ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο $BCDE$, τέτοιο ώστε: $BE \parallel AM$ και $BE = \frac{AM}{2}$ Να αποδειχθεί ότι η ευθεία EM περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AD.

Πρόβλημα 2
Έστω p πρώτος και m θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (p,m) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p(p+m)+p=(m+1)^3.$$

Πρόβλημα 3
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3=\frac{z}{y}-\frac{2y}{z},\ y^3=\frac{x}{z}-\frac{2z}{x},\ z^3=\frac{y}{x}-\frac{2x}{y}.$$

Πρόβλημα 4.
Βάφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ...,20 με δύο χρώματα άσπρο και μαύρο έτσι, ώστε να χρησιμοποιούνται και τα δύο χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χρωματισμός ώστε το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις θεμάτων μικρών τάξεων

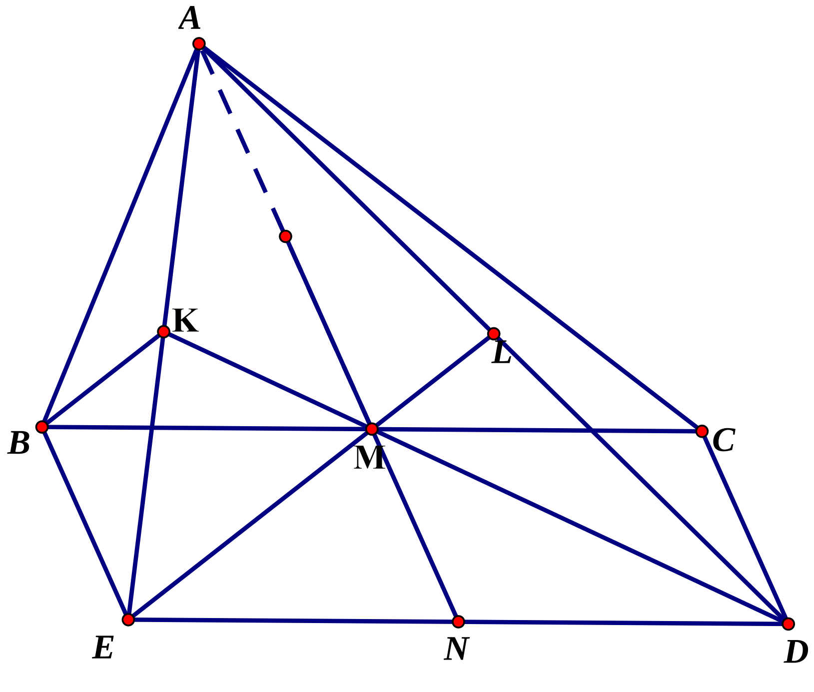
Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο $BCDE$, τέτοιο ώστε: $BE \parallel AM$ και $BE = \dfrac{AM}{2}$

Να αποδειχθεί ότι η ευθεία EM περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AD.

Λύση

Προεκτείνουμε την AM μέχρι να τμήσει την ED στο σημείο N. Τότε το τετράπλευρο $BMNE$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $EN = BM = MC = ND$. Άρα το N είναι το μέσον του ED. Επιπλέον παρατηρούμε ότι $\dfrac{AM}{MN} = 2$ και το M είναι πάνω στη διάμεσο του τριγώνου EAD, οπότε το M είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου AED. Επομένως η ευθεία EM είναι η ευθεία της διαμέσου του τριγώνου AED που άγεται από την κορυφή E, οπότε θα τέμνει την πλευρά AD στο μέσο της.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 2

Έστω p πρώτος και m θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (p,m) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p(p+m)+p=(m+1)^3.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται

$$p(p+m+1)=(m+1)^3 , \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει ότι ο πρώτος αριθμός p είναι διαιρέτης του $(m+1)^3$. Επομένως, αφού p πρώτος, έπεται ότι $p\,|\,(m+1)$, οπότε θα υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $m+1=kp$. Τότε, από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$p(p+kp)=(kp)^3 \Leftrightarrow k+1=k^3p \Rightarrow k^3\,|\,(k+1) \Rightarrow k\,|\,(k+1) \Rightarrow k=1.$$

Άρα είναι $p=2,\ m=1$ και $(p,m)=(2,1)$.

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3=\frac{z}{y}-\frac{2y}{z},\ y^3=\frac{x}{z}-\frac{2z}{x},\ z^3=\frac{y}{x}-\frac{2x}{y}.$$

Λύση

Για $x,y,z\in\mathbb{R}$, που ικανοποιούν την συνθήκη $xyz\neq 0$, το σύστημα γράφεται:

$$x^3yz=z^2-2y^2 \qquad (1)$$

$$y^3zx=x^2-2z^2 \qquad (2)$$

$$z^3xy=y^2-2x^2 \qquad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε:

$$xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)=-\left(x^2+y^2+z^2\right) \Leftrightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right)(xyz+1)=0.$$

Επειδή είναι $xyz\neq 0$ έχουμε $x^2+y^2+z^2>0$, οπότε από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι :

$$xyz=-1 \qquad (4)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4) στο σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) έχουμε:

$$x^2=-z^2+2y^2 \qquad (5)$$

$$y^2=-x^2+2z^2 \qquad (6)$$

$$z^2=-y^2+2x^2 \qquad (7)$$

Από τις (5) και (6) λαμβάνουμε $y^2=z^2$, ενώ από τις (6) και (7) λαμβάνουμε $x^2=z^2$, οπότε:

$$x^2=y^2=z^2 \Leftrightarrow x=y=\pm z \text{ ή } x=-y=\pm z. \qquad (8)$$

Τελικά, από τις εξισώσεις (8) και (4) έχουμε τις λύσεις:

$$(x,y,z)=(-1,-1,-1),\ (x,y,z)=(1,1,-1),\ (x,y,z)=(1,-1,1),\ (x,y,z)=(-1,1,1).$$

Πρόβλημα 4.
Βάφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ...,20 με δύο χρώματα άσπρο και μαύρο έτσι, ώστε να χρησιμοποιούνται και τα δύο χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χρωματισμός ώστε το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1;

Λύση
Το 1 μπορεί να βαφεί με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).
Το 2 μπορεί να βαφεί με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).
Τώρα όλοι οι άρτιοι πρέπει να πάρουν το χρώμα του 2, οπότε οι αριθμοί 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 παίρνουν το χρώμα του 2.
Επίσης όλοι οι αριθμοί που έχουν κοινό διαιρέτη με αυτούς παίρνουν το χρώμα του 2, δηλαδή οι αριθμοί 3,5,7,9,15 παίρνουν το χρώμα του 2.
Οι αριθμοί που απέμειναν (που είναι οι πρώτοι μεγαλύτεροι του 10, δηλαδή οι 11,13,17,19) μπορούν να βαφούν με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).
Επομένως, συνολικά ο χρωματισμός μπορεί να γίνει με $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^6=64$ τρόπους. Πρέπει όμως να αφαιρέσουμε και τις δύο περιπτώσεις που τους βάφουμε όλους μαύρους ή όλους άσπρους. Άρα έχουμε συνολικά 62 τρόπους.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $\mathrm{P}(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$\left(x^2-6x+8\right)\mathrm{P}(x)=\left(x^2+2x\right)\mathrm{P}(x-2),$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Βρείτε τις τιμές του ακέραιου αριθμού n για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A}=\dfrac{8n-25}{n+5}$ ισούται με τον κύβο ρητού αριθμού.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε μια $n\times n$ σκακιέρα, όπου n άρτιος θετικός ακέραιος, στην οποία τοποθετούνται όλοι οι αριθμοί $1,2,3,\ldots n^2$, ένας σε κάθε τετραγωνάκι. Καλούμε S_1 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα άσπρα τετράγωνα και S_2 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα μαύρα τετράγωνα. Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί n που είναι τέτοιοι, ώστε να είναι δυνατή μία τοποθέτηση, για την οποία ισχύει:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{39}{64}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και δύο σημεία του A,B τέτοια, ώστε $R<AB<2R$. Ο κύκλος $c_1(A,r)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα r, $0<r<R$), τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$, στα σημεία C και D (το σημείο C ανήκει στο μικρό τόξο AB). Από το σημείο B, θεωρούμε τις εφαπτόμενες BE και BF στον κύκλο $c_1(A,r)$, έτσι ώστε από τα σημεία επαφής E,F, το σημείο E βρίσκεται εκτός του κύκλου $c(O,R)$. Οι ευθείες EC και DF τέμνονται στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

Διάρκεια εξέτασης 4 ώρες .
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία!***

Ενδεικτικές λύσεις θεμάτων μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $\mathrm{P}(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα
$$\left(x^2-6x+8\right)\mathrm{P}(x)=\left(x^2+2x\right)\mathrm{P}(x-2),$$
για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση
Η δεδομένη ισότητα γράφεται στη μορφή
$$(x-2)(x-4)\mathrm{P}(x)=x(x+2)\mathrm{P}(x-2),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}, \qquad (1)$$
οπότε, για $x=0,-2$ και 4 προκύπτουν οι ισότητες: $\mathrm{P}(0)=\mathrm{P}(-2)=\mathrm{P}(2)=0$.
Επομένως το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ έχει παράγοντες τους $x, x+2$ και $x-2$, οπότε έχουμε:
$$\mathrm{P}(x)=x(x+2)(x-2)Q(x), \qquad (2)$$
όπου το $Q(x)$ είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές.
Λόγω της (2) η σχέση (1) γίνεται:
$$(x-2)(x-4)^2 x(x+2)Q(x)=x(x+2)(x-2)x(x-4)Q(x-2), \quad (3)$$
για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ισοδύναμα, έχουμε
$$x(x+2)(x-2)(x-4)\left[(x-2)Q(x)-xQ(x-2)\right]=0,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}. \quad (4)$$
Από τη σχέση (4), επειδή το πολυώνυμο $x(x-2)(x+2)(x-4)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, προκύπτει η ισότητα:
$$(x-2)Q(x)-xQ(x-2)=0,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (5)$$
Από την τελευταία σχέση για $x=0$ λαμβάνουμε ότι $Q(0)=0$, οπότε $Q(x)=xR(x)$, όπου $R(x)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Λόγω της (5) η σχέση (4) γίνεται:
$$(x-2)xR(x)-x(x-2)R(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-2)\left[R(x)-R(x-2)\right]=0,$$
από την οποία, αφού $x(x-2)\neq 0(x)$, προκύπτει ότι:
$$R(x)=R(x-2),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$
Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $R(x)=R(x+2k)$, $k\in\mathbb{Z}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε το πολυώνυμο $R(x)$ παίρνει την ίδια τιμή για άπειρες τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για παράδειγμα ισχύει $c=R(0)=R(2k), k\in\mathbb{Z}$. Άρα είναι $R(x)=c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε
$$\mathrm{P}(x)=x(x+2)(x-2)Q(x)=x(x+2)(x-2)xR(x)=cx^2\left(x^2-4\right).$$

Πρόβλημα 2

Βρείτε τις τιμές του ακέραιου αριθμού n για τις οποίες ο αριθμός $A=\dfrac{8n-25}{n+5}$ ισούται με τον κύβο ρητού αριθμού.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Έστω $p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0,$ με $(p,q)=1$ και τέτοιοι ώστε

$$A=\frac{8n-25}{n+5}=\left(\frac{p}{q}\right)^3. \qquad (1)$$

Τότε θα είναι και $\left(p^3,q^3\right)=1$, ενώ από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$q^3\left(8n-25\right)=p^3\left(n+5\right), \qquad (2)$$

από την οποία έπεται ότι

$$p^3\left|(8n-25)\right. \text{ και } q^3\left|(n+5)\right.\Rightarrow \text{υπάρχει } k\in\mathbb{Z} \text{ έτσι ώστε:}$$

$$8n-25=kp^3 \text{ και } n+5=kq^3. \qquad (3)$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $8n-25=kp^3$, $k\in\mathbb{Z},$ τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε τις σχέσεις (3). Από τις σχέσεις (3) προκύπτει ότι:

$$8\left(n+5\right)-\left(8n-25\right)=k\left(8q^3-p^3\right)$$

$$\Rightarrow k\left(2q-p\right)\left(4q^2+2qp+p^2\right)=65.$$

Επομένως οι αριθμοί $k,\,2q-p$ και $4q^2+2qp+p^2$ είναι διαιρέτες του 65. Παρατηρούμε όμως ότι $4q^2+2pq+p^2=3q^2+\left(p+q\right)^2\equiv 1\pmod 3$ και επιπλέον ισχύει $4q^2+2pq+p^2=3q^2+\left(p+q\right)^2\geq 3$, οπότε, αφού ο αριθμός $4q^2+2pq+p^2$ είναι διαιρέτης του 65 η μοναδική δυνατή τιμή του είναι

$$4q^2+2pq+p^2=13\Leftrightarrow 3q^2+\left(p+q\right)^2=13,$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- $4q^2+2qp+p^2=13,\ k=\pm1,\ 2q-p=\pm5.$ Τότε έχουμε:

$p=2q\mp5$ και $4q^2+2q\left(2q\mp5\right)+\left(2q\mp5\right)^2=13\Leftrightarrow p=2q\mp5,\ 2q^2\mp5q+2=0$

$\Leftrightarrow p=2q\mp5,\ q=\pm2\Leftrightarrow p=\mp1,\ q=\pm2$. Τότε και για τις δύο περιπτώσεις έχουμε

$\left(\dfrac{p}{q}\right)^3=-\dfrac{1}{8}$, οπότε θα είναι: $\dfrac{8n-25}{n+5}=-\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow 8\left(8n-25\right)=-\left(n+5\right)\Leftrightarrow n=3$.

2^{ος} τρόπος

Όπως στον πρώτο τρόπο φθάνουμε στη σχέση (2) και τη λύνουμε ως προς n, οπότε λαμβάνουμε:

$$n=\frac{5\left(5q^3+p^3\right)}{8q^3-p^3}. \qquad (4)$$

Έστω $d=\left(5q^3+p^3,8q^3-p^3\right)$. Τότε $d\left|5q^3+p^3+8q^3-p^3\right.=13q^3$ και αφού $\left(p,q\right)=1$ έπεται ότι $d|13$. Επομένως

$$\frac{8q^3-p^3}{d}\Big|5\Rightarrow\left(8q^3-p^3\right)\Big|5\cdot13\Rightarrow\left(2q-p\right)\left(4q^2+2pq+p^2\right)\Big|65.$$

Παρατηρούμε ότι $4q^2+2pq+p^2=3q^2+\left(p+q\right)^2\equiv 1\left(\mathrm{mod}\,3\right)$ και επιπλέον ισχύει $4q^2+2pq+p^2=3q^2+\left(p+q\right)^2\geq 3$, οπότε, αφού ο αριθμός $4q^2+2pq+p^2$ είναι διαιρέτης του 65 η μοναδική δυνατή τιμή του είναι

$$4q^2+2pq+p^2=13\Leftrightarrow 3q^2+\left(p+q\right)^2=13. \qquad (5)$$

Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι $|q|\leq 2$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $|q|=0$ ή $|q|=1$, οπότε $\left(p+q\right)^2=13$ ή $\left(p+q\right)^2=10$, αδύνατες με $p,q\in\mathbb{Z}$.
- Αν $|q|=2$, τότε $\left(p+q\right)^2=1$, από την οποία προκύπτουν οι λύσεις :

  $$\left(p,q\right)=\left(-1,2\right) \text{ ή } \left(p,q\right)=\left(1,-2\right) \text{ ή } \left(p,q\right)=\left(-3,2\right) \text{ ή } \left(p,q\right)=\left(3,-2\right).$$

  Επειδή $(2q-p)|65$, δεκτές είναι μόνο οι λύσεις $\left(p,q\right)=\left(-1,2\right)$ ή $\left(p,q\right)=\left(1,-2\right)$, από τις οποίες προκύπτει ότι $n=3$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε μια $n\times n$ σκακιέρα, όπου n άρτιος θετικός ακέραιος, στην οποία τοποθετούνται όλοι οι αριθμοί $1,2,3,\dots,n^2$, ένας σε κάθε τετραγωνάκι. Καλούμε S_1 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα άσπρα τετράγωνα και S_2 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα μαύρα τετράγωνα. Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί n που είναι τέτοιοι, ώστε να είναι δυνατή μία τοποθέτηση, για την οποία ισχύει:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{39}{64}.$$

Λύση

Η δεδομένη σχέση είναι ισοδύναμη με την $S_1=\frac{39}{103}\left(S_1+S_2\right)$. Παρατηρούμε ότι :

$$S_1+S_2=1+2+\cdots+n^2=\frac{n^2\left(n^2+1\right)}{2}$$

Επειδή ο S_1 είναι φυσικός αριθμός, από τις παραπάνω θα έχουμε ότι $103\left|\left(\frac{n^2\left(n^2+1\right)}{2}\right)\right.$. Όμως ο 103 είναι πρώτος της μορφής 4κ+3, οπότε ο 103 δεν διαιρεί τον n^2+1. Επομένως πρέπει να διαιρεί τον n^2 και αφού είναι πρώτος, πρέπει $103|n$. Αφού επιπλέον ο n είναι άρτιος, θα έχουμε ότι είναι πολλαπλάσιο του 206, δηλαδή πρέπει: $n=206k, k\in\mathbb{N}^*$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι για κάθε πολλαπλάσιο του 206 είναι δυνατή μια τέτοια τοποθέτηση. Η ελάχιστη δυνατή τιμή του S_1 είναι:

$$1+2+\cdots+\frac{n^2}{2}=\frac{\frac{n^2}{2}\left(\frac{n^2}{2}+1\right)}{2}=A,$$

ενώ η μέγιστη τιμή είναι:

$$\left(\frac{n^2}{2}+1\right)+\left(\frac{n^2}{2}+1\right)+\cdots+n^2=B.$$

Εύκολα ελέγχουμε την ανισότητα,

$$A < S_1 = \frac{39}{103}\left(S_1 + S_2\right) < B$$

Τώρα θα πάρουμε το ζητούμενο δείχνοντας ότι το S_1 μπορεί να πάρει κάθε δυνατή τιμή ανάμεσα στα A, B Πράγματι, ο αριθμός $A+1$ μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1,2,...,\frac{n^2}{2}-1,\frac{n^2}{2}+1$. Ο αριθμός $A+2$ μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1,2,...,\frac{n^2}{2}-1,\frac{n^2}{2}+2$, και ούτω καθεξής. Όταν φτάσουμε στο βήμα όπου χρειάζεται η τοποθέτηση των αριθμών $1,2,...,\frac{n^2}{2}-1,n^2$, για να πάρουμε τον επόμενο αριθμό ως άθροισμα, θα επιλέξουμε στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1,2,...,\frac{n^2}{2}-2,\frac{n^2}{2},n^2$, και στον επόμενο τους $1,2,...,\frac{n^2}{2}-2,\frac{n^2}{2}+1,n^2$, και ούτω καθεξής. Αυξάνοντας λοιπόν με την παραπάνω διαδικασία το άθροισμα κατά 1, ξεκινώντας από το *A*, μπορούμε να κατασκευάσουμε όλους τους αριθμούς μέχρι το *B*.

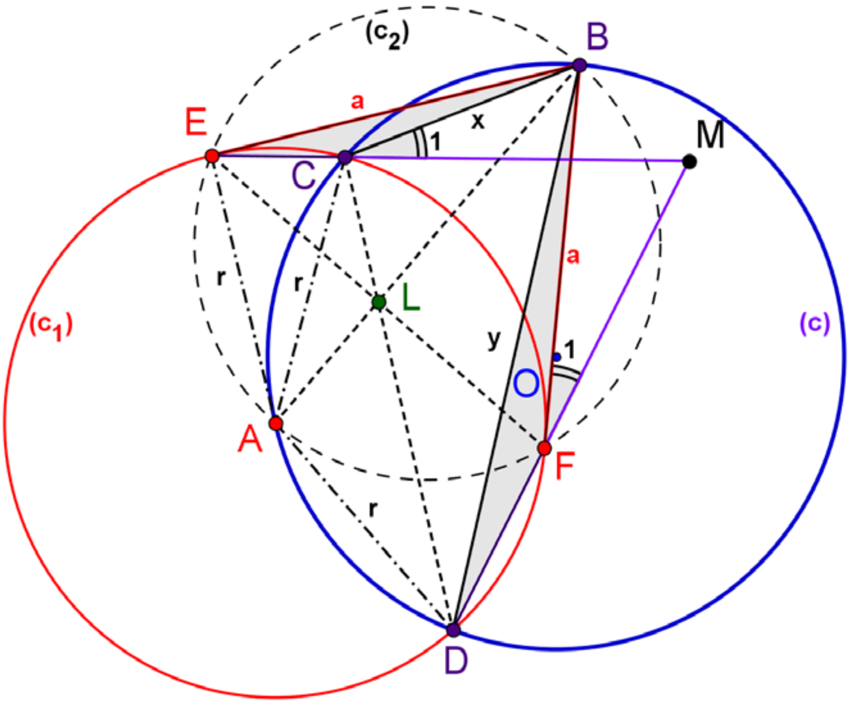
Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και δύο σημεία του A,B τέτοια, ώστε $R < AB < 2R$. Ο κύκλος $c_1(A,r)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα r, $0 < r < R$), τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$, στα σημεία C και D (το σημείο C ανήκει στο μικρό τόξο AB). Από το σημείο B, θεωρούμε τις εφαπτόμενες BE και BF στον κύκλο $c_1(A,r)$, έτσι ώστε από τα σημεία επαφής E,F, το σημείο E βρίσκεται εκτός του κύκλου $c(O,R)$. Οι ευθείες EC και DF τέμνονται στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

Λύση (1ος τρόπος)

Το τετράπλευρο $AEBF$ είναι εγγράψιμο (διότι οι BE και BF είναι εφαπτόμενες, οπότε: $A\hat{E}B = A\hat{F}B = 90^o$) και έστω c_2 ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Το τμήμα CD είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c) και (c_1). Το τμήμα AB είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c) και (c_2). Το τμήμα EF είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c_1) και (c_2). Άρα οι τρεις παραπάνω χορδές θα συντρέχουν στο ριζικό κέντρο, έστω L, των τριών κύκλων.

Η AB είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{B}F$ (διότι BE και BF είναι εφαπτόμενες του κύκλου $c_1(A,r)$**).** Η AB είναι επίσης διχοτόμος της γωνίας $C\hat{B}D$, γιατί οι γωνίες $A\hat{B}C$ και $A\hat{B}D$ είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{AC}$ και $\overset{\frown}{AD}$. Άρα οι γωνίες $E\hat{B}C$ και $F\hat{B}D$ είναι ίσες.



Σχήμα 2

Με τη βοήθεια της ισότητας $E\hat{B}C = F\hat{B}D$, θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα BCE και BFD είναι όμοια. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BF}{BD} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{y}{a} \Leftrightarrow xy = a^2,$$

όπου θέσαμε (χάριν συντομίας): $BE = BF = a$, $BC = x$ και $BD = y$.

Από την ομοιότητα των τριγώνων LCB και LAD έχουμε:

$$\frac{LC}{LA} = \frac{CB}{AD} \Rightarrow \frac{LC}{LA} = \frac{x}{r} \qquad (1).$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων LCA και LBD, έχουμε:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{BD}{CA} \Rightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{y}{r} \qquad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{LB}{LA} = \frac{xy}{r^2} \qquad (\mathrm{A}).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE, το τμήμα AL είναι το ύψος προς την υποτείνουσα, άρα:

$$\frac{LB}{LA} = \frac{EB^2}{EA^2} = \frac{a^2}{r^2} \qquad (\mathrm{B}).$$

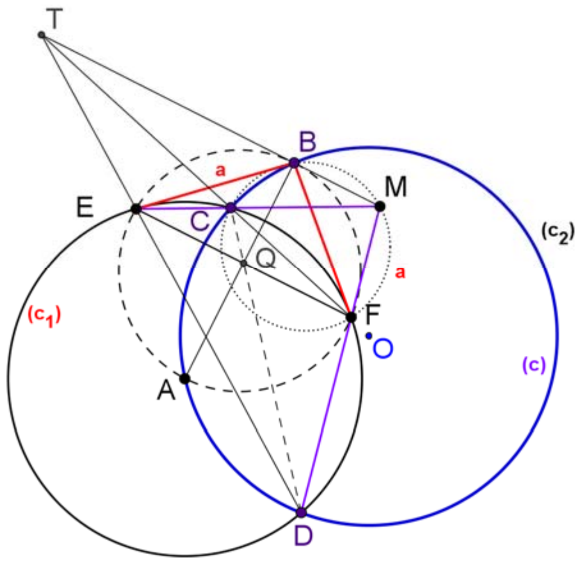
Από τις σχέσεις (A) και (B) έχουμε: $xy = a^2$.

Άρα τα τρίγωνα BCE και BFD είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις γωνίες τους ίσες (μία προς μία). Από τις ισότητες των γωνιών των τριγώνων BCE και BFD, προκύπτει η ισότητα: $\hat{C} = \hat{F}$. Άρα το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

2ος τρόπος.

Σημειώνουμε με Q το σημείο τομής των EF, CD Από το **θεώρημα Pascal** στο εκφυλισμένο εξάγωνο $EEDFFC$ παίρνουμε ότι, αν T είναι το σημείο τομής των

ED, CF, τότε τα σημεία T, B, M είναι συνευθειακά. Επιπλέον, στο εγγεγραμμένο $ECFD$, τα σημεία T, M είναι τα σημεία τομής των απέναντι πλευρών και το Q είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Επομένως η ευθεία TM είναι η **πολική** του Q, οπότε η AQ είναι κάθετη στην πολική (αφού A κέντρο του κύκλου), οπότε έχουμε ότι $A\hat{B}T = 90^\circ$. Έτσι, έπεται ότι $EF \parallel TM$ αφού $AB \perp EF$, οπότε έχουμε ότι $B\hat{M}C = M\hat{E}F = C\hat{F}B$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τις γωνίες χορδής και εφαπτομένης.



Σχήμα 3

Παρατήρηση

Από τις ισότητες των γωνιών των τριγώνων BCE και BFD, προκύπτει επίσης ότι και το τετράπλευρο $BEDM$ είναι εγγράψιμο.