**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

# ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
# 36η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα « Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
# 23 Φεβρουαρίου 2019
# Θέματα μικρών τάξεων

**Πρόβλημα 1**
Να βρείτε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{Bmatrix} x^2+y^2+25z^2=6xz+8yz \\ 3x^2+2y^2+z^2=240 \end{Bmatrix}$$

**Πρόβλημα 2**
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Η κάθετη στο μέσον Ε της πλευράς ΒΓ τέμνει την ευθεία ΑΒ σε σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΕΖ τέμνει την πλευρά ΑΒ για δεύτερη φορά στο σημείο Η και την ευθεία ΓΔ σε σημείο Θ διαφορετικό του Δ. Η ευθεία ΕΘ τέμνει την ευθεία ΑΔ στο σημείο Κ και την ευθεία ΓΗ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Η, Λ, Κ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

**Πρόβλημα 3**
Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους οι οποίοι είναι ίσοι με 13 φορές το άθροισμα των ψηφίων τους.

**Πρόβλημα 4**
Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι θετικοί ακέραιοι: 1, 2, 3,…,2018. Ο Γιάννης και η Μαρία έχουν τη δυνατότητα να κάνουν μαζί την παρακάτω κίνηση:
*Επιλέγουν δύο αριθμούς $\alpha,\beta$ από αυτούς που είναι γραμμένοι στον πίνακα και τους αντικαθιστούν με τους αριθμούς $5\alpha-2\beta$ και $3\alpha-4\beta$.*
Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι μετά από πεπερασμένο πλήθος τέτοιων κινήσεων μπορούν να τριπλασιαστούν όλοι οι αριθμοί του πίνακα, δηλαδή να προκύψουν οι αριθμοί: 3, 6, 9,…, 6054. Η Μαρία σκέπτεται για λίγο και του απαντά ότι αυτό δεν είναι δυνατό να γίνει. Ποιος από τους δύο έχει δίκιο και γιατί;

***Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες***
***Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες***

***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

# ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
# 36η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα « Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
# 23 Φεβρουαρίου 2019
# Θέματα μεγάλων τάξεων

**Πρόβλημα 1**

Η ακολουθία $\alpha_\nu$ έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$\alpha_\nu = 5\alpha_{\nu-1} + 3^{\nu-1},\ \ \nu \geq 2.$$

Να υπολογίσετε το γενικό όρο $\alpha_\nu$ και να βρείτε τη μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον όρο $a_k$, όπου $k = 2^{2019}$.

**Πρόβλημα 2**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ και έστω Δ το μέσο του μικρού τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΔΕ (έστω $c_1$) τέμνει την ΑΒ (για δεύτερη φορά) στο σημείο Ζ. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΔΖ (έστω $c_2$) τέμνει (για δεύτερη φορά) την ΑΓ στο σημείο Η να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΑΗ.

**Πρόβλημα 3**

Να βρείτε όλα τα ζεύγη $(x, y)$ θετικών ρητών αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση

$$yx^y = y + 1$$

**Πρόβλημα 4**

Θεωρούμε ορθογώνιο $\nu \times \mu$, με $\nu \leq \mu$, το οποίο υποδιαιρούμε με παράλληλες ευθείες προς τις πλευρές του σε $\nu\mu$ μοναδιαία τετράγωνα. Αρχικά τοποθετούμε από ένα μαύρο πιόνι σε Ν μοναδιαία τετράγωνα και στη συνέχεια προσπαθούμε να γεμίσουμε τον πίνακα με μαύρα πιόνια εκτελώντας την παρακάτω επιτρεπόμενη κίνηση:

*Αν ένα κενό μοναδιαίο τετράγωνο έχει κοινή πλευρά με δύο τουλάχιστον μοναδιαία τετράγωνα κατειλημμένα με μαύρο πιόνι, τότε τοποθετούμε και σε αυτό το μοναδιαίο τετράγωνο ένα μαύρο πιόνι.*

Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού Ν των μαύρων πιονιών που πρέπει και αρκεί να υπάρχουν σε μία αρχική τοποθέτηση, έτσι ώστε μετά από πεπερασμένο πλήθος διαδοχικών εφαρμογών της επιτρεπόμενης κίνησης να γεμίσει το ορθογώνιο με μαύρα πιόνια.

***Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες***
***Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες*** ***Καλή επιτυχία!***