ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
34η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
4 Μαρτίου 2017

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Πάνω στην πλευρά ΑΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\mathrm{\Delta E}=\frac{\alpha}{3}$ και $\mathrm{AZ}=\frac{\alpha}{4}$. Αν οι ευθείες ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Η, να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ ως συνάρτηση του α.

Πρόβλημα 2

Αν x, y, z θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να λύσετε το σύστημα:

$$\{x(6-y)=9,\ y(6-z)=9,\ z(6-x)=9\}.$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους a,b,p, όπου p πρώτος, που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

Πρόβλημα 4

Μία παρέα που αποτελείται από n άτομα παίζει ένα επιτραπέζιο παιχνίδι με τους εξής κανόνες.

(α) Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα.
(β) Το παιχνίδι ολοκληρώνεται μετά από n γύρους.
(γ) Κάθε δυάδα παικτών έχει παίξει μαζί τουλάχιστον σε ένα γύρο.

Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του n.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
34η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
4 Μαρτίου 2017

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με AB < AC < BC, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Ο κύκλος $c_1(A, AC)$ τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο D και την προέκταση της πλευράς CB στο σημείο E. Αν η ευθεία AE τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο F και G είναι το συμμετρικό του E ως προς το B, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο FEDG είναι εγγράψιμο.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε σημείο A του επιπέδου και τρεις ευθείες που περνούν από αυτό και χωρίζουν το επίπεδο σε 6 τομείς. Σε κάθε τομέα υπάρχουν στο εσωτερικό του 5 σημεία. Υποθέτουμε ότι τα 30 σημεία που βρίσκονται στους 6 τομείς είναι ανά τρία μη συνευθειακά. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 1000 τρίγωνα με κορυφές τα σημεία αυτά (των 6 τομέων) τα οποία περιέχουν το A είτε στο εσωτερικό τους είτε στις πλευρές τους.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν όλες οι τριάδες ακεραίων (a,b,c) με $a > 0 > b > c$, που έχουν άθροισμα ίσο με μηδέν και ο αριθμός $N = 2017 - a^3b - b^3c - c^3a$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Πρόβλημα 4. Έστω ξ η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 + x - 4 = 0$. Το πολυώνυμο $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, όπου n θετικός ακέραιος, έχει συντελεστές μη αρνητικούς ακέραιους και αριθμητική τιμή $P(\xi) = 2017$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $a_0 + a_1 + \ldots + a_n \equiv 1 \pmod 2$.

(ii) Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος: $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες και 30 λεπτά

Καλή επιτυχία!