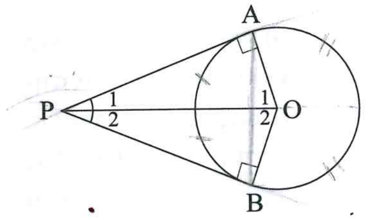
3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

Έστω ένας κύκλος (Ο, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο Ρ. Στην §6.7 θα δούμε ότι από το Ρ φέρονται δύο εφαπτόμενες του κύκλου. Αν Α, Β είναι τα σημεία επαφής αυτών με τον κύκλο (σχ.60), τότε τα τμήματα ΡΑ και ΡΒ λέγονται ***εφαπτόμενα τμήματα*** του κύκλου από το σημείο Ρ και η ευθεία ΡΟ ***διακεντρική ευθεία*** του σημείου Ρ. Ισχύει το εξής θεώρημα:



Σχήμα 60

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Τα τρίγωνα ΑΟΡ και ΒΟΡ (σχ.60) έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΡ κοινή και ΟΑ = ΟΒ (= ρ), άρα είναι ίσα, οπότε ΡΑ = ΡΒ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν Ρ είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,

ρ, Ο ισαπέχουν από Α,Β

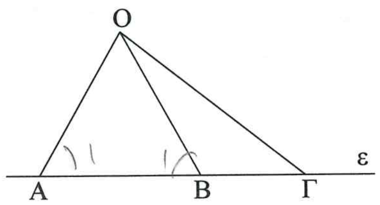
ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

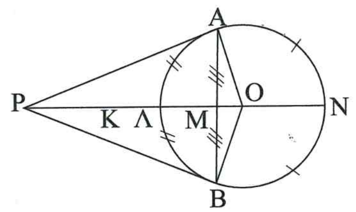
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Πότε μια ευθεία έχει δύο, ένα ή κανένα κοινό σημείο με έναν κύκλο;*

2. *Είναι δυνατόν στο παρακάτω σχήμα να είναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.*



3. *Στο παρακάτω σχήμα τα ΡΑ, ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα, η ΡΚ διχοτόμος της $A\hat{P}B$, τα Λ, Ν μέσα των τόξων $\overparen{ΑΛΒ}$, $\overparen{ΑΝΒ}$ αντίστοιχα και το Μ μέσο της χορδής ΑΒ. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:*

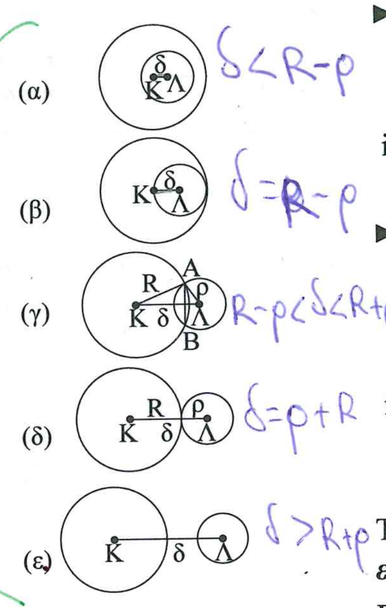


i) *ΡΑ = ΡΒ.* ☑ Σ ☐ Λ

ii) *Η ΡΚ διέρχεται από το Ο.* ☑ Σ ☐ Λ

iii) *Η ΟΜ διέρχεται από τα Ρ, Λ, Ν.* ☑ Σ ☐ Λ

iv) *Η προέκταση του ΛΜ διχοτομεί τις γωνίες $A\hat{P}B$, $A\hat{O}B$ και το τόξο $\overparen{ΑΝΒ}$.* ☑ Σ ☐ Λ



Σχήμα 62

▶ Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία

i) Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (Κ, R), αν και μόνο αν $\mathbf{\delta < R - \rho}$ (σχ.62α).

ii) Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο **εξωτερικό** του άλλου, αν και μόνο αν $\mathbf{\delta > R + \rho}$ (σχ.62ε).

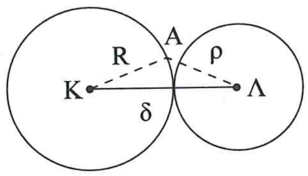
▶ Εφαπτόμενοι κύκλοι

i) Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R), αν και μόνο αν $\mathbf{\delta = R - \rho}$ (σχ.62β).

ii) Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν $\mathbf{\delta = R + \rho}$ (σχ.62δ).

Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται ***σημείο επαφής*** και είναι σημείο της διακέντρου.

Πράγματι, αν το σημείο επαφής Α (σχ.63) δεν είναι σημείο της διακέντρου, τότε από το τρίγωνο ΑΚΛ έχουμε $ΚΛ < ΚΑ + ΑΛ$, δηλαδή $\delta < R + \rho$, που είναι άτοπο.



Σχήμα 63

▶ Τεμνόμενοι κύκλοι

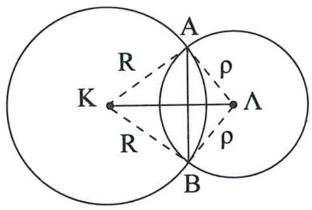
Οι κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν **δύο** κοινά σημεία, αν και μόνο αν $\mathbf{R - \rho < \delta < R + \rho}$ (σχ.62γ). Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται ***κοινή χορδή*** των δύο κύκλων. Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) του σχ.64 και Α, Β τα σημεία τομής τους. Επειδή ΚΑ = ΚΒ = R, το σημείο Κ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Όμοια από την ΛΑ = ΛΒ = ρ προκύπτει ότι και το Λ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Άρα, η ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΑΒ του κύκλου.

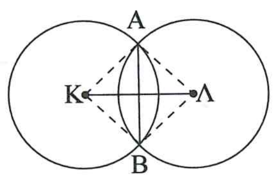


Σχήμα 64

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ SOS (Σ.Λ)

Στην περίπτωση που οι τεμνόμενοι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) (σχ.65) είναι ίσοι, δηλαδή έχουν R = ρ, τότε και η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.

Πράγματι, επειδή R = ρ, θα είναι ΑΚ = ΑΛ και ΒΚ = ΒΛ. Άρα τα Α και Β είναι σημεία της μεσοκαθέτου του ΚΛ και επομένως η κοινή χορδή ΑΒ είναι μεσοκάθετος της διακέντρου ΚΛ.

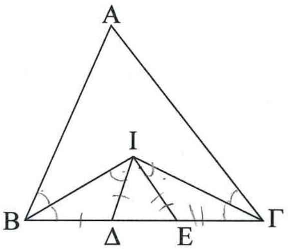


Σχήμα 65

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η εξωτερική διχοτόμος του Αx. Από την κορυφή Β φέρουμε ΒΔ//Αx που τέμνει την ΑΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι ΔΓ = ΑΓ – ΑΒ.*

4. *Από το έγκεντρο Ι, τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη της ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΒΔ+ΓΕ.*

5. *Από το έγκεντρο Ι τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ΙΔ//ΑΒ και ΙΕ//ΑΓ. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔΙΕ ισούται με τη ΒΓ.*



Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και η εξωτερική διχοτόμος του Βx. Θεωρούμε δύο σημεία Ε και Κ της πλευράς ΑΒ. Αν ο κύκλος (Ε, ΕΒ) τέμνει τη ΒΔ στο Ζ, ενώ ο κύκλος (Κ, ΚΒ) τέμνει τη Βx στο Μ, να αποδείξετε ότι ΕΖ//ΜΚ.*

2. *Από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ φέρουμε προς το ίδιο ημιεπίπεδο δύο παράλληλες ημιευθείες Αx και Βy. Παίρνουμε Γ τυχαίο σημείο του ΑΒ, και στις Αx, Βy τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΑΓ και ΒΕ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ορθή.*

3. *Από το παράκεντρο I_α τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΑΕ – ΒΔ.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και Μ σημείο της πλευράς ΒΓ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*

   i) *Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.*

   ii) *ΒΕ + ΓΖ = σταθερό.*

   iii) *Αν Μ μέσο της ΒΓ τότε:*

   α) $BE = \Gamma Z = \dfrac{A\Gamma + AB}{2}$,

   β) $AE = AZ = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$.

4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Η παραλληλία επιτρέπει να μεταφέρουμε τις γωνίες ενός τριγώνου, ώστε να έχουν κοινή κορυφή μια οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου και να σχηματίζουν ευθεία γωνία (σχ.18). Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου.

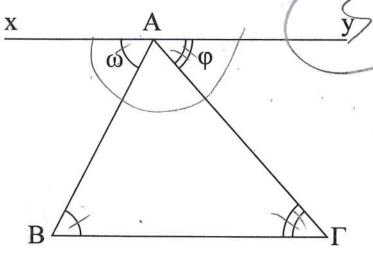
ΘΕΩΡΗΜΑ

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

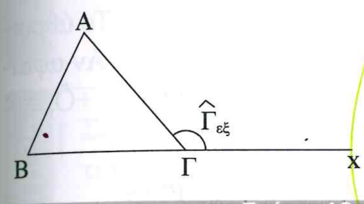
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία xy//ΒΓ. Τότε $\omega = \hat{B}$ (1) και $\varphi = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Αλλά $\omega + \hat{A} + \varphi = 2\llcorner$ (3).
Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner.$$



Σχήμα 18



Σχήμα 19

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ SOS

i) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

iii) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

iv) Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60°.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έχουμε $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=2L$ και $\hat{\Gamma}_{εξ}+\hat{\Gamma}=2L$, οπότε

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}_{εξ}+\hat{\Gamma} \quad ή \quad \boldsymbol{\hat{\Gamma}_{εξ}=\hat{A}+\hat{B}}.$$

ii) – iv) Προφανή.

4.7 Γωνίες με πλευρές κάθετες

ΘΕΩΡΗΜΑ

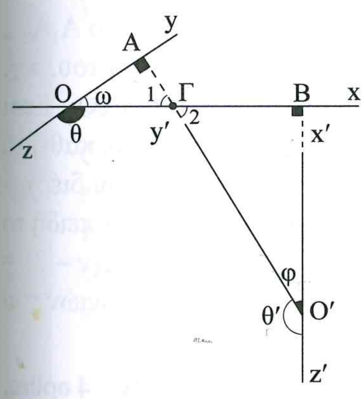
Δυο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω οι γωνίες $x\hat{O}y=ω$ και $x'\hat{O}'y'=φ$ με $Ox \perp O'x'$ και $Oy \perp O'y'$.

Τα τρίγωνα ΟΑΓ και Ο′ΒΓ έχουν $\hat{A}=\hat{B}=1L$ και $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ (κατακορυφήν).

Άρα θα έχουν και τις άλλες γωνίες ίσες, οπότε $ω=φ$.



Σχήμα 20

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Δύο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

ii) Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

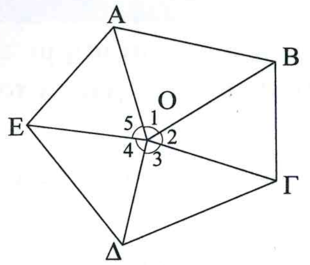
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Πράγματι, (σχ.20) είναι $θ+ω=2L$, $θ'+φ=2L$, οπότε $θ=θ'$, αφού $ω=φ$.

ii) Πράγματι, (σχ.20) είναι $θ+ω=2L$, οπότε $θ+φ=2L$, αφού $ω=φ$.

$\boxed{\Sigma\nu = (\nu-2)\cdot 180}$

4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου



Σχήμα 21

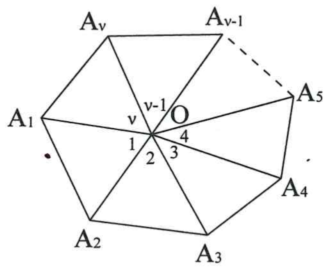
Ας θεωρήσουμε κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και Ο τυχαίο εσωτερικό σημείο του. Αν ενώσουμε το Ο με τις κορυφές του πενταγώνου, σχηματίζονται πέντε τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές. Έτσι το άθροισμα των γωνιών και των πέντε τριγώνων είναι (2·5) ορθές. Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα των γωνιών $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 + \hat{O}_5 = 4$ ορθές, θα μείνει το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου, δηλαδή:

$$\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} + \hat{\mathrm{E}} = (2\cdot 5 - 4) \text{ ορθές}.$$

$\Sigma\nu = (\nu-2)\cdot 180$

Όμοια, αν το κυρτό πολύγωνο έχει ν πλευρές και ενώσουμε το Ο με τις κορυφές του σχηματίζονται ν τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών των ν τριγώνων είναι 2ν ορθές. Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα των γωνιών $\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+ \ldots +\hat{O}_\nu = 4$ ορθές έχουμε:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \ldots + \hat{A}_\nu = (2\nu - 4) \text{ ορθές}.$$



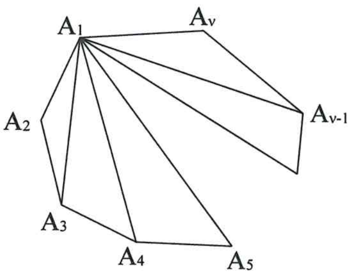
Σχήμα 22

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι πρέπει:

Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου να είναι 2ν – 4 ορθές.

Άλλη απόδειξη. Ας θεωρήσουμε κυρτό πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ με ν πλευρές και ας φέρουμε από μια κορυφή του, π.χ. την A_1, όλες τις διαγωνίους που διέρχονται από αυτή. Έτσι το πολύγωνο διαιρείται σε ν – 2 τρίγωνα, γιατί σε καθεμιά από τις πλευρές του, εκτός των A_1A_2 και A_1A_ν που διέρχονται από την κορυφή A_1, αντιστοιχεί ένα τρίγωνο. Επειδή το άθροισμα των γωνιών των ν – 2 τριγώνων είναι 2(ν – 2) = (2ν – 4) ορθές και ισούται με το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου, προκύπτει ότι:

Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 2ν – 4 ορθές.



Σχήμα 23

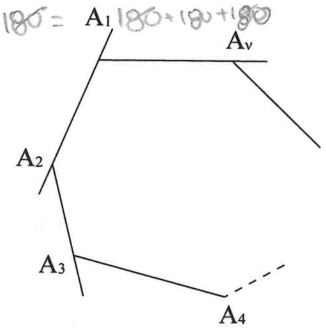
Αεξ + Α = 180
Βεξ + Β = 180
Γεξ + Γ = 180
Αεξ+Βεξ+Γεξ+180 = 180+180+180

ΠΟΡΙΣΜΑ

Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Μονο για τριγωνο



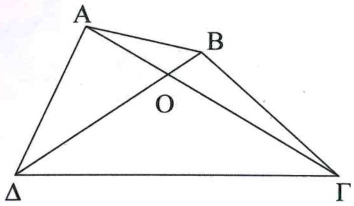
Σχήμα 24

Έχουμε
$$\begin{cases} \hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_1 = 2L \text{ ή } 360^\circ \\ \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \hat{A}_2 = 2L \\ \ldots + \ldots = \ldots \\ \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi} + \hat{A}_\nu = 2L \end{cases}$$
προσθέτουμε κατά μέλη οπότε:

$$(\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \ldots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi}) + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \ldots + \hat{A}_\nu) = 2\nu L \text{ ή}$$

$$(\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \ldots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi}) + (2\nu - 4)L = 2\nu L \text{ ή}$$

$$\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \ldots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi} = 4L.$$



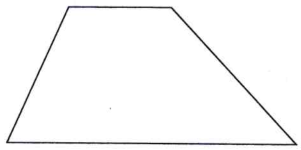
Σχήμα 1

5.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στην §2.20, το ευθύγραμμο σχήμα που έχει τέσσερις πλευρές λέγεται τετράπλευρο. Κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ.1) έχει δύο διαγωνίους ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται σε εσωτερικό σημείο τους.

Στα επόμενα, όταν λέμε τετράπλευρο, θα εννοούμε **κυρτό** τετράπλευρο.

Το τετράπλευρο που έχει δύο μόνον πλευρές παράλληλες λέγεται ***τραπέζιο*** (σχ.2), ενώ το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες λέγεται ***παραλληλόγραμμο*** (σχ.3).

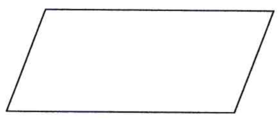

Σχήμα 2

5.2 Παραλληλόγραμμα

Παραλληλόγραμμο

Ορισμός

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

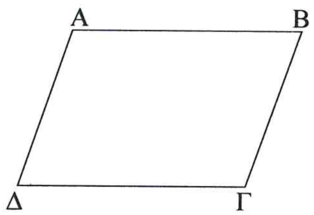

Σχήμα 3

Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, όταν ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ.

▶ Ιδιότητες παραλληλογράμμων

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

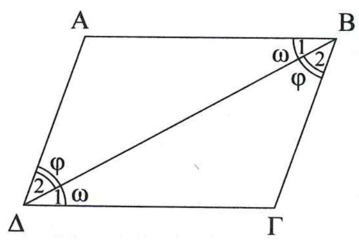
i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.



Σχήμα 4

ΑΠΟΔΕΙΞΗ των i), ii)

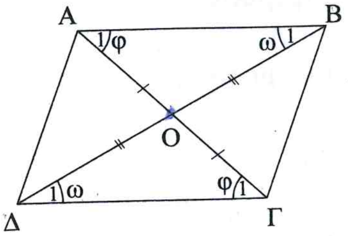
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ (σχ.5). Έχουμε:
$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).
ΒΔ κοινή πλευρά.
$\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ. Επίσης έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi + \omega$.



Σχήμα 5

ΑΠΟΔΕΙΞΗ της ιδιότητας iii)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ. Έχουμε:
ΑΒ = ΓΔ
$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).



Σχήμα 6

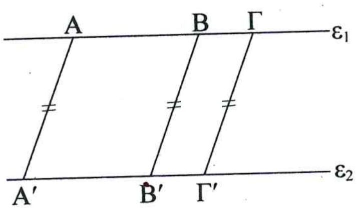
$\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).

Άρα, τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ είναι ίσα, οπότε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ I

Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.

Για το λόγο αυτό λέγεται ***κέντρο*** του παραλληλογράμμου.

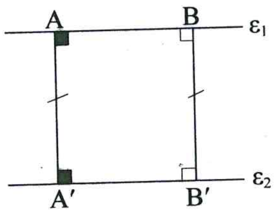


Σχήμα 7

ΠΟΡΙΣΜΑ II

Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα (σχ.7).

Αν τα τμήματα (σχ.8) είναι **κάθετα** στις παράλληλες, το κοινό μήκος τους λέγεται ***απόσταση*** των παραλλήλων. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται ***ύψος*** του παραλληλογράμμου, ενώ οι απέναντι πλευρές του λέγονται ***βάσεις*** ως προς αυτό το ύψος (σχ.9).



Σχήμα 8

▶ Κριτήρια για παραλληλόγραμμα

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε προτάσεις (κριτήρια) οι οποίες εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο: Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

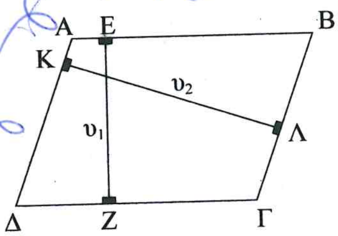
i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.

ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.

iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

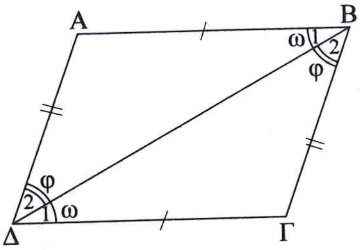
v) Οι απέναντι πλευρές παράλληλες



Σχήμα 9

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Για να αποδείξουμε τα κριτήρια, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση, οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλες.



Σχήμα 10

i) Έστω ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ (σχ.10). Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ που είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ, ΑΔ = ΒΓ και ΒΔ κοινή πλευρά. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$, οπότε ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο* $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ *και σημείο* M *της βάσης του* $B\Gamma$. *Φέρουμε* $ME \parallel AB$ *(*E *σημείο του* $A\Gamma$*) και* $M\Delta \parallel A\Gamma$ *(*Δ *σημείο του* AB*). Να αποδείξετε ότι* $M\Delta + ME = AB$.
2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο* $AB\Gamma\Delta$ *και* E *σημείο της* $A\Gamma$. *Φέρουμε* $\Delta Z \parallel BE$ *(*Z *σημείο του* $A\Gamma$*). Να αποδείξετε ότι* $\Delta E \parallel BZ$.
3. *Δίνεται παραλληλόγραμμο* $AB\Gamma\Delta$. *Προεκτείνουμε τη* $\Delta\Gamma$ *κατά τμήμα* $\Gamma E = \Delta\Gamma$ *και τη* ΔA *κατά τμήμα* $AZ = \Delta A$. *Να αποδείξετε ότι τα σημεία* Z, B *και* E *είναι συνευθειακά.*
4. *Δίνεται τρίγωνο* $AB\Gamma$. *Στις προεκτάσεις των διαμέσων* $B\Delta$ *και* ΓE *παίρνουμε σημεία* H *και* Z *αντίστοιχα τέτοια, ώστε* $\Delta H = B\Delta$ *και* $ZE = \Gamma E$. *Να αποδείξετε ότι*
   i) $AH = AZ$,
   ii) *τα σημεία* Z, A *και* H *είναι συνευθειακά.*
5. *Από σημείο* A *να φέρετε τέμνουσα δύο παράλληλων ευθειών με τρόπο, ώστε το μεταξύ των παραλλήλων τμήμα της να είναι ίσο με δοσμένο τμήμα* λ.

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται παραλληλόγραμμο* $AB\Gamma\Delta$ *και τα σημεία* E, Z, H *και* K *των πλευρών του* AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ *και* $A\Delta$ *αντίστοιχα, ώστε* $AE = \Gamma H$ *και* $BZ = \Delta K$. *Να αποδείξετε ότι*
   i) *το τετράπλευρο* $EZHK$ *είναι παραλληλόγραμμο,*
   ii) *οι* $A\Gamma$, $B\Delta$, EH *και* KZ *συντρέχουν.*
2. *Προεκτείνουμε την πλευρά* AB *παραλληλογράμμου* $AB\Gamma\Delta$ *κατά τμήμα* $BE = B\Gamma$ *και επί της ημιευθείας* ΔA *θεωρούμε σημείο* Z, *ώστε* $\Delta Z = \Delta\Gamma$. *Να αποδείξετε ότι* $Z\hat{\Gamma}E = 90°$.
3. *Δίνεται παραλληλόγραμμο* $AB\Gamma\Delta$. *Προεκτείνουμε την* AB *κατά τμήμα* $BE = B\Gamma$ *και την* $A\Delta$ *κατά τμήμα* $\Delta Z = \Delta\Gamma$. *Να αποδείξετε ότι τα σημεία* Z, Γ *και* E *είναι συνευθειακά.*
4. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο* $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ *και σημείο* Δ *της* $A\Gamma$. *Προεκτείνουμε την* AB *κατά τμήμα* $BE = \Gamma\Delta$. *Να αποδείξετε ότι η* $B\Gamma$ *διχοτομεί τη* ΔE.
5. *Ένα ποταμός, του οποίου οι όχθες είναι ευθύγραμμες, διέρχεται μεταξύ δύο χωριών που απέχουν άνισες αποστάσεις από τις όχθες του. Σε ποια θέση πρέπει να κατασκευασθεί μια γέφυρα κάθετη προς τον ποταμό, ώστε τα δύο χωριά να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από τις αντίστοιχες εισόδους της γέφυρας;*

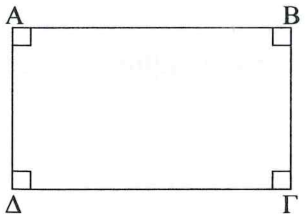
Είδη παραλληλογράμμων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τα είδη των παραλληλογράμμων, δηλαδή τα παραλληλόγραμμα που έχουν και κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Διακρίνουμε τρία είδη παραλληλογράμμων: το ***ορθογώνιο***, το ***ρόμβο*** και το ***τετράγωνο***.

5.3 Ορθογώνιο

Ορισμός

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.

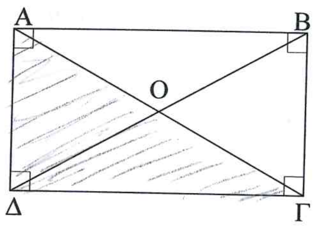


Σχήμα 13

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, ενώ δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), προκύπτει ότι **όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές.**

▶ Ιδιότητες ορθογωνίου

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.



Σχήμα 14

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ανάγνωση

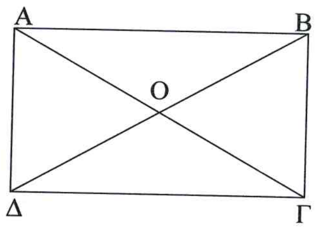
Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες (σχ.14).

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$, ΑΔ κοινή, ΑΒ = ΔΓ), οπότε ΑΓ = ΒΔ.

▶ Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Είναι **παραλληλόγραμμο** και έχει **μία ορθή** γωνία.
ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες**.
iii) Έχει **τρεις** γωνίες **ορθές**.
iv) **Όλες** οι γωνίες του είναι **ίσες**. 90°



Σχήμα 15

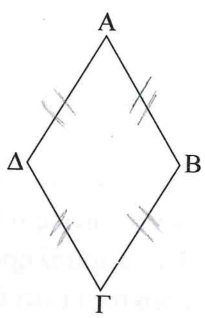
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ανάγνωση

i) Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του παραλληλογράμμου.
ii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΓ = ΒΔ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα (ΑΒ = ΔΓ, ΑΓ = ΒΔ, ΑΔ κοινή), οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2L$, οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1L$. Επομένως, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
iii) Αν έχει τρεις ορθές γωνίες θα είναι και η άλλη ορθή, αφού το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι 4L.
iv) Αν όλες οι γωνίες είναι ίσες, προφανώς όλες είναι ορθές.

5.4 Ρόμβος

Ορισμός

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

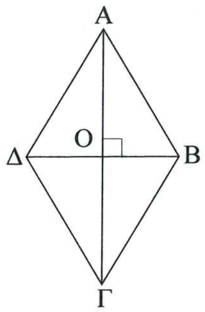


Σχήμα 16

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι **όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.**

▶ Ιδιότητες του ρόμβου

i) **Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.**
ii) **Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.**



Σχήμα 17

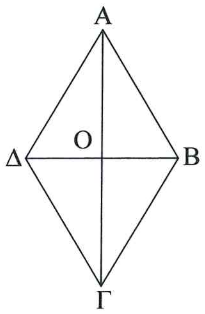
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Απ' έξω *

Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, η διάμεσος του ΑΟ είναι ύψος του και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επομένως ΑΓ⊥ΒΔ και η ΑΓ διχοτομεί την $\hat{A}$. Όμοια η ΑΓ διχοτομεί τη $\hat{\Gamma}$ και η ΒΔ τις $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.

▶ Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- **i)** Έχει **όλες** τις πλευρές του **ίσες**.
- **ii)** Είναι **παραλληλόγραμμο** και **δύο διαδοχικές** πλευρές του είναι **ίσες**.
- **iii)** Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι διαγώνιοί του τέμνονται **κάθετα**.
- **iv)** Είναι **παραλληλόγραμμο** και μία διαγώνιός του **διχοτομεί** μία γωνία του.



Σχήμα 18

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ανάγνωση

i) και ii) Προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.

iii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΓ⊥ΒΔ.

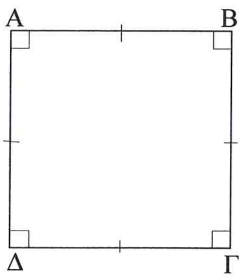
Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΟ είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η ΑΟ είναι και ύψος, επειδή ΑΓ⊥ΒΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε ΑΒ = ΑΔ. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

iv) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΑΓ διχοτόμος της $\hat{A}$. Τότε πάλι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές (αφού ΑΟ διχοτόμος και διάμεσος), οπότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

5.5 Τετράγωνο

Ορισμός

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.



Σχήμα 19

▶ Ιδιότητες τετραγώνου

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:

i) Οι **απέναντι** πλευρές του είναι **παράλληλες**.
ii) **Όλες** οι πλευρές του είναι **ίσες**.
iii) **Όλες** οι γωνίες του είναι **ορθές**.
iv) Οι διαγώνιοί του είναι **ίσες**, τέμνονται **κάθετα**, **διχοτομούνται** και **διχοτομούν** τις γωνίες του.

▶ Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο

Για να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι **τετράγωνο**, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι **ορθογώνιο** και **ρόμβος**. Αποδεικνύεται ότι ένα **παραλληλόγραμμο** είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

* πρέπει να ισχύει μια ιδιότητα ορθογωνίου και μία του Ρόμβου *

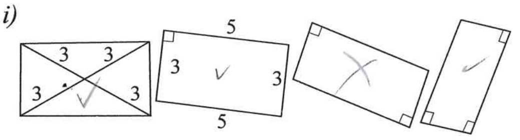
i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

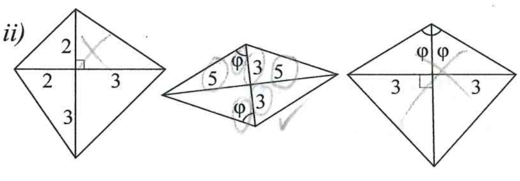
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι i) ορθογώνια, ii) ρόμβοι, iii) τετράγωνα, ποια όχι και γιατί;*

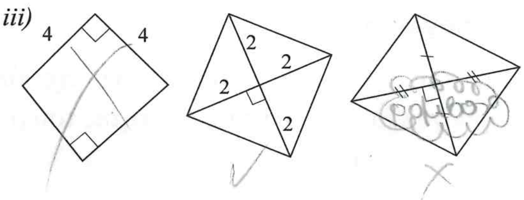
i)



ii)



iii)



προφορικά

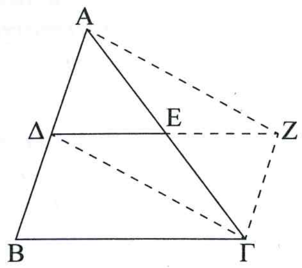
2. *Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι:*
i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος

προφορικά

3. *Σε τι είδους τρίγωνα χωρίζονται τα παρακάτω σχήματα από τις διαγωνίους τους;*
i) Ορθογώνιο ii) Ρόμβος iii) Τετράγωνο

4. *Να αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που αφορούν πλευρές, γωνίες ή διαγωνίους μεταξύ των ζευγών των σχημάτων:*
i) Τετράγωνο – Ρόμβος
ii) Τετράγωνο – Ορθογώνιο
iii) Ορθογώνιο – Ρόμβος

5. *Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση:*
i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου δεν είναι ίσες. ☐ Σ
ii) Όλες οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες. ☐ Λ
iii) Ένας ρόμβος με μία ορθή γωνία είναι τετράγωνο. ☐ Σ
iv) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος. ☐ Σ



Σχήμα 20

Προεκτείνουμε τη ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ. Το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα ΑΔ = // ΓΖ, οπότε ΔΒ = // ΓΖ, αφού ΑΔ = ΔΒ. Έτσι το τετράπλευρο ΔΖΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

(i) ΔΖ // ΒΓ άρα ΔΕ // ΒΓ και

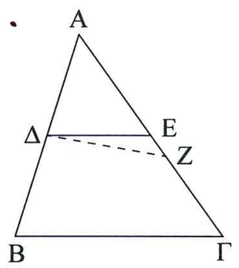
(ii) ΔΖ = ΒΓ ή 2ΔΕ = ΒΓ ή $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

?



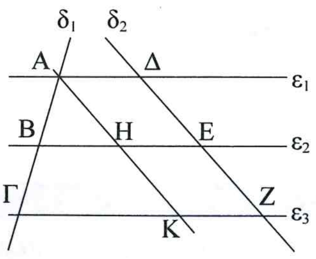
Σχήμα 21

Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ας φέρουμε από το μέσο Δ της ΑΒ την παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε (σχ.21). Θα αποδείξουμε ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ. Έστω ότι το Ε δεν είναι μέσο της ΑΓ. Αν Ζ είναι το μέσο της ΑΓ, το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα ΔΖ // ΒΓ. Έτσι, όμως, έχουμε από το Δ δύο παράλληλες προς τη ΒΓ, που είναι άτοπο. Άρα το Ε είναι μέσο της ΑΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ όχι



Σχήμα 22

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ οι οποίες τέμνουν την $δ_1$ στα σημεία Α, Β, Γ και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ (σχ.22). Αν μια άλλη ευθεία $δ_2$ τέμνει τις $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι ΔΕ = ΕΖ.

Φέρουμε ΑΚ // ΔΖ. Τότε τα τετράπλευρα ΑΔΕΗ και ΕΖΚΗ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε ΑΗ = ΔΕ (1) και ΗΚ = ΕΖ (2). Στο τρίγωνο ΑΚΓ το Β είναι το μέσο της ΑΓ και ΒΗ // ΓΚ. Άρα το Η είναι μέσο της ΑΚ, δηλαδή ΑΗ = ΗΚ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΔΕ = ΕΖ.

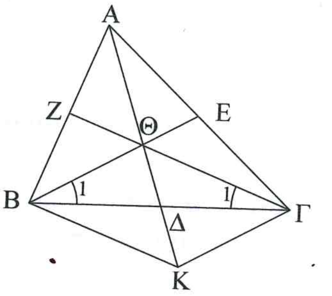
▶ Η μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ και ένα τμήμα ΑΒ = υ κάθετο προς αυτές, το οποίο έχει τα άκρα του στις

5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.



Σχήμα 26

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Χ)

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις δύο διαμέσους ΒΕ και ΓΖ. Επειδή $\hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 2L$, οι δύο διάμεσοι τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο Θ του τριγώνου. Αν η ΑΘ τέμνει τη ΒΓ στο Δ, θα αποδείξουμε ότι i) η ΑΔ είναι η τρίτη διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή ΒΔ = ΔΓ και ii) $Α\Theta = \frac{2}{3}Α\Delta$.

i) Στην ημιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμήμα ΘΚ = ΑΘ. Παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε και Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΚΓ, οπότε $Ε\Theta = // \frac{ΓΚ}{2}$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε $Ζ\Theta = // \frac{ΒΚ}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΕ // ΓΚ και ΓΖ // ΒΚ, δηλαδή το ΒΘΓΚ είναι παραλληλόγραμμο (3). Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε ΒΔ = ΔΓ.

Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται ***βαρύκεντρο*** (ή ***κέντρο βάρους***) του τριγώνου.

ii) Από το παραλληλόγραμμο ΒΘΓΚ έχουμε ακόμη

$$\Theta\Delta = \Delta Κ = \frac{\Theta Κ}{2}, \quad \text{άρα} \quad \Theta\Delta = \frac{Α\Theta}{2} \quad \text{ή} \quad Α\Theta = 2\Theta\Delta.$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$Ε\Theta = \frac{ΓΚ}{2} = \frac{Β\Theta}{2} \quad \text{ή} \quad Β\Theta = 2\Theta Ε.$$

Όμοια από τις (2) και (3) έχουμε ΓΘ = 2ΘΖ. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το βαρύκεντρο έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου. Επίσης έχουμε ότι ΑΔ = ΑΘ + ΘΔ = 2ΘΔ + ΘΔ = 3ΘΔ. Άρα

$$\Theta\Delta = \frac{1}{3}Α\Delta, \quad \text{οπότε} \quad Α\Theta = \frac{2}{3}Α\Delta.$$

Όμοια προκύπτει ότι $Β\Theta = \frac{2}{3}ΒΕ$ και $Γ\Theta = \frac{2}{3}ΓΖ$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Η απόσταση του βαρυκέντρου Θ ενός τριγώνου ΑΒΓ από κάθε κορυφή του ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

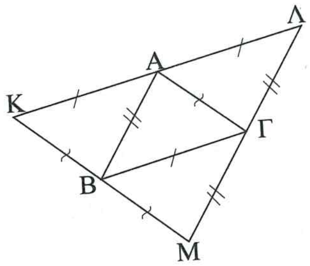
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

*Στην παραπάνω πρόταση θεωρήσαμε το σημείο τομής Θ των δύο διαμέσων ΒΕ και ΓΖ και αποδείξαμε ότι η ΑΘ αν προεκταθεί είναι η τρίτη διάμεσος ΑΔ. Αυτός ο τρόπος αποτελεί μια **βασική μέθοδο** για να αποδεικνύουμε ότι τρεις ευθείες **συντρέχουν** σε κάποιο σημείο.*

5.8 Το ορθόκεντρο τριγώνου

Λήμμα

Οι παράλληλες, που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.



Σχήμα 27

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΟΧΙ

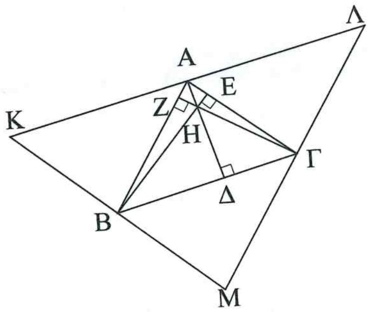
Από τις κορυφές Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του, οι οποίες ορίζουν ένα νέο τρίγωνο ΚΛΜ (σχ.27).

Λόγω των σχηματιζόμενων παραλληλογράμμων ΚΑΓΒ, ΛΑΒΓ και ΜΒΑΓ έχουμε: ΚΑ = ΒΓ = ΑΛ, ΛΓ = ΑΒ = ΓΜ και ΚΒ = ΑΓ = ΒΜ.

Επομένως τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Σχήμα 28

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΟΧΙ

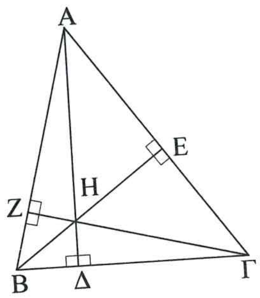
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Από τις κορυφές του Α, Β, Γ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές (σχ.28). Σύμφωνα με το Λήμμα, στο τρίγωνο ΚΛΜ τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι κάθετες στις ΚΛ, ΚΜ και ΜΛ αντίστοιχα (αφού είναι κάθετες στις ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ) και μάλιστα είναι κάθετες στα μέσα τους. Δηλαδή οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ, οπότε θα διέρχονται από το ίδιο σημείο Η. Το σημείο Η λέγεται ***ορθόκεντρο*** του τριγώνου ΑΒΓ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, το ορθόκεντρο είναι η κορυφή της ορθής γωνίας, ενώ σε αμβλυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο βρίσκεται εκτός του τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Οι κορυφές Α, Β, Γ, τριγώνου ΑΒΓ και το ορθόκεντρό του Η αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή κάθε ένα από αυτά τα σημεία είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, που ορίζεται από τα άλλα τρία σημεία.



Σχήμα 29

Πράγματι οι κορυφές π.χ. Β, Γ και το ορθόκεντρο Η του τριγώνου ΑΒΓ ορίζουν το τρίγωνο ΒΗΓ.

Τα ύψη ΗΔ, ΒΖ και ΓΕ του τριγώνου ΒΗΓ τέμνονται στο Α, οπότε το Α είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΗΓ.

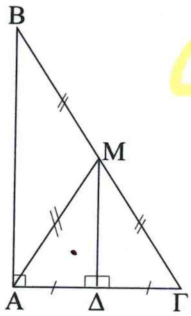
5.9 Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Η διάμεσος οθρογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

SOS



Σχήμα 30

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.30). Θα αποδείξουμε ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

Φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ. Το ΜΔ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ΜΔ // ΑΒ. Αλλά $AB \perp A\Gamma$, επομένως και $M\Delta \perp A\Gamma$. Άρα, το ΜΔ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΜΓ, οπότε ΑΜ = ΜΓ, δηλαδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

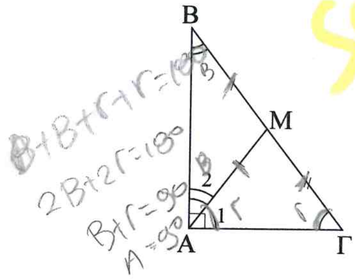
ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

B+B+Γ+Γ=180
2B+2Γ=180
B+Γ=90

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

SOS



Σχήμα 31

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.31). Αν $AM = \frac{B\Gamma}{2}$, θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

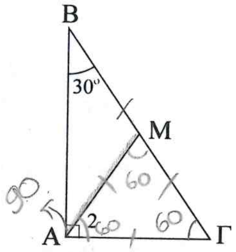
Επειδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ έχουμε ΑΜ = ΜΓ, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (1) και ΑΜ = ΜΒ, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2L$, οπότε $2\hat{A} = 2L$ ή $\hat{A} = 1L$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

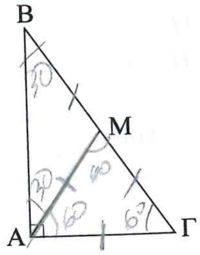


Σχήμα 32

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$ (σχ.32).

Θα αποδείξουμε ότι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.

SOS



Σχήμα 33

Επειδή $\hat{B} = 30°$, είναι $\hat{\Gamma} = 90° - 30° = 60°$. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και είναι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$. Έτσι $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = 60°$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως $A\Gamma = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.

Αντίστροφο, αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ (σχ.33), θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} = 30°$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

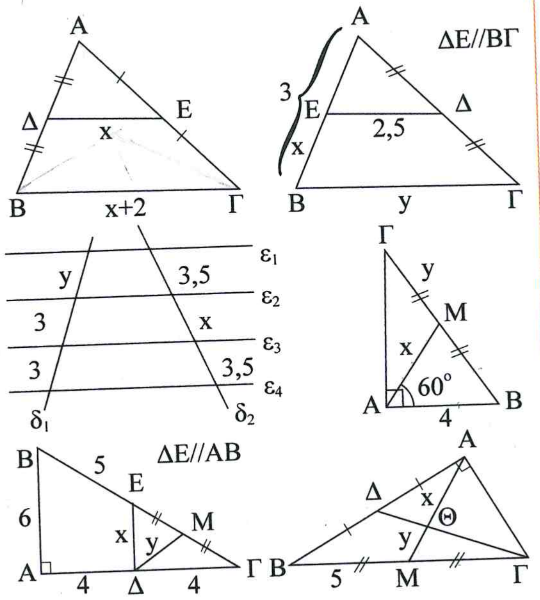
Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, οπότε $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma = A\Gamma$ (αφού $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$).

Άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma} = 60°$. Επομένως $\hat{B} = 90° - 60° = 30°$.

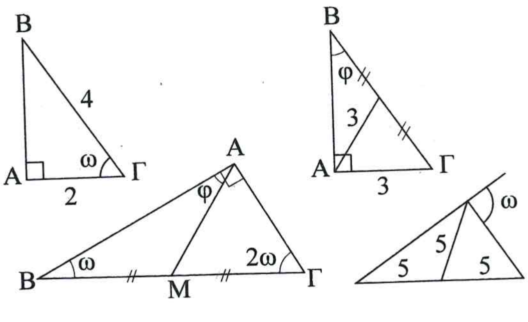
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x και y.*

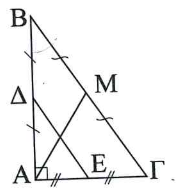


2. *Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω.*



3. *Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο ταυτίζονται;*

4. *Στο παρακάτω σχήμα να δικαιολογήσετε την ισότητα ΑΜ = ΔΕ.*



5. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ διέρχεται από το Α; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ και Ζ τυχαίο σημείο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΔΕ διχοτομεί την ΑΖ.*
2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Αν Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.*
3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ.*
4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι ΕΖ=ΑΓ.*
5. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$.*

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90°$). Προεκτείνουμε τη ΓA κατά τυχαίο τμήμα $A\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta H \perp B\Gamma$, η οποία τέμνει την AB στο E. Να αποδείξετε ότι $\Gamma E \perp \Delta B$.

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$ και Δ, E τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την $E\Delta$ κατά τμήμα $\Delta Z = E\Delta$. Να αποδείξετε ότι το $A\Gamma EZ$ είναι ρόμβος.

8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 30°$ η κάθετος στο μέσο M της υποτείνουσας $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο Δ. Να αποδείξετε ότι:

i) $M\Delta = A\Delta$, ii) $M\Delta = \dfrac{AB}{3}$.

9. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν H, K οι προβολές των κορυφών A και Γ στη διαγώνιο $B\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $EH \perp KZ$.

10. Τρία χωριά που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία ανήκουν στον ίδιο δήμο. Ο δήμος αποφασίζει να κατασκευάσει δρόμο (ευθεία), ο οποίος να ισαπέχει από τα τρία χωριά. Πώς θα γίνει η χάραξη του δρόμου; Πόσοι τέτοιοι δρόμοι υπάρχουν;

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90°$) και το ύψος του $A\Delta$.

i) Αν E, Z είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z = \hat{A} = 90°$.

ii) Αν M είναι το μέσο της EZ, να αποδείξετε ότι $\Delta M = \dfrac{B\Gamma}{4}$.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα E και Z των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν η EZ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο H, να αποδείξετε ότι $\Gamma H = \dfrac{A\Gamma}{4}$.

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε τη διάμεσό του AM και το ύψος του $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}\Delta = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

4. Αν E, Z τα μέσα των πλευρών AB, $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο $A\Gamma$.

5. Αν E, Z τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι AE και AZ τριχοτομούν τη διαγώνιο $B\Delta$.

6. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, Δ είναι το μέσο της διαμέσου AM. Αν η $B\Delta$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E, να αποδείξετε ότι $AE = \dfrac{E\Gamma}{2}$.

7. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την AB κατά τμήμα $BE = AB$. Αν η ΔE τέμνει την $A\Gamma$ στο H και τη $B\Gamma$ στο Z, να αποδείξετε ότι

i) $BZ = Z\Gamma$, ii) $\Gamma H = \dfrac{AH}{2}$.

Σύνθετα Θέματα

1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του $A\Delta$. Αν E και Z τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{E}Z = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90°$) φέρουμε το ύψος του $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι αν $\hat{B} = 15°$, τότε $A\Delta = \dfrac{B\Gamma}{4}$ και αντίστροφα. (**Υπόδειξη**: Φέρουμε τη διάμεσο AM).

3. Σε κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε το βαρύκεντρο K του τριγώνου $AB\Gamma$ και τα μέσα E, Z και H των AB, $\Gamma\Delta$ και $K\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $EH // KZ$.

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} < 90°$ και το ύψος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε την AB κατά τμήμα $BE = B\Delta$. Να αποδείξετε ότι η ΔE διχοτομεί την πλευρά $A\Gamma$.

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Αν E είναι η προβολή του B στη διχοτόμο $A\Delta$, να αποδείξετε ότι:

i) $EM // A\Gamma$,

ii) $EM = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$,

iii) $\Delta\hat{E}M = \dfrac{\hat{A}}{2}$.

6. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, το ύψος του $B\Delta$ και M το μέσο του τμήματος $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε τη ΔB κατά τμήμα $BE = \Delta B$. Να απο-

δείξετε ότι η κάθετη από το Μ στην ΑΒ, η κάθετη από το Α στην ΕΓ και η ΒΔ συντρέχουν.

7. *Αν Κ και Λ είναι οι προβολές της κορυφής Α τριγώνου ΑΒΓ στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*
   i) *Το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο.*
   ii) *Η ευθεία ΚΛ διέρχεται από το μέσο της ΑΓ.*

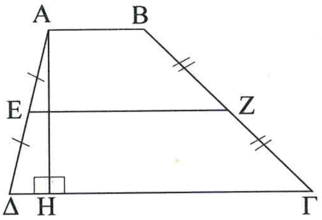
8. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) το ύψος του ΑΔ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν Ε, Ζ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*
   i) *ΑΔ = ΕΖ,*
   ii) *ΑΜ$\perp$ΕΖ,*
   iii) *Η διάμεσος ΑΜ το τμήμα ΔΖ και η παράλληλη προς την ΕΖ από το Β συντρέχουν.*

Τραπέζια

5.10 Τραπέζιο

Ορισμός

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



Σχήμα 34

Οι παράλληλες πλευρές ΑΒ και ΓΔ (σχ.34) του τραπεζίου ΑΒΓΔ λέγονται ***βάσεις*** του τραπεζίου.

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται ***ύψος*** του τραπεζίου. Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται ***διάμεσος*** του τραπεζίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

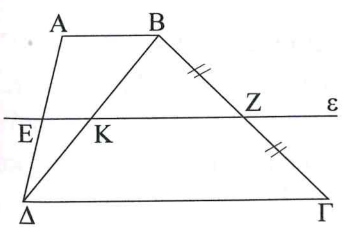
Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Δηλαδή, αν ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ, τότε:

i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ και ii) $ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$.

2ος

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 35

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) (σχ.35), τη διαγώνιο του ΒΔ και Ε το μέσο της ΑΔ. Από το Ε φέρουμε ευθεία ε παράλληλη των ΑΒ και ΓΔ που τέμνει τις ΒΔ και ΒΓ στα Κ και Ζ αντίστοιχα. Τότε:

Στο τρίγωνο ΑΒΔ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΚ//ΑΒ, οπότε το Κ είναι το μέσο της ΒΔ και $ΕΚ = \frac{ΑΒ}{2}$ (1).

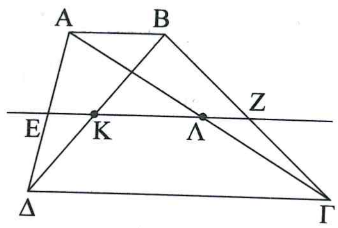
Επίσης στο τρίγωνο ΒΔΓ το Κ είναι μέσο της ΒΔ και ΚΖ // ΓΔ, οπότε το Ζ είναι το μέσο της ΒΓ και $ΚΖ = \frac{ΓΔ}{2}$ (2).

Επομένως η ΕΖ είναι διάμεσος του τραπεζίου και

i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ (από κατασκευή).

ii) Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\mathrm{EK} + \mathrm{KZ} = \frac{\mathrm{AB}}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad \text{ή} \quad \mathrm{EZ} = \frac{\mathrm{AB} + \Gamma\Delta}{2}.$$



Σχήμα 36

ΠΟΡΙΣΜΑ

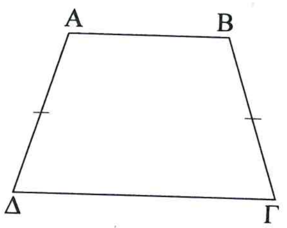
Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αποδείξαμε παραπάνω ότι το Κ είναι μέσο της ΒΔ (σχ.35). Όμοια, αν φέρουμε την ΑΓ (σχ.36), στο τρίγωνο ΑΔΓ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΛ // ΓΔ, οπότε το Λ είναι μέσο της ΑΓ και $\mathrm{E}\Lambda = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ (3).

Επομένως, η διάμεσος ΕΖ του τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα Κ, Λ των διαγωνίων του και προφανώς ΚΛ // ΑΒ, ΓΔ. Επίσης από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

$$\mathrm{E}\Lambda - \mathrm{EK} = \frac{\Gamma\Delta}{2} - \frac{\mathrm{AB}}{2} \quad \text{ή} \quad \mathrm{K}\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - \mathrm{AB}}{2} \ (\text{με } \Gamma\Delta > \mathrm{AB}).$$



Σχήμα 37

5.11 Ισοσκελές τραπέζιο

Ορισμός

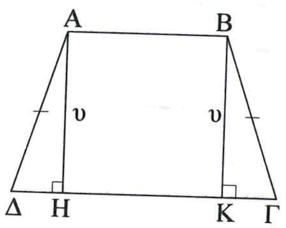
Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

► Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

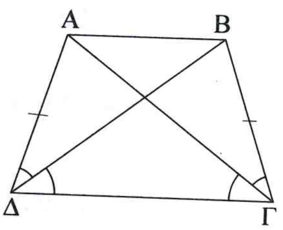
Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.

ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.



Σχήμα 38



Σχήμα 39

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ). Φέρουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΚΓ είναι ίσα ($\hat{\mathrm{H}} = \hat{\mathrm{K}} = 90°$, ΑΔ = ΒΓ και ΑΗ = ΒΚ = υ), οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$. Επειδή $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\Delta} = 180°$ και $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180°$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}}$.

ii) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ (σχ.39) είναι ίσα (ΑΔ = ΒΓ, ΓΔ κοινή και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta$), οπότε ΑΓ = ΒΔ.

▶ Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.

ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

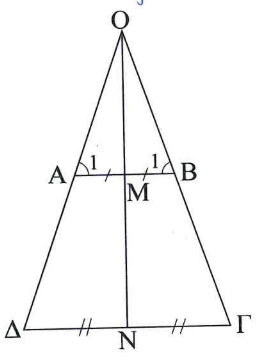
iii) Οι μη παράλληλες πλευρές ίσες

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο:

i) αν προεκτείνουμε τις μη παράλληλες πλευρές του σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα,

ii) η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι μεσοκάθετος της κάθε βάσης.



Σχήμα 40

Απόδειξη

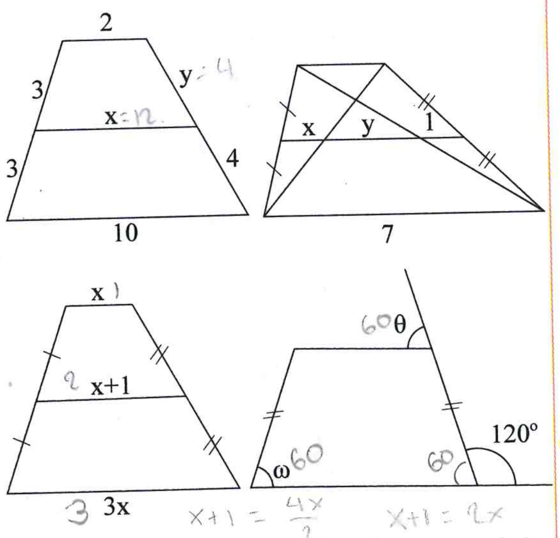
i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ) και Ο το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ είναι ισοσκελή, αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο).

ii) Η μεσοκάθετος ε της βάσης ΑΒ διέρχεται από το Ο, επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Η ε είναι κάθετος και στη ΓΔ επειδή ΓΔ//ΑΒ. Αφού η ε διέρχεται από το Ο, είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΟΓΔ, άρα μεσοκάθετος και στη ΓΔ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

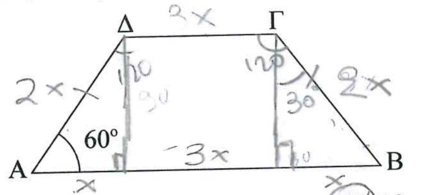
1. *Από τα παρακάτω τραπέζια να βρείτε τα x, y, ω και θ.*



2. *Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι ισοσκελές τραπέζιο;*

3. *Τι ονομάζεται διάμεσος τραπεζίου; Ποιες ιδιότητες έχει;*

4. *Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι: ΑΒ = 5x, ΔΓ = 3x και $\hat{A}$ = 60°. Η περίμετρος του τραπεζίου είναι:*



i) 10x ii) 11x iii) 12x
iv) 13x v) 14x

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

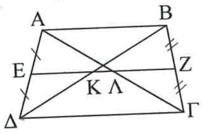
1. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και η διάμεσός του ΕΖ. Αν οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Κ και Η, Θ είναι τα μέσα των ΚΑ και ΚΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ, Η, Θ είναι κορυφές τραπεζίου.*

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Έχει δύο παράλληλες πλευρές

Τραπέζιο

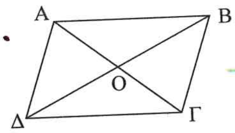


Ιδιότητες

- $EZ \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$
- $EZ = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2}$
- $K\Lambda = \dfrac{\Gamma\Delta - AB}{2}$

Απέναντι πλευρές παράλληλες

Παραλληλόγραμμο



Ιδιότητες

- $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$
- $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$
- $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$
- $AO = O\Gamma$ και $BO = O\Delta$

Κριτήρια

- Καθεμιά από τις ιδιότητες
- Δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες

Ορθογώνιο

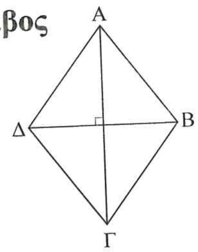
Κριτήρια

- Μια γωνία ορθή
- $A\Gamma = B\Delta$

Επιπλέον ιδιότητες

- $A\Gamma = B\Delta$
- $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^{o}$

Ρόμβος



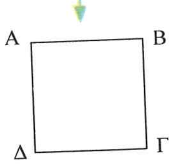
Κριτήρια

- Δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες
- $A\Gamma \perp B\Delta$
- Μία διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία του

Επιπλέον ιδιότητες

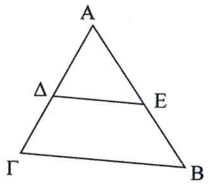
- $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$
- $A\Gamma \perp B\Delta$
- Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του

Τετράγωνο



Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

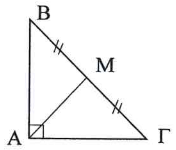
Τρίγωνο



Αν Δ, Ε μέσα ΑΒ, ΑΓ, τότε ΔΕ//= $\frac{ΒΓ}{2}$.

Αν Δ μέσο ΑΒ και ΔΕ//ΒΓ τότε Ε μέσο ΑΓ.

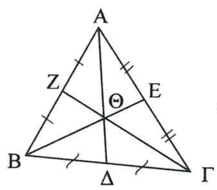
Ορθογώνιο Τρίγωνο



$\hat{Α} = 90^\circ \Leftrightarrow ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Αν $\hat{Α} = 90^\circ$, τότε: $\hat{Β} = 30^\circ \Leftrightarrow ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Βαρύκεντρο τριγώνου



$ΑΘ = \frac{2}{3}ΑΔ$, $ΒΘ = \frac{2}{3}ΒΕ$, $ΓΘ = \frac{2}{3}ΓΖ$

Ορθόκεντρο τριγώνου → Σημείο τομής υψών