

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

39^η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ**«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»****26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022****Θέματα μικρών τάξεων****Πρόβλημα 1**

(Α) Να προσδιορίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού k για την οποία το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - kx + 2$ έχει ρίζα τον αριθμό 2. Στη συνέχεια, για την τιμή του k που θα βρείτε, να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - kx + 2$ ως γινόμενο δύο πολυωνύμων με ακεραίους συντελεστές.

(Β) Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b ικανοποιούν την εξίσωση $2a + b + \frac{4}{ab} = 10$, να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του a .

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ στο εσωτερικό του, τέτοιο ώστε

$$\Delta\hat{B}\Gamma = 30^\circ, \Delta\hat{B}A = 50^\circ, \Delta\hat{\Gamma}B = 55^\circ.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 80^\circ$

(β) Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$.

Πρόβλημα 3

Στον πίνακα γράφουμε σε μία σειρά n αριθμούς, $n \geq 40$, όπου καθένας από αυτούς ισούται με 1 ή -1, ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι παρακάτω συνθήκες:

(i) Το άθροισμα οποιωνδήποτε 40 διαδοχικών αριθμών είναι ίσο με 0.

(ii) Το άθροισμα οποιωνδήποτε 42 διαδοχικών αριθμών δεν είναι ίσο με 0.

Ονομάζουμε Σ_n το μέγιστο δυνατό άθροισμα των n αριθμών του πίνακα. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του Σ_n για τις διάφορες τιμές του n .

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη μη μηδενικών ακεραίων (x, y) που είναι τέτοιοι, ώστε ο ακέραιος $x^2 + y^2$ να είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων $x^5 + y$ και $y^5 + x$.

Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!

39^η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < AC < BC$. Στο ευθύγραμμο τμήμα BC θεωρούμε τα σημεία D, E ώστε $BD = BA$ και $CE = CA$. Αν K είναι το περίκεντρο του τριγώνου ADE , F είναι η τομή των ευθειών AD, KC και G είναι η τομή των ευθειών AE, KB , να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KDE , έστω c_1 , ο κύκλος με κέντρο το σημείο F και ακτίνα FE , έστω c_2 , και ο κύκλος με κέντρο το σημείο G και ακτίνα GD , έστω c_3 , περνάνε από το ίδιο σημείο, το οποίο βρίσκεται πάνω στην ευθεία AK .

Πρόβλημα 2

Δίνεται ένας θετικός ακέραιος $n > 4$, που διαιρείται από τον αριθμό 4. Συμβολίζουμε με A_n το άθροισμα όλων των θετικών περιττών διαιρετών του n . Συμβολίζουμε με B_n το άθροισμα όλων των θετικών άρτιων διαιρετών του n , εξαιρουμένου του n . Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης $f(n) = B_n - 2A_n$, για τις διάφορες τιμές του n . Για ποιους θετικούς ακεραίους n επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή;

Πρόβλημα 3

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ικανοποιούν την ισότητα

$$\alpha + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta + \frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2} = 18.$$

Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του α .

Πρόβλημα 4

Έστω Q_n το σύνολο των n -άδων $x = (x_1, \dots, x_n)$ με $x_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Μία τριάδα (x, y, z) , όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, διακεκριμένων στοιχείων του Q_n λέγεται *καλή*, αν υπάρχει ένα τουλάχιστον $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ για το οποίο ισχύει η ισότητα συνόλων: $\{x_i, y_i, z_i\} = \{0, 1, 2\}$. Ένα υποσύνολο A του Q_n λέγεται *καλό*, αν οποιαδήποτε τρία στοιχεία του A σχηματίζουν μια *καλή* τριάδα. Να αποδείξετε ότι κάθε *καλό* υποσύνολο του Q_n έχει το πολύ $2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ στοιχεία.

Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!