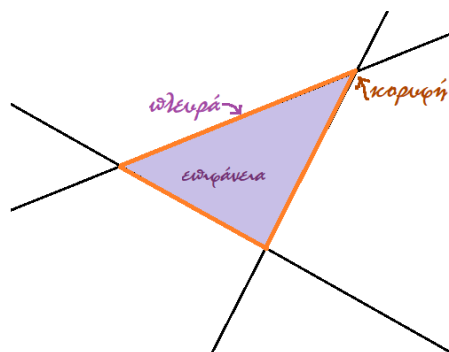
A.10 – Τρίγωνα

Δραστηριότητα A10.1 (Ομαδική-Σχετική θέση 3 ευθειών)

Σχεδιάστε 3 ευθείες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορείτε να το κάνετε;
 Ποια περίπτωση από αυτές βλέπετε πιο συχνά γύρω σας;

Στην περίπτωση που 3 ευθείες τέμνονται ανά δύο, δημιουργείται ένα σχήμα που λέγεται **τρίγωνο**. Το σχήμα αυτό έχει **3 πλευρές**, **3 γωνίες**, **3 κορυφές** και **μία επιφάνεια** (το μέρος του επιπέδου που περικλείεται από τις πλευρές του).

Το τρίγωνο είναι το πιο απλό ευθύγραμμο **σχήμα**.
 Ανήκει στη μεγάλη οικογένεια των **πολυγώνων**.
 Έχει τις λιγότερες πλευρές.



Δραστηριότητα A10.2 (Ομαδική – Διαισθητική προσέγγιση της τριγωνικής ανισότητας)



Μια μέρα ο Φάνης βρήκε κάποια ξυλάκια στο χώμα. Άρχισε να παίζει με αυτά και να φτιάχνει σχήματα. Στην αρχή έφτιαξε ένα τρίγωνο. Ήθελε όμως να έχει περισσότερα ξυλάκια κι έτσι έσπασε μερικά. Αλλά μετά, όταν πήγε να φτιάξει ένα καινούριο τρίγωνο... δεν μπορούσε! Και τότε άρχισε να σκέφτεται το γιατί...



Μετά από λίγη ώρα έβγαλε ένα συμπέρασμα. **Μπορείτε να βρείτε ποιο είναι το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε ο Φάνης;**



Αν δεν έχετε πρόχειρα κάποια ξυλάκια, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε κάτι άλλο, καλαμάκια, μολύβια, κ.ά.

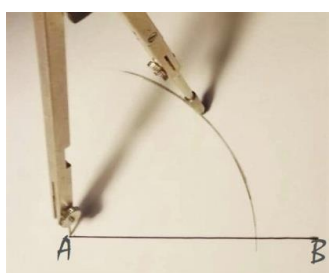
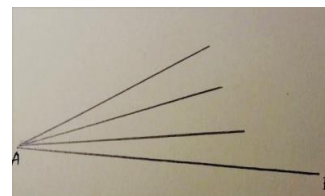
Μπορούμε όμως να το σκεφτούμε γεωμετρικά και να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία που έχουμε για τη γεωμετρία. Τον κανόνα και τον διαβήτη. Το πρόβλημα είναι το ίδιο με το παρακάτω:

Δραστηριότητα A10.3 : Κατασκευή τριγώνου με πλευρές α , β και γ .

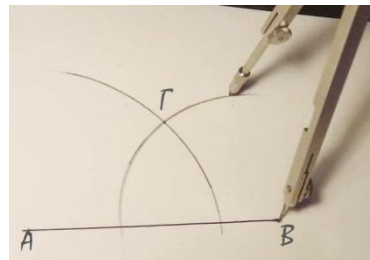
Ας πούμε ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε πάνω στο χαρτί ένα τρίγωνο που να έχει **μήκη πλευρών $\alpha = 5\text{cm}$, $\beta = 6\text{cm}$ και $\gamma = 8\text{cm}$** ; Πώς θα το κάνουμε;



Εύκολα σχεδιάζουμε τη μία από τις πλευρές. Ας ξεκινήσουμε με τη μεγαλύτερη και ας την πούμε AB. Μετά θέλουμε να σχεδιάζουμε την επόμενη, την AG. Αλλά δεν ξέρουμε πού ακριβώς... Γι' αυτό σχεδιάζουμε **όλες τις δυνατές θέσεις που απέχουν από το A απόσταση ίση με αυτή που θέλουμε**.



Σχεδιάζουμε επομένως **έναν κύκλο! Με κέντρο το A και ακτίνα ίση με $\beta = 6\text{cm}$. Και μετά έναν κύκλο με κέντρο B και ακτίνα ίση με $\alpha = 5\text{cm}$** . Το σημείο τομής τους είναι η τρίτη κορυφή του τριγώνου. Το σημείο αυτό απέχει απόσταση 6cm από την κορυφή A και 5cm από τη κορυφή B. Το ABΓ είναι αυτό που θέλαμε.

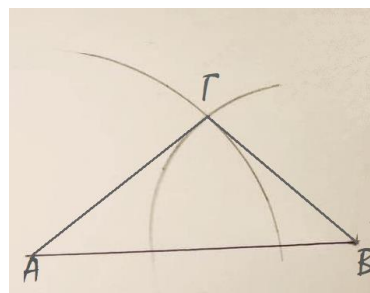


Προσπαθήστε τώρα να φτιάξετε τρίγωνο που να έχει πλευρές:

A) $\alpha = 8\text{cm}$, $\beta = 4\text{cm}$ και $\gamma = 3\text{cm}$.

B) $\alpha = 8\text{cm}$, $\beta = 5\text{cm}$ και $\gamma = 3\text{cm}$.

Τι είδατε; Βγάλατε συμπέρασμα;



Άσκηση Α10.1

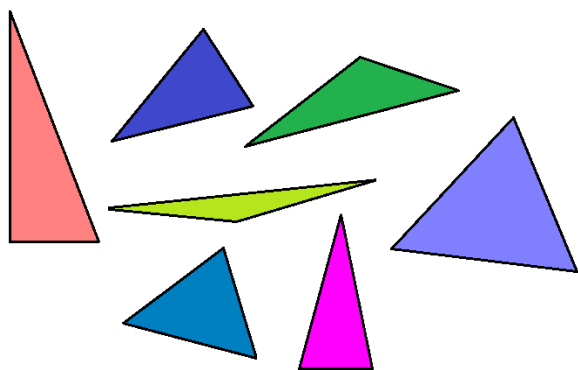
Να δείτε εάν υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών:

α) $\alpha = 5\text{cm}$, $\beta = 3\text{cm}$ και $\gamma = 3\text{cm}$ β) $\alpha = 5\text{cm}$, $\beta = 5\text{cm}$ και $\gamma = 5\text{cm}$

γ) $\alpha = 7\text{cm}$, $\beta = 4\text{cm}$ και $\gamma = 3\text{cm}$ δ) $\alpha = 6\text{cm}$, $\beta = 3\text{cm}$ και $\gamma = 2\text{cm}$

ε) $\alpha = 7\text{cm}$, $\beta = 4\text{cm}$ και $\gamma = 4\text{cm}$

κι εάν υπάρχει, να το κατασκευάσετε.

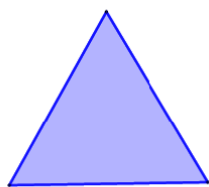


Ίσως να προσέξατε ότι υπάρχουν διαφορετικά είδη τριγώνων.

Οι μαθηματικοί ταξινόμησαν τα διαφορετικά είδη τριγώνων σε δύο ομάδες, με βάση:

α) τις πλευρές τους β) τις γωνίες τους.

Ταξινόμηση των τριγώνων με βάση τις πλευρές τους



Ισόπλευρο

Όλες οι πλευρές του είναι **ίσες**



Ισοσκελές

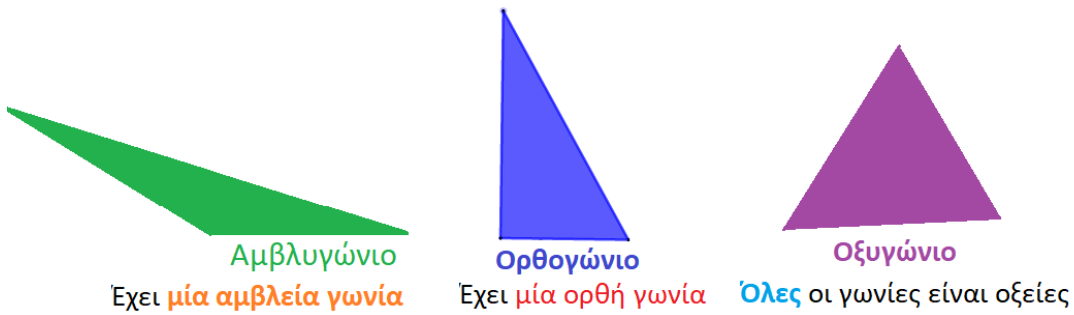
Οι **δύο** πλευρές του είναι **ίσες**



Σκαληνό

Όλες οι πλευρές του είναι **άνισες**

Ταξινόμηση των τριγώνων με βάση τις γωνίες τους



Άσκηση Α10.2 : Κατασκευή ισοσκελούς τριγώνου

- Σχεδιάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB μήκος 3cm .
 - Σχεδιάστε τον κύκλο $(A, 5\text{cm})$ και τον $(B, 5\text{cm})$.
 - Ονομάστε τα σημεία τομής των δύο κύκλων Γ και Δ .
 - Σχεδιάστε τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$, $B\Gamma$ και $A\Delta$, $B\Delta$.
- Τι τρίγωνο είναι το $AB\Gamma$; Τι τρίγωνο είναι το $AB\Delta$;**

Άσκηση Α10.3 : Κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου

- Να κατασκευάσετε ένα ισοπλευρο τρίγωνο με πλευρά $a = 5\text{cm}$.
- Να κατασκευάσετε ένα ισοπλευρο τρίγωνο τυχαίας πλευράς.

Απαντήστε στις ερωτήσεις

- Υπάρχει τρίγωνο που να έχει **δύο** αμβλείες γωνίες;
Αν ναι, να το σχεδιάσετε. Αν όχι να εξηγήσετε γιατί.
- Υπάρχει τρίγωνο που να έχει **δύο** ορθές γωνίες;
Αν ναι, να το σχεδιάσετε, αν όχι να εξηγήσετε γιατί.

Δραστηριότητα Α10.4 : Τα είδη των τριγώνων

- Δεν μπορεί ένα τρίγωνο να ανήκει και στις δύο ομάδες ταυτόχρονα; αναρωτήθηκε η Νάντια.
- Δηλαδή; Ρώτησε ο Χαλίλ.
- Να, για παράδειγμα ένα τρίγωνο να είναι **και** ισοσκελές **και** ορθογώνιο.
- Χμ... σκέφτηκε για λίγο ο Χαλίλ. Γίνεται νομίζω. Αλλά δεν είμαι σίγουρος ότι γίνεται για όλους τους συνδυασμούς.

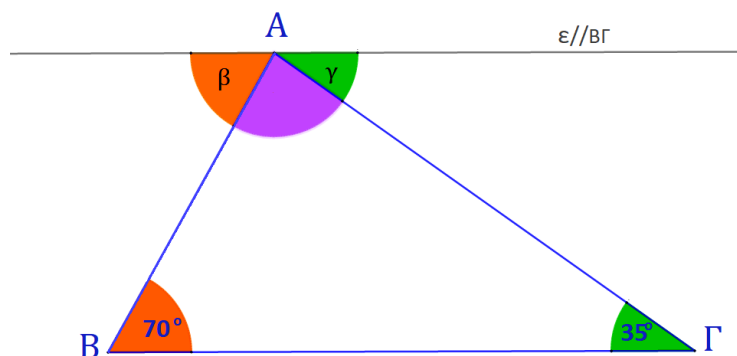
Τα παιδιά σκέφτηκαν όλους τους συνδυασμούς με τη βοήθεια ενός πίνακα. Και προσπάθησαν να τα κατασκευάσουν. Μετά από αρκετή ώρα κατέληξαν ότι κάποια από αυτά **δεν υπάρχουν**. Έτσι σημείωσαν με  τα κουτάκια που

	Σκαληνό	Ισοσκελές	Ισόπλευρο
Οξυγώνιο			
Ορθογώνιο			
Αμβλυγώνιο			

αντιστοιχούν σε τρίγωνα που υπάρχουν και με  τα κουτάκια που αντιστοιχούν σε τρίγωνα που δεν υπάρχουν. Εσείς; Μπορείτε να βρείτε ποια υπάρχουν και ποια όχι; Σχεδιάστε ένα από κάθε είδος που υπάρχει.

§ A.11 – Άθροισμα γωνιών Τριγώνου

Δραστηριότητα A11.1



Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε είναι παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ του τριγώνου.

Ξέρουμε τις δύο γωνίες του τριγώνου, $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{C} = 35^\circ$.

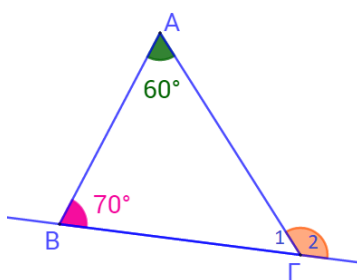
1. Τι σχέση έχει η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου με την $\hat{\beta}$; Μπορείς να βρεις τη γωνία $\hat{\beta}$;
2. Τι σχέση έχει η γωνία $\hat{C}$ του τριγώνου με τη $\hat{\gamma}$; Μπορείς να βρεις τη γωνία $\hat{\gamma}$;
3. Είναι $\hat{A} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = \dots\dots\dots$ Μπορείς να βρεις τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου;
4. Τι συμπέρασμα βγάζεις για το άθροισμα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ των γωνιών του τριγώνου;

Σκέψου: Το άθροισμα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$ θα άλλαζε αν ήταν διαφορετικές οι γωνίες B και C ;

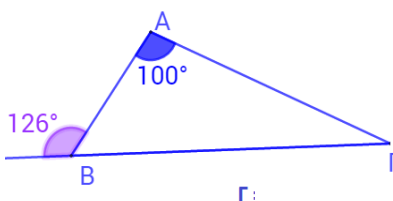
Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου $AB\Gamma$, είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \dots\dots\dots$

Άσκηση A11.1

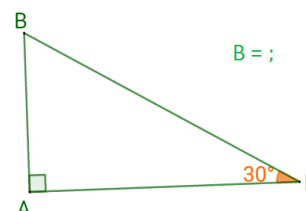
Στα παρακάτω σχήματα να βρείτε τις γωνίες που σας ζητάει



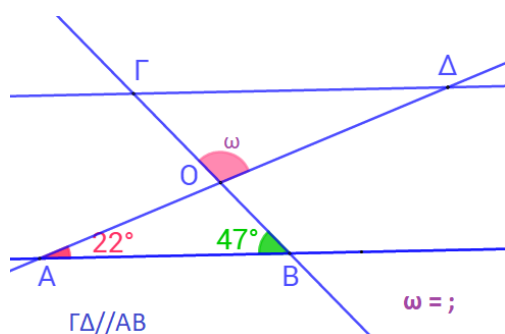
$\Gamma_2 = ;$



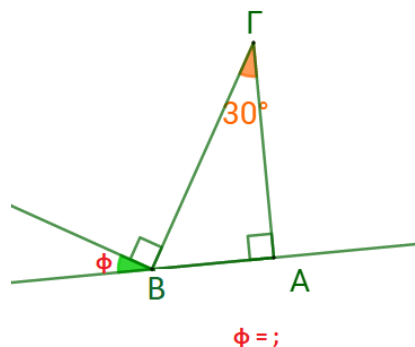
$\Gamma_3 = ;$



$B = ;$



$\omega = ;$



$\phi = ;$