ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

(α) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός x, τέτοιος ώστε οι αριθμοί $x+\sqrt{3}$ και $x^2+\sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.

(β) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε οι αριθμοί $y+\sqrt{3}$ και $y^3+\sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 8 cm το οποίο υποδιαιρούμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε 64 μικρά τετράγωνα πλευράς 1cm. Χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, ενώ όλα τα υπόλοιπα 57 μικρά τετράγωνα είναι λευκά. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε ανεξάρτητα από τη θέση των 7 μαύρων μικρών τετραγώνων, υπάρχει ορθογώνιο εμβαδού k cm^2 με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του ΑΒΓΔ και με όλα τα μικρά τετράγωνα από τα οποία αποτελείται να είναι λευκά, που μπορεί να αποκοπεί από το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του k.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τους θετικούς ακεραίους a,b τέτοιους ώστε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2+4a}{ab}$$

να είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι αν ο b είναι περιττός, τότε ο a είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο c με κέντρο O και ακτίνα R. Ονομάζουμε Δ το αντιδιαμετρικό της κορυφής Α. Δίνεται επίσης ο κύκλος c_1 του οποίου το κέντρο Κ βρίσκεται επάνω στο τμήμα ΒΔ και περνάει από τα σημεία Β και Γ. Αν ο κύκλος c_1 τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΚΕ, έστω c_2, εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου c.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε την ακολουθία (x_n), $n \in \mathbb{N}^*$, που ορίζεται αναδρομικά από τη σχέση $x_{n+1} = 3x_n^3 + x_n$, με $x_1 = \frac{a}{b}$, όπου a, b είναι θετικοί ακέραιοι και ο 3 δεν διαιρεί τον ακέραιο b. Αν για κάποιο θετικό ακέραιο m ο x_m είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού, να αποδείξετε ότι και ο x_1 είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} < \text{ΑΓ} < \text{ΒΓ}$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του c με κέντρο O και ακτίνα R. Στα μικρά τόξα ΑΓ και ΑΒ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Έστω Κ είναι το σημείο τομής των ΒΔ, ΓΕ και Ν είναι το δεύτερο κοινό σημείο των περιεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΒΚΕ, έστω c_1, και ΓΚΔ (έστω c_2). Να αποδείξετε ότι: τα σημεία Α, Κ, Ν είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν, το σημείο Κ ανήκει στη συμμετροδιάμεσο του τριγώνου ΑΒΓ, που αντιστοιχεί στην κορυφή Α.

Σημείωση: *Συμμετροδιάμεσος τριγώνου είναι η συμμετρική ευθεία της διαμέσου ως προς τη διχοτόμο που περνάει από την ίδια κορυφή με τη διάμεσο*

Πρόβλημα 3

(α) Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί n, m με $n < m$ και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα P με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού το πολύ n, για τα οποία ισχύει η ισότητα

$$|P(a_i) - P(a_j)| = |a_i - a_j|, \quad (1)$$

για κάθε i, j με $1 \le i < j \le m$.

(β) Δίνονται φυσικοί αριθμοί $m, n \ge 2$ με $n < m$. Να εξετάσετε αν υπάρχει πολυώνυμο Q με πραγματικούς συντελεστές βαθμού n καθώς και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$, τέτοιοι ώστε

$$|Q(a_i) - Q(a_j)| < |a_i - a_j|,$$

για κάθε i, j με $1 \le i < j \le m$.

Πρόβλημα 4.

Θεωρούμε n σημεία στο επίπεδο, $n \ge 4$, ανά τρία μη συνευθειακά. Ονομάζουμε $\mathrm{A}(n)$ το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 που σχηματίζονται με κορυφές αυτά τα σημεία. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}(n) \le \frac{n^2 - 3n}{4}$, για κάθε $n \ge 4$.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!