

39^η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

Οι λύσεις των θεμάτων των μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού k για την οποία το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - kx + 2$ έχει ρίζα τον αριθμό 2. Στη συνέχεια για την τιμή του k που θα βρείτε να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - kx + 2$ ως γινόμενο δύο πολυωνύμων με ακεραίους συντελεστές.

(b) Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b ικανοποιούν την εξίσωση $2a + b + \frac{4}{ab} = 10$, να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του a .

Λύση

(A) Για να είναι ο 2 ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - kx + 2$, πρέπει και αρκεί $P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 - 2k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 5$.

Για $k = 5$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 5x + 2 = x^3 - 4x - x + 2 \\ &= x(x-2)(x+2) - (x-2) = (x-2)(x^2 + 2x - 1). \end{aligned}$$

(B) Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου παίρνουμε:

$$b + \frac{4}{ab} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{4}{ab}} = \frac{4}{\sqrt{a}}$$

Επομένως, $2a + \frac{4}{\sqrt{a}} \leq 10$. Θέτοντας $\sqrt{a} = x$, παίρνουμε $x^2 + \frac{2}{x} \leq 5 \Leftrightarrow x^3 - 5x + 2 \leq 0$.

Χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα έχουμε $(x-2)(x^2 + 2x - 1) \leq 0$. Η τελευταία δεν ισχύει για $x > 2$, άρα $x \leq 2$, οπότε $a \leq 4$. Πράγματι, η τιμή 4 είναι η μέγιστη τιμή, αφού για $a = 4$, παίρνουμε $b = 1$, δηλαδή, υπάρχουν, a, b που ικανοποιούν τη δεδομένη εξίσωση.

2^{ος} τρόπος

Από την ανισότητα AM-ΓΜ έχουμε

$$2a + b + \frac{4}{ab} = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \dots + \frac{a}{4} + b + \frac{4}{ab} \geq 10 \sqrt[10]{\frac{a^8}{4^8} \cdot b \cdot \frac{4}{ab}}$$

Επομένως $\sqrt[10]{\frac{a^8}{4^8} \cdot b \cdot \frac{4}{ab}} \leq 1$, άρα $a^7 \leq 4^7$, άρα $a \leq 4$.

Πράγματι, η τιμή 4 είναι η μέγιστη τιμή, αφού για $a = 4$, παίρνουμε $b = 1$, δηλαδή, υπάρχουν, a, b που ικανοποιούν τη δεδομένη εξίσωση.

3^{ος} τρόπος: Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $ab^2 + (2a^2 - 10a)b + 4 = 0$. (1)

Για να έχει λύσεις η τελευταία, πρέπει η διακρίνουσα να είναι μη αρνητική. Έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta \geq 0 &\Leftrightarrow a^2(2a - 10)^2 - 16a \geq 0 \Leftrightarrow a(a - 5)^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow a^3 - 10a^2 + 25a - 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a^3 - 4a^2 - 6a^2 + 25a - 4 \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a - 4) - (6a - 1)(a - 4) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\quad (a - 4)(a^2 - 6a + 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία αληθεύει για $3 - 2\sqrt{2} \leq a \leq 4$ ή $a \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

Αν $a \geq 3 + 2\sqrt{2}$, τότε η (1) δεν μπορεί να ισχύει, αφού

$$ab^2 > 0, (2a^2 - 10a)b > 0, \text{ οπότε } ab^2 + (2a^2 - 10a)b + 4 > 4.$$

Επομένως $3 - 2\sqrt{2} \leq a \leq 4$. Άρα η μέγιστη τιμή του a είναι 4, αφού για $a = 4$, παίρνουμε $b = 1$, δηλαδή, υπάρχουν, a, b που ικανοποιούν τη δεδομένη εξίσωση.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τέτοιο ώστε

$$\angle B\Gamma\Delta = 30^\circ, \angle \hat{B}A = 50^\circ, \angle \hat{\Gamma}B = 55^\circ.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 80^\circ$

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\angle \hat{A}\Gamma$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

(α) Πρώτα διαπιστώνουμε ότι

$$\hat{B} = \angle \hat{B}A + \angle B\Gamma\Delta = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ.$$

Αν ήταν $\hat{A} = \hat{B} = 80^\circ$, τότε θα είχαμε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 80^\circ + 80^\circ + \hat{\Gamma} > 160^\circ + 55^\circ = 215^\circ,$$

που είναι άτοπο.

$$\text{Αν ήταν } \hat{A} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ, \text{ τότε}$$

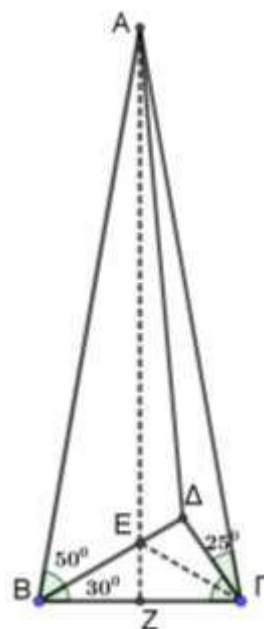
$$\angle B\hat{\Gamma}\Delta = 55^\circ < \hat{\Gamma} = 50^\circ, \text{ άτοπο.}$$

Επομένως έχουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 80^\circ$ και $\hat{A} = 20^\circ$

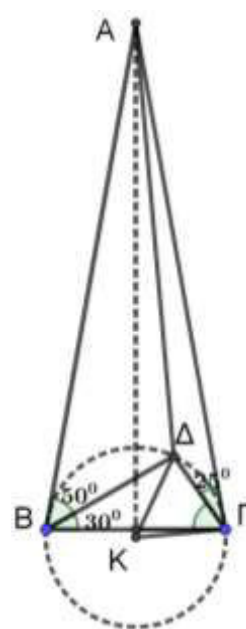
(β) Επειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 80^\circ$, έχουμε:

$$\angle \hat{\Gamma}A = 80^\circ - 55^\circ = 25^\circ \quad (1)$$

Φέρουμε τη διχοτόμο AZ της γωνίας $\hat{A}$, που επιπλέον είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο $AB\Gamma$, και υποθέτουμε ότι τέμνει την ευθεία $B\Delta$ σε σημείο E , σχήμα 1.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Επειδή στο τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι $\angle \hat{B}\Delta < \angle B\hat{\Gamma}\Delta$, έπεται ότι $\Delta\Gamma < \Delta B$, οπότε το Δ βρίσκεται στο ημιεπίπεδο ακμής AZ που περιέχει το σημείο Γ . Έτσι το E βρίσκεται μεταξύ των σημείων B και Δ .

Επειδή το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $EB = E\Gamma$, έπεται ότι $\angle \hat{E}\Gamma B = \angle \hat{E}B\Gamma = 30^\circ$, οπότε

$$\angle \hat{E}\Gamma\Delta = 55^\circ - 30^\circ = 25^\circ = \angle \hat{\Gamma}A. \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) έπεται ότι η ευθεία ΓΔ διχοτομεί τη γωνία ΕΓΑ του τριγώνου ΑΕΓ. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι γωνίες ΔΕΓ και ΔΕΑ είναι εξωτερικές στα τρίγωνα ΕΒΓ και ΕΒΑ, αντίστοιχα, οπότε έχουμε:

$$\Delta\hat{E}\Gamma = 30^0 + 30^0 = 60^0 \text{ και } \Delta\hat{E}A = E\hat{B}A + \frac{\hat{A}}{2} = 50^0 + 10^0 = 60^0.$$

Άρα είναι ΔΕΓ = ΔΕΑ = 60°, οπότε η ευθεία ΕΔ διχοτομεί τη γωνία ΑΕΓ του τριγώνου ΑΕΓ. Επομένως, το σημείο Δ είναι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΕΓ, οπότε

$$\Delta\hat{A}\Gamma = \frac{E\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{10^0}{2} = 5^0.$$

2ος τρόπος (β) Θεωρούμε το περίκεντρο Κ του τριγώνου ΒΔΓ, σχήμα 2, το οποίο βρίσκεται στη μεσοκάθετη της ΒΓ. Επειδή ΔΚΓ = 2 · ΔΒΓ = 60°, ως επίκεντρο, έπεται ότι το τρίγωνο ΚΔΓ είναι ισοσκελές με μία γωνία 60°, οπότε είναι ισόπλευρο. Άρα ΒΓΚ = 5°, οπότε ΑΓΚ = 85°. Όμως, ΚΑΓ = 10°, οπότε το τρίγωνο ΑΚΓ είναι ισοσκελές και το Α είναι στη μεσοκάθετη του ΚΓ. Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΚΔΓ και το Δ είναι στη μεσοκάθετη του ΚΓ. Άρα η ΑΔ είναι η μεσοκάθετη του ΚΓ, οπότε θα είναι και διχοτόμος της γωνίας ΚΑΓ, δηλαδή ΔΑΓ = 5°.

Πρόβλημα 3

Στον πίνακα γράφουμε σε μία σειρά n αριθμούς, $n \geq 40$, όπου καθένας από αυτούς ισούται με 1 ή -1, ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι παρακάτω συνθήκες:

- (i) Το άθροισμα οποιωνδήποτε 40 διαδοχικών αριθμών είναι ίσο με 0.
- (ii) Το άθροισμα οποιωνδήποτε 42 διαδοχικών αριθμών δεν είναι ίσο με 0.

Ονομάζουμε Σ_n το μέγιστο δυνατό άθροισμα των n αριθμών του πίνακα. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του Σ_n για τις διάφορες τιμές του n .

Λύση

Αφού το άθροισμα των πρώτων 40 αριθμών είναι 0, πρέπει οι μισοί να είναι 1 και οι άλλοι μισοί -1. Αφού το άθροισμα των πρώτων 42 δεν είναι 0, πρέπει ο 41^{ος} και ο 42^{ος} αριθμός να είναι ίσοι, έστω ίσοι με $a \in \{-1, 1\}$. Ομοίως αν πάρουμε τους 42 αριθμούς, από τον 2^ο μέχρι τον 43^ο, αφού το άθροισμά τους δεν είναι 0, θα πρέπει ο 42^{ος} και ο 43^{ος} να είναι ίσοι. Άρα και ο 43^{ος} πρέπει να είναι ίσος με a .

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε ότι όλοι οι αριθμοί από τον 41^ο και μετά πρέπει να είναι ίσοι με a . Επομένως αν $n > 60$, το άθροισμα των 40 αριθμών από τον a_{22} μέχρι τον a_{61} έχει τους 21 αριθμούς $a_{41} = a_{42} = \dots = a_{61} = a$, οπότε τα 1 και -1 δεν μπορεί να είναι ίσα το πλήθος σε αυτό το άθροισμα, άρα το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών δεν είναι 0, άτοπο.

Επομένως, η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του n είναι 60. Η μέγιστη τιμή του Σ_n επιτυγχάνεται όταν έχουμε όσο το δυνατόν περισσότερους αριθμούς ίσους με 1. Κοιτώντας την πρώτη 40-αδα, αριθμών, πρέπει να έχουμε τουλάχιστον 20 αριθμούς ίσους με -1. Άρα οι αριθμοί ίσοι με 1 είναι το πολύ 40. Άρα, για κάθε n , έχουμε ότι $\Sigma_n \leq 20$. Πράγματι, το 20 είναι η μέγιστη δυνατή τιμή και επιτυγχάνεται όταν οι πρώτοι 20 αριθμοί είναι όλοι ίσοι με 1, η δεύτερη εικοσάδα αριθμών είναι όλοι ίσοι με -1 και η τρίτη εικοσάδα αριθμών είναι όλοι ίσοι με 1.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη μη μηδενικών ακεραίων (x, y) που είναι τέτοιοι ώστε ο ακέραιος $x^2 + y^2$ να είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων $x^5 + y$ και $y^5 + x$.

Λύση

Επειδή $x^2 + y^2 \mid x(x^5 + y)$ και $x^2 + y^2 \mid y(y^5 + x)$, έπεται ότι

$$x^2 + y^2 \mid x(x^5 + y) + y(y^5 + x) \Rightarrow x^2 + y^2 \mid x^6 + y^6 + 2xy. \quad (1)$$

Όμως από την ταυτότητα για το άθροισμα κύβων παίρνουμε ότι:

$$x^2 + y^2 \mid (x^2)^3 + (y^2)^3 = x^6 + y^6. \quad (2)$$

Επομένως συνδυάζοντας τις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$x^2 + y^2 \mid 2xy. \quad (3)$$

Αυτό σημαίνει ότι $x^2 + y^2 \leq 2 \cdot |xy| \Leftrightarrow (|x| - |y|)^2 \leq 0$, δηλαδή $|x| = |y|$.

Επομένως έχουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $x = y$, τότε από την εκφώνηση έχουμε:

$$2x^2 \mid x^5 + x \Rightarrow 2x \mid x^4 + 1 \Rightarrow x \mid 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.,$$

(β) Αν $x = -y$, τότε από την εκφώνηση έχουμε

$$2x^2 \mid x^5 - x \Rightarrow 2x \mid x^4 - 1 \Rightarrow x \mid 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.,$$

Επομένως τα ζεύγη που ζητάμε είναι τα

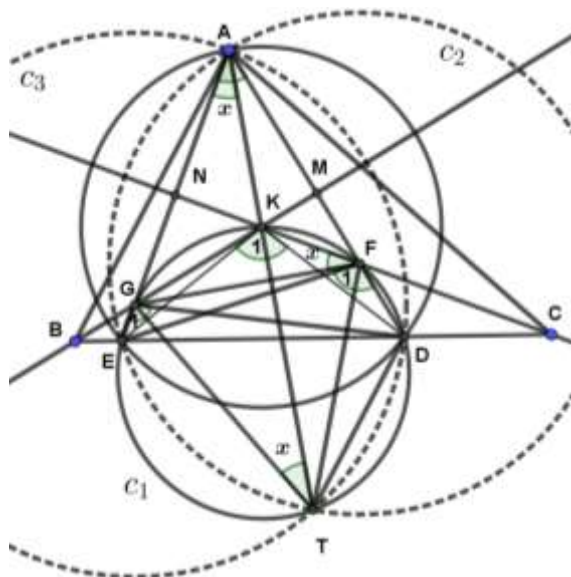
$$(x, y) \in \{(1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1)\}.$$

39^η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

Οι λύσεις των θεμάτων των μεγάλων τάξεων

1. Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < AC < BC$. Στο ευθύγραμμο τμήμα BC θεωρούμε τα σημεία D, E ώστε $BD = BA$ και $CE = CA$. Αν K είναι το περίκεντρο του τριγώνου ADE , F είναι η τομή των ευθειών AD, KC και G είναι η τομή των ευθειών AE, KB , να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KDE , έστω c_1 , ο κύκλος με κέντρο το σημείο F και ακτίνα FE , έστω c_2 , και ο κύκλος με κέντρο το σημείο G και ακτίνα GD , έστω c_3 , περνάνε από το ίδιο σημείο, το οποίο βρίσκεται πάνω στην ευθεία AK .

Λύση.



Σχήμα 1

Έστω M το μέσο του AD . Από τις υποθέσεις του προβλήματος τα σημεία B, G, K, M είναι συνευθειακά, αφού ανήκουν στη μεσοκάθετη του AD . Επιπλέον ο κύκλος c_3 περνάει από το A , αφού $GD = GA$.

Ομοίως, αν N είναι το μέσο του AE , τα σημεία G, F, K, N είναι συνευθειακά, αφού ανήκουν στη μεσοκάθετη του AE . Επιπλέον ο κύκλος c_2 περνάει από το A , αφού $FA = FE$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία G, F ανήκουν στο περιγεγραμμένο κύκλο c_1 του τριγώνου KDE .

Από τα ισοσκελή τρίγωνα ADG και AFE , έχουμε;

$$\widehat{G}_1 = \widehat{EGD} = 2 \cdot \widehat{GAD} = 2 \cdot \widehat{EAF} = \widehat{F}_1 \quad (1)$$

Επίσης, η γωνία $\widehat{EAD}$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ADE με αντίστοιχη επίκεντρη τη γωνία $\widehat{K}_1 = \widehat{GKF}$, οπότε

$$\widehat{K}_1 = 2 \cdot \widehat{EAD} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $\widehat{G}_1 = \widehat{F}_1 = \widehat{K}_1$, οπότε τα σημεία D, E, F, G, K είναι ομοκυκλικά και ανήκουν στο κύκλο c_1 .

Έστω T το σημείο τομής των κύκλων c_2, c_3 . Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία A, K, T είναι συνευθειακά και ότι το T ανήκει στον ίδιο κύκλο με τα σημεία D, E, F, G, K.

Πράγματι, η κοινή χορδή AT των κύκλων c_2 και c_3 είναι κάθετη προς τη διακεντρική ευθεία τους FG και επίσης η ευθεία AK είναι κάθετη προς την ευθεία FG, αφού το K είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AGF.

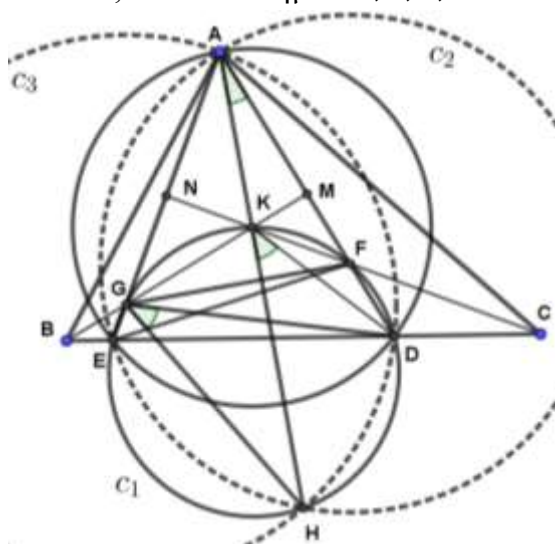
Επίσης, επειδή $GA = GD = GT$ έχουμε τις ισότητες γωνιών:

$$\widehat{GAT} = \widehat{GTA} = x, \quad (3)$$

και αφού το K είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AGF

$$\widehat{GAT} = \widehat{GFK} = 90^\circ - \widehat{AGF} \quad (4)$$

Άρα έχουμε $\widehat{GTK} = \widehat{GTA} = \widehat{GFK}$, οπότε τα σημεία F, G, K, T είναι ομοκυκλικά.



Σχήμα 2

2^{ος} τρόπος

Αφού $BD = BA$ και $KA = KD$, η BK είναι η μεσοκάθετη του AD, οπότε $GA = GD$. Έχουμε $\widehat{KGD} = \widehat{KGA} = 90^\circ - \widehat{EAD} = \widehat{AFK}$, οπότε τα σημεία K, F, D, G είναι ομοκυκλικά.

Όμοια βγάζουμε $\widehat{KFE} = \widehat{AGK}$, οπότε τα σημεία K, F, E, G είναι ομοκυκλικά.

Από τα δύο προηγούμενα συμπεράσματα έχουμε ότι τα K, F, E, G και D είναι ομοκυκλικά.

Έστω τώρα ότι η AK τέμνει τον κύκλο c_1 στο H. Τότε

$$\widehat{HGD} = \widehat{HKD} = 2 \cdot \widehat{HAD} \quad (5)$$

Επομένως το G ανήκει στη μεσοκάθετη του AD και επιπλέον ισχύει η σχέση (5), οπότε το G είναι το περίκεντρο του τριγώνου AHD, δηλαδή ο κύκλος c_3 περνάει από το H.

Όμοια, ο κύκλος c_2 περνάει από το H, οπότε το ζητούμενο έπεται.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ένας θετικός ακέραιος $n > 4$, που διαιρείται από τον αριθμό 4. Συμβολίζουμε με A_n το άθροισμα όλων των θετικών περιττών διαιρετών του n . Συμβολίζουμε με B_n το άθροισμα όλων των θετικών άρτιων διαιρετών του n , εξαιρουμένου του n . Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης $f(n) = B_n - 2A_n$, για τις διάφορες τιμές του n . Για ποιους θετικούς ακραίους n επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή;

Λύση

Συμβολίζουμε με $d_1, \dots, d_k$ τους περιττούς διαιρέτες του n . Τότε οι αριθμοί $2d_1, \dots, 2d_k$ είναι άρτιοι διαιρέτες του n . Επίσης, καθένας από αυτούς δεν διαιρείται από 4, επομένως, άρα κανένας από αυτούς δεν μπορεί να ισούται με n . Τέλος, κανείς από αυτούς δεν ισούται με 4, και ο 4 είναι ένας άρτιος διαιρέτης του n . Συνοψίζοντας έχουμε ότι,

$$A_n = d_1 + \dots + d_k \text{ και } B_n = 2d_1 + 2d_2 + \dots + 2d_k + 4.$$

Επομένως, έχουμε

$$B_n - 2A_n \geq 4.$$

Πράγματι, η τιμή 4 είναι η ελάχιστη τιμή, αφού για $n=8$, έχουμε:

$$A_n = 1, B_n = 2 + 4 = 6, B_n - 2A_n = 4.$$

Τώρα μένει να βρούμε όλους τους θετικούς ακραίους n με την ιδιότητα: $B_n - 2A_n = 4$. Η ισότητα, σύμφωνα με τα παραπάνω ισχύει όταν $B_n = 2d_1 + \dots + 2d_k$. Αν τώρα p είναι ένας περιττός πρώτος διαιρέτης του n , τότε ο $4p$ είναι άρτιος διαιρέτης του n και δεν συμπεριλαμβάνεται στο $2d_1 + \dots + 2d_k$. Επομένως για να ισχύει

$B_n = 2d_1 + \dots + 2d_k + 4$, πρέπει $n = 4p$. Πράγματι, τότε

$$B_n - 2A_n = (2 + 4 + 2p) - 2(1 + p) = 4.$$

Αν τώρα ο n δεν έχει περιττό πρώτο διαιρέτη, τότε είναι δύναμη του 2, δηλαδή $n = 2^{k+1}$, οπότε $A_n = 1, B_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k = \frac{2^{k+1}-2}{2-1} = 2^{k+1} - 2$ και $B_n - 2A_n = 2^{k+1} - 4$. Άρα $B_n - 2A_n = 4$, αν και μόνον, αν $k = 2$. Επομένως $n = 4p$, όπου p πρώτος.

Πρόβλημα 3

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ικανοποιούν την ισότητα

$$\alpha + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta + \frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2} = 18.$$

Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του α .

Λύση (1ος τρόπος)

Με κατάλληλη χρήση της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta + \frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2} &= \alpha + \left(\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta + \frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2} \right) \\ &\geq \alpha + 4 \cdot \sqrt[4]{\beta\gamma \cdot \gamma\delta \cdot \delta\beta \cdot \frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2}} = \alpha + \frac{4}{\sqrt[4]{\alpha}} \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $x = \sqrt[4]{\alpha}$ και λάβουμε υπόψη τη δεδομένη ισότητα, καταλήγουμε στην ανίσωση

$$x^4 + \frac{4}{x} \leq 18, x > 0 \Leftrightarrow x^5 - 18x + 4 \leq 0, x > 0. \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι το 2 είναι ρίζα του πολωνύμου $P(x) = x^5 - 18x + 4$, οπότε καταλήγουμε στην παραγοντοποίηση

$$P(x) = x^5 - 18x + 4 = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x - 2),$$

οπότε έχουμε τελικά την ανίσωση:

$$(x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x - 2) \leq 0. \quad (2)$$

Αν υποθέσουμε ότι $x > 2$, τότε $(x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x - 2) > 0$, οπότε η ανίσωση (2) δεν επαληθεύεται. Επομένως, πρέπει να είναι $0 < x \leq 2$.

Παρατηρούμε ότι για $x = 2$, είναι $\alpha = 16$ και η σχέση (2) ισχύει ως ισότητα. Κατά τα γνωστά από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου, αυτό ισχύει όταν

$$\begin{aligned} \beta\gamma = \gamma\delta = \delta\beta = \frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2} &\Leftrightarrow \beta = \gamma = \delta \text{ και } \beta^2 = \frac{1}{16\beta^6} \\ \Leftrightarrow \beta = \gamma = \delta \text{ και } \beta^8 = \frac{1}{16} &\Leftrightarrow \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Επομένως η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του α είναι το 16.

2ος τρόπος: Από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \alpha + bc + cd + db + \frac{1}{ab^2c^2d^2} &= \frac{\alpha}{32} + \dots + \frac{\alpha}{32} + bc + cd + db + \frac{1}{ab^2c^2d^2} \geq \\ 36 \sqrt[36]{\frac{\alpha^{32}}{32^{32}} \cdot bc \cdot cd \cdot db \cdot \frac{1}{ab^2c^2d^2}} &= 36 \sqrt[36]{\frac{\alpha^{31}}{32^{32}}}. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε $\alpha^{31} \leq \frac{32^{32}}{2^{36}} = 2^{124}$ και επομένως $\alpha \leq 2^4 = 16$, κλπ.

Πρόβλημα 4

Έστω Q_n το σύνολο των n -άδων $x = (x_1, \dots, x_n)$ με $x_i \in \{0, 1, 2\}, i = 1, 2, \dots, n$. Μία τριάδα (x, y, z) , όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, διακεκριμένων στοιχείων του Q_n λέγεται *καλή*, αν υπάρχει ένα τουλάχιστον $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ για το οποίο ισχύει η ισότητα συνόλων: $\{x_i, y_i, z_i\} = \{0, 1, 2\}$. Ένα υποσύνολο A του Q_n λέγεται *καλό*, αν οποιαδήποτε τρία στοιχεία του A σχηματίζουν μια *καλή* τριάδα. Να αποδείξετε ότι κάθε *καλό* υποσύνολο του Q_n έχει το πολύ $2 \left(\frac{3}{2}\right)^n$ στοιχεία.

Λύση

Θα αποδείξουμε το ζητούμενο επαγωγικά ως προς n . Η περίπτωση $n = 1$ είναι προφανής.

Υποθέτουμε ότι κάθε *καλό* υποσύνολο του Q_{n-1} έχει το πολύ $2 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ στοιχεία.

Έστω $A_0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in A : x_n \neq 0\}$ και ορίζουμε τα σύνολα A_1, A_2 όμοια, δηλαδή

$$A_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in A : x_n \neq 1\} \text{ και } A_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in A : x_n \neq 2\}.$$

Αφού το A είναι *καλό* σύνολο και το A_0 είναι υποσύνολό του, το A_0 είναι επίσης *καλό*. Έτσι, τρία οποιαδήποτε στοιχεία του έχουν μια συντεταγμένη που διαφέρουν ανά δύο. Αυτή η συντεταγμένη δεν μπορεί να είναι η τελευταία, διότι το 0 δεν μπορεί να εμφανιστεί εκεί. Συνεπώς, το σύνολο A_0' που προκύπτει από τα στοιχεία του A_0 διαγράφοντας την τελευταία συντεταγμένη είναι *καλό* υποσύνολο του Q_{n-1} .

Παρατηρούμε επιπλέον ότι, αν $|A_0| \geq 3$, τότε $|A_0'| = |A_0|$.

Πράγματι, αν ίσχυε το αντίθετο, τότε θα υπήρχε ένα στοιχείο $a \in A_0'$ έτσι ώστε $x, y \in A_0$, όπου τα x, y προκύπτουν από το a προσθέτοντας τα στοιχεία 1 και 2, αντίστοιχα, ως τελευταία συντεταγμένη. Αλλά τότε, αν z είναι ένα οποιοδήποτε άλλο στοιχείο του A_0 , αυτό δεν μπορεί να έχει ως τελευταία συντεταγμένη το 0, οπότε τα x, y, z δεν θα σχημάτιζαν μία *καλή* τριάδα, άτοπο.

Επομένως, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$|A_0| \leq \max\{2, |A_0'|\} \leq 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

Ομοίως, παίρνουμε ότι: $|A_1|, |A_2| \leq 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$. Όμως, κάθε στοιχείο του A εμφανίζεται σε ακριβώς δύο από τα A_0, A_1, A_2 , οπότε:

$$|A| = \frac{1}{2}(|A_0| + |A_1| + |A_2|) \leq 2 \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$