Πείραμα τύχης

ΟΡΙΣΜΟΣ

Πείραμα τύχης λέγεται κάθε πείραμα που είναι δυνατό να επαναληφθεί πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες και του οποίου το αποτέλεσμα δεν μπορούμε να προβλέψουμε.

Για παράδειγμα:

- Η ρίψη ενός νομίσματος στον αέρα και η καταγραφή της ένδειξης της πάνω όψης του είναι ένα πείραμα τύχης.

Δειγματικός χώρος

Τα διάφορα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται **δυνατά αποτελέσματα** του πειράματος.

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης λέγεται **δειγματικός χώρος** του πειράματος τύχης και συμβολίζεται με το γράμμα **Ω**

- Αν $\boldsymbol{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\nu}$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο $\boldsymbol{\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\nu\}}$
- Τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω λέγονται και **εξαγόμενα** του πειράματος.

Ενδεχόμενα

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Κάθε υποσυνόλου του δειγματικού χώρου Ω ονομάζεται **ενδοχόμενο του πειράματος**.

Για παράδειγμα

- Αν ρίξουμε ένα νόμισμα δυο φορές καταγράφοντας ύστερα από κάθε ρίψη την πάνω όψη που εμφανίζεται στο νόμισμα, εκτελούμε ένα πείραμα τύχης. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος αυτού είναι το σύνολο Ω = {ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}

  Αν τώρα μας ενδιαφέρει το αποτέλεσμα "Οι δυο ενδείξεις είναι ίδιες", τότε το αποτέλεσμα είναι στοιχείο του συνόλου Α = {ΚΚ, ΓΓ}

  Το σύνολο Α είναι τώρα ένα ενδεχόμενο του πειράματος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και Α ένα ενδεχόμενο του πειράματος.

- Όταν το αποτέλεσμα του πειράματος σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο του ενδεχομένου Α, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο Α **πραγματοποιείται**

▶ Ο δειγματικός χώρος Ω είναι ενδεχόμενο του πειράματος αφού $\Omega \subseteq \Omega$. Το ενδοχόμενο Ω πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω. Γι' αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**

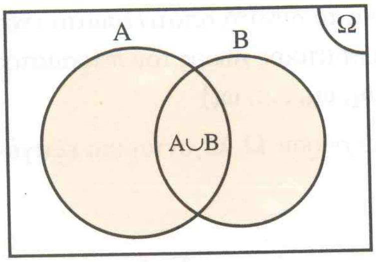
▶ Το κενό σύνολο $\varnothing$ είναι ενδεχόμενο κάθε πειράματος τύχης, αφού είναι υποσύνολο κάθε δειγματικού χώρου Ω. Το κενό σύνολο $\varnothing$ ονομάζεται ειδικότερα **αδύνατο ενδεχόμενο**, γιατί δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος.

▶ Ένα ενδεχόμενο λέγεται απλό όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και σύνθετο όταν έχει τουλάχιστον δυο στοιχεία.

Πράξεις με ενδεχόμενα

Επειδή τα ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω, μεταξύ των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω μπορούν να οριστούν οι γνωστές πράξεις μεταξύ των συνόλων, από τις οποίες προκύπτουν νέα ενδεχόμενα.

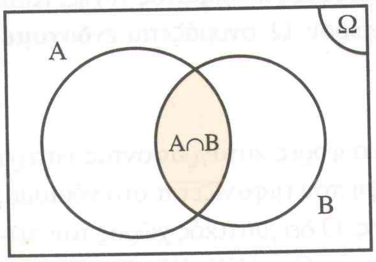
Αν A και B είναι δυο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω, τότε ορίζουμε:



(Σχ. 1)

▶ **Το ενδεχόμενο "$A \cup B$"**, που διαβάζεται "Α ένωση Β" ή "Α ή Β" και πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A και B.

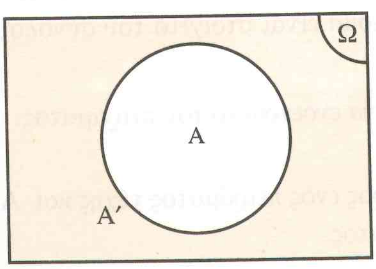
Η ένωση $A \cup B$ αντιστοιχεί στο σκιασμένο μέρος στου σχήματος (1)



(Σχ. 2)

▶ **Το ενδεχόμενο "$A \cap B$"**, που διαβάζεται "Α τομή Β" ή "Α και Β" και πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B.

Η τομή $A \cap B$ αντιστοιχεί στο γραμμοσκιασμένο μέρος του σχήματος (2).



(Σχ. 3)

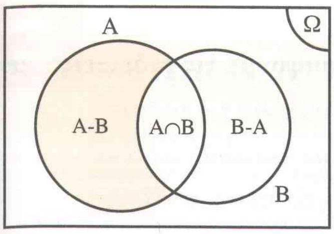
● $A \cup A' = \Omega$

▶ **Το ενδεχόμενο A'**, που διαβάζεται "όχι Α" ή "αντίθετο του Α" ή "συμπληρωματικό του Α" και πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το A.

Το ενδεχόμενο A' αντιστοιχεί στο σκιασμένο μέρου του σχήματος (3).

▶ **Το ενδεχόμενο "$A - B$"**, που διαβάζεται "διαφορά του Β από το Α" και πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B.

Ισχύει η σχέση:



(Σχ. 4)

- $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
- $(B - A) \cap (A \cap B) = B$

$$A - B = A \cap B'$$

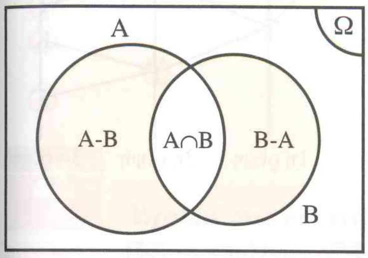
Το ενδεχόμενο "Α – Β" αντιστοιχεί στο γραμμοσκιασμένο μέρου του σχήματος (4).

Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δυο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα όταν

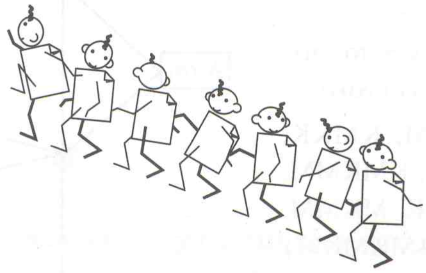
$$A \cap B = \varnothing$$



Δυο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.

Για παράδειγμα:

- ▶ Τα ενδεχόμενα Α και Α' είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, αφού είναι $A \cap A' = \varnothing$
- ▶ Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cup B$ είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.
- ▶ Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.



1

Ρίχνουμε στον άερα ένα νόμισμα 3 φορές και καταγράφουμε τις ενδείξεις: κεφαλή (Κ), γράμματα (Γ)

α) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

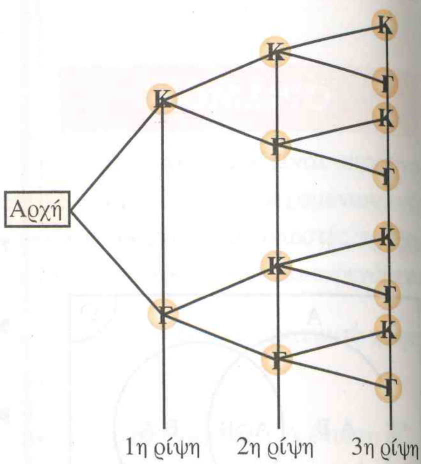
β) Ποιο είναι το ενδεχόμενο

Α: "να φέρουμε ακριβώς δυο φορές κεφαλή"

Β: "να φέρουμε τουλάχιστο μια φορά γράμματα"

Λύση

Τα διαδοχικά βήματα του πειράματος φαίνονται στο διπλανό δεντροδιάγραμμα.



α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο

Ω = {ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}

β) Έχουμε: Α = {ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ}

Β = {ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}

2

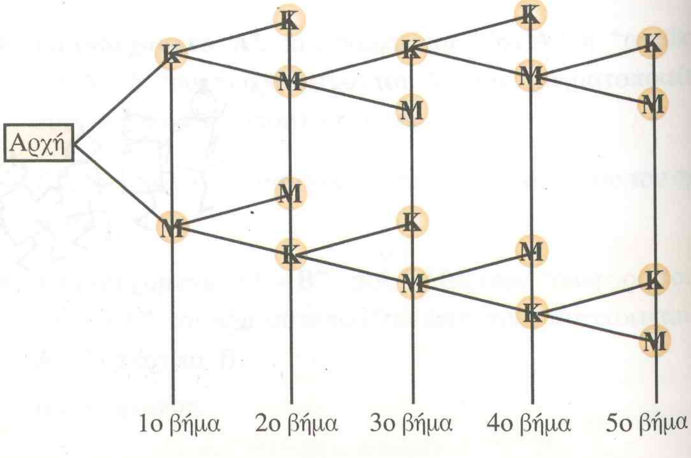
Ένα κουτί περιέχει 10 κάρτες κόκκινες (Κ) και 10 κάρτες μαύρες (Μ). Βγάζουμε από το κουτί τις κάρτες τη μια μετά την άλλη. Σταματάμε όταν βγάλουμε δυο κάρτες του ίδιου χρώματος συνεχόμενα ή όταν βγάλουμε τρεις κάρτες του ίδιου χρώματος.

α) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος

β) Ποιο είναι το ενδεχόμενο: Α: "οι μπάλες είναι του ίδιου χρώματος"

Λύση

Τα διαδοχικά βήματα του πειράματος φαίνονται στο διπλανό δεντροδιάγραμμα.



- Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο

  Ω = {ΚΚ, ΚΜΜ, ΚΜΚΚ, ΚΜΚΜΚ, ΚΜΚΜΜ, ΜΜ, ΜΚΚ, ΜΚΜΜ, ΜΚΜΚΚ, ΜΚΜΚΜ}

- Το ενδεχόμενο Α είναι το σύνολο:

  Ω = {ΚΚ, ΜΜ}

3

Θα εξετάσουμε μια οικογένεια που επιλέξαμε τυχαίως από αυτές που έχουν τρια παιδιά ως προς το φύλλο και τη σειρά γέννησης των παιδιών.

α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος

β) Ποιο είναι το ενδεχόμενο: Α: "το πρώτο παιδί είναι αγόρι"

Λύση

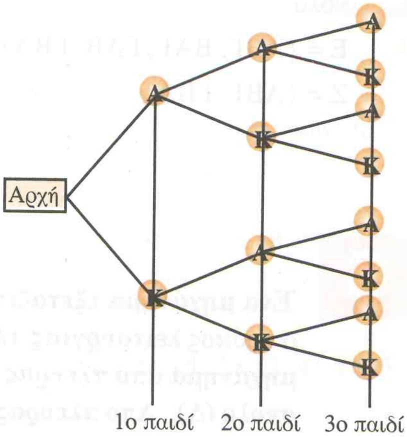
Τα διαδοχικά βήματα του πειράματος φαίνονται στο διπλανό δεντροδιάγραμμα.

α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο

$\Omega = \{ААА, ААК, АКА, АКК, КАА, КАК, ККА, ККК\}$

β) Το ενδεχόμενο Α είναι το σύνολο:

$\Omega = \{ААА, ААК, АКА, АКК\}$



4

Έχουμε δυο κουτιά α και β. Το κουτί α περιέχει άσπρες μπάλες (Α), κόκκινες (Κ) και μαύρες (Μ). Το κουτί β περιέχει άσπρες και μαύρες μπάλες. Διαλέγουμε τυχαία μια μπάλα.

α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος

β) Ποιο είναι το ενδεχόμενο: Α: "η μπάλα είναι άσπρη"

Λύση

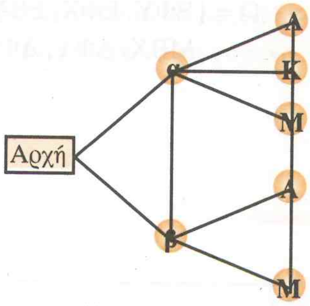
Η κατάσταση του πειράματος φαίνεται στο διπλανό δεντροδιάγραμμα.

α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο

$\Omega = \{αА, αК, αМ, βА, βМ\}$

β) Το ενδεχόμενο Α είναι το σύνολο:

$\Omega = \{αА, βА\}$



5

Τρια άτομα Α, Β και Γ τοποθετούνται τυχαίως σε τρια συνεχόμενα καθίσματα

α) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

β) Ποιο είναι το ενδεχόμενο:

Ε: ο Α είναι δίπλα στον Β; Ζ: ο Α δεν είναι δίπλα στον Γ

Λύση

Η κατάσταση του προβλήματος φαίνεται στο διπλανό δεντροδιάγραμμα.

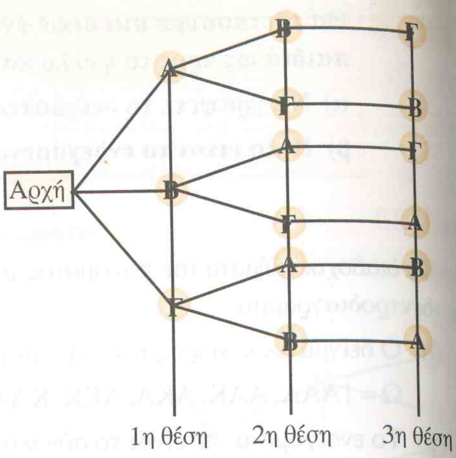
α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο

Ω = {ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ, ΓΒΑ}

β) Τα ενδεχόμενα Ε και Ζ είναι τα παρακάτω σύνολα:

Ε = {ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΓΑΒ, ΓΒΑ}

Ζ = {ΑΒΓ, ΓΒΑ}



6

Ένα μηχάνημα εξετάζεται ανάλογα με τρια χαρακτηριστικά του τα οποία είναι: ο τρόπος λειτουργίας (Λ), η τιμή αγοράς (Α) και το κόστος συντήρησης (Σ). Το μηχάνημα από πλευράς λειτουργίας χαρακτηρίζεται εύκολο (Ε), μέτριο (Μ), δύσκολο (Δ). Από πλευράς τιμής, φθηνό (Φ) ή ακριβό (Β) και από πλευράς κόστους συντήρησης, υψηλού κόστους (Υ) ή χαμηλού κόστους (Χ). Παίρνουμε στην τύχη ένα μηχάνημα και σημειώνουμε τα χαρακτηριστικά του με την εξής σειρά:

Τρόπο λειτουργίας, τιμή αγορά και κόστος συντήρησης.

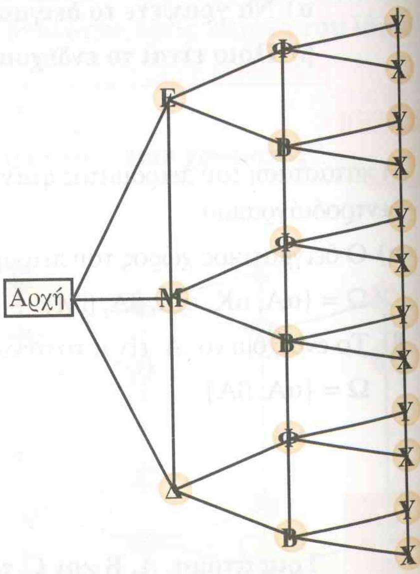
Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Λύση

Η κατάσταση του προβλήματος φαίνεται στο διπλανό δεντροδιάγραμμα.

α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το παρακάτω σύνολο

Ω = {ΕΦΥ, ΕΦΧ, ΕΒΥ, ΕΒΧ, ΜΦΥ, ΜΦΧ, ΜΒΥ, ΜΒΧ, ΔΦΥ, ΔΦΧ, ΔΒΥ, ΔΒΧ}



7

Ρίχνουμε ένα ζάρι δυο φορές. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:

α) Α: Το αποτέλεσμα της 1η ρίψης είναι μικρότερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης.

Β: Το άθροισμα των ενδείξεων στις δυο ρίψεις είναι περιττός αριθμός.

Γ: Το αποτέλεσμα της 1η ρίψης είναι άρτιος και της 2ης περιττός αριθμός.

β) Να βρείτε τα ενδεχόμενα: $A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $A \cap (B \cap \Gamma)$

Λύση

Οι ενδείξεις ενός ζαριού είναι οι αριθμοί: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Το αποτέλεσμα του πειράματος κάθε φορά που εκτελείται είναι το ζευγάρι των αριθμών (α, β) όπου α η ένδειξη της 1η ρίψης και β η ένδειξη της 2ης ρίψης.

α) ▶ Το ενδεχόμενο Α είναι το σύνολο

$A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$

▶ Το ενδεχόμενο Β είναι το σύνολο

$B = \{(1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}$

▶ Το ενδεχόμενο Γ είναι το σύνολο

$\Gamma = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$

▶ Έχουμε διαδοχικά:

- $A \cap B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$
- $A \cap \Gamma = \{(2, 3), (2, 5), (4, 5)\}$
- $B \cap \Gamma = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 3), (4, 5), (6, 5)\}$
- $A \cap (B \cap \Gamma) = \{(2, 3), (2, 5), (4, 5)\}$

8

Έστω Α, Β δυο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω. Να παρασταθούν με διάγραμμα Venn και να εκφραστούν με τη βοήθεια των συνόλων τα παρακάτω ενδεχόμενα:

i) Πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β

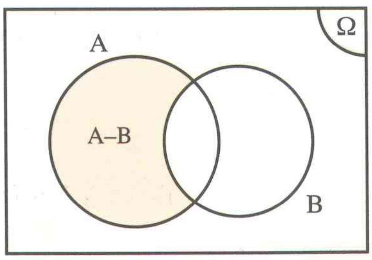
ii) Κανένα από τα Α και Β δεν πραγματοποιείται

iii) Ακριβώς ένα από τα Α και Β πραγματοποιείται

Λύση

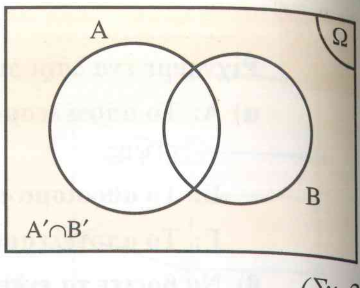
i) Επειδή θέλουμε να πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β γραμμοσκιάζουμε εκείνη την επιφάνεια του Α που είναι εκτός του Β.

▶ Πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β σημαίνει ότι "πραγματοποιείται το Α και το Β'". Άρα το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $A - B$



(Σχ. 1)

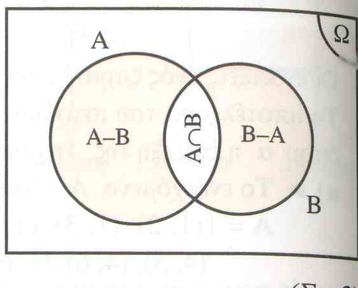
ii) Κανένα από τα A και B δεν πραγματοποιείται σημαίνει ότι "πραγματοποιείται το A' και το B'". Επομένως το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $A' \cap B' = (A \cup B)'$



(Σχ. 2)

iii) Από τα ενδεχόμενα A και B "πραγματοποιείται μόνο το A και όχι το B" σημαίνει ότι "πραγματοποιείται το A και το B'" που είναι το ενδεχόμενο $A - B$

Όμοια "πραγματοποιείται το B και όχι το A" είναι το ενδεχόμενο $A - B$. Επομένως πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A και B όταν πραγματοποιείται το $(A - B) \cup (B - A)$ αφού τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ξένα μεταξύ τους (Σχ. 3)



(Σχ. 3)

9

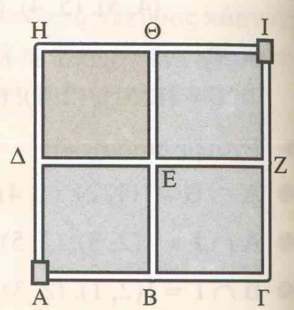
Ο Γιώργος έχει επισκεφθεί ένα φίλο του, που μένει στη θέση Α και θέλει να επιστρέψει στο σπίτι του, που βρίσκεται στη θέση Ι. Θα ταξιδέψει μόνο μέσω των ευθύγραμμων τμημάτων που φαίνονται στο σχήμα κινούμενος κάθε φορά είτε προς τα δεξιά είτε προς τα πάνω.

i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος

ii) Να βρείτε τα ενδεχόμενα:

Α: Ο Γιώργος περνάει από τη θέση Ε

Β: Ο Γιώργος δεν χρησιμοποιεί καθόλου τις γωνιακές θέσεις Γ και Η



Λύση

i) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο:
Ω = {ΑΒΓΖΙ, ΑΒΕΖΙ, ΑΒΕΘΙ, ΑΔΕΖΙ, ΑΔΕΘΙ, ΑΔΗΘΙ}

ii) Έχουμε: Α = {ΑΒΓΖΙ, ΑΔΗΘΙ} και
Β = {ΑΒΕΖΙ, ΑΔΗΘΙ}

3

θεωρία

Σχετική συχνότητα

Η έννοια της πιθανότητας

Αν στις ν επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης το ενδεχόμενο Α εμφανίζεται $\varkappa$ φορές, τότε ονομάζουμε **σχετική συχνότητα του Α** και συμβολίζουμε με f_A το πηλίκο $\frac{\varkappa}{\nu}$

Δηλαδή: $$f_A = \frac{\varkappa}{\nu}$$

Ιδιότητες της σχετικής συχνότητας

Θεωρούμε ένα πείραμα τύχης του οποίου ο δειγματικός χώρος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\mu\}$.

Αν σε ν εκτελέσεις του πειράματος τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_\mu\}$ πραγματοποιούνται με συχνότητες $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\mu$ αντιστοίχως, τότε για τις σχετικές συχνότητες $f_1 = \frac{\varkappa_1}{\nu}, f_2 = \frac{\varkappa_2}{\nu}, \ldots, f_\mu = \frac{\varkappa_\mu}{\nu}$ με τις οποίες πραγματοποιούνται τα απλά ενδεχόμενα θα ισχύουν:

1. $\mathbf{0 \le f_i \le 1, \; i = 1, 2, 3, \ldots, \mu}$ (αφού $0 \le \varkappa_i \le \nu$)
2. $\mathbf{f_1 + f_2 + \ldots + f_\mu = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_\mu}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1}$

Νόμος των μεγάλων αριθμών

Όταν σε ένα πείραμα τύχης ο αριθμός των δοκιμών αυξάνει απεριόριστα, τότε η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου σταθεροποιείται γύρω από μια συγκεκριμένη αριθμητική τιμή. Το παραπάνω συμπέρασμα επιβεβαιώνεται και θεωρητικά και ονομάζεται **νόμος των μεγάλων αριθμών**.

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τότε ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου Α του αριθμό:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων του Α}}{\text{Πλήθος των δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N(\Omega)}}$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι:

- $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$
- $P(\varnothing) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$
- $0 \le P(A) \le 1$

3

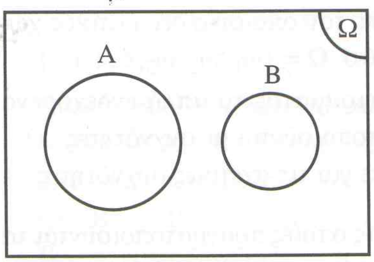
Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις γνωστές ως "κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων"

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



Απόδειξη:

Έστω $\kappa = N(A)$ οι ευνοϊκές περιπτώσεις του ενδεχομένου A και $\mu = N(B)$ οι ευνοϊκές περιπτώσεις του ενδεχομένου B. Επειδή τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα θα υπάρχουν $\kappa + \mu = N(A) + N(B)$ ευνοϊκές περιπτώσεις για το ενδεχόμενο $A \cup B$. Δηλαδή $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$

Επομένως:

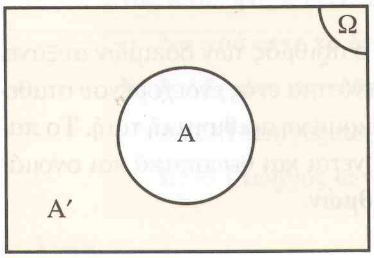
$$P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

Άρα $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Για δυο ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$



Απόδειξη:

Επειδή $A \cap A' = \varnothing$ και $A \cup A' = \Omega$ έχουμε διαδοχικά:

$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$ ή $P(\Omega) = P(A) + P(A')$

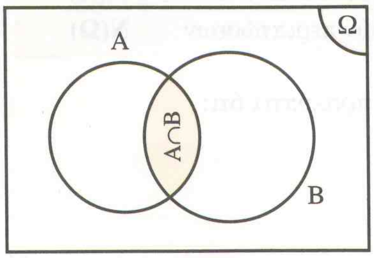
ή $1 = P(A) + P(A')$ Άρα $P(A') = 1 - P(A)$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Για δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων)



Απόδειξη:

Για τα ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$ (1) αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το ~~N~~ πλήθος των στοιχείων $(A \cap B)$ υπολογίζεται δυο φορές.

Από τη σχέση (1) τώρα έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

Επομένως είναι: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4

Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \le P(B)$

Απόδειξη:

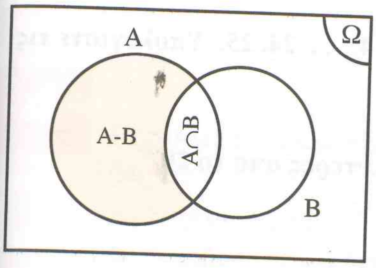
Επειδή $A \subseteq B$ είναι $N(A) \le N(B)$, οπότε

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \le \frac{N(B)}{N(\Omega)} \text{ ή } P(A) \le P(B)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 5

Για δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$\mathbf{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)}$$



Απόδειξη:

Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και είναι $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ έχουμε διαδοχικά:

$\cancel{P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)]} = P(A - B) + P(A \cap B)$ = P(A)

Επομένως $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας σε ένα δειγματικό χώρο με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο αν τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Υπάρχουν όμως και πειράματα τύχης στο οποία τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα. Για τις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, ο οποίος έχει ανάλογες ιδιότητες με τη σχετική συχνότητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- ▶ $0 \le P(\omega_i) \le 1$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$
- ▶ $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots P(\omega_\nu) = 1$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$

- Ως πιθανότητα $P(A)$ του ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa\} \ne \varnothing$ ορίζουμε το άθροισμα: $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \ldots P(\alpha_\kappa)$
- Ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε τον αριθμό $P(\varnothing) = 0$

1

Βρέθηκε ότι ένα κουτί από 50 σπίρτα τα 45 άναψαν ενώ τα άλλα όχι. Ποια η πιθανότητα ότι η τυχαία επιλογή ενός σπίρτου θα είναι από αυτά που δεν άναψαν

Λύση

Επειδή τα σπίρτα που έχει το κουτί είναι 50 έχουμε: $N(\Omega) = 50$.

Από αυτά άναψαν τα 45, οπότε αυτά που δεν άναψαν είναι 5. Αν Α το ενδεχόμενο "το σπίρτο δεν ανάβει" θα είναι $N(A) = 5$. Επομένως η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$$

2

Παίρνουμε στη τύχη έναν από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, ... 24, 25. Υπολογίστε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων.

Α: "ο αριθμός είναι άρτιος"

Β: "ο αριθμός είναι μικρότερος από το 10 και μεγαλύτερος από το 20"

Γ: "ο αριθμός είναι μικρότερος του 26"

Δ: "ο αριθμός είναι μεγαλύτερος του 25"

Ε: "ο αριθμός είναι πρώτος"

Ζ: "ο αριθμός είναι άρτιος και πρώτος"

Λύση

Έχουμε: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 24, 25\}$, οπότε $N(\Omega) = 25$

▶ Έχουμε: $A = \{2, 4, 6, \ldots, 22, 24\}$, οπότε $N(A) = 12$. Άρα είναι: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{12}{25}$

▶ Είναι: $B = \{1, 2, \ldots, 9, 21, 22, 23, 24, 25\}$, οπότε $N(B) = 14$.

Άρα είναι: $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{14}{25}$

▶ Είναι $\Gamma = \Omega$, οπότε $P(\Gamma) = 1$

▶ Είναι $\Delta = \varnothing$, οπότε $P(\Delta) = 0$

▶ Είναι: $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$, οπότε $N(E) = 9$. Άρα είναι: $P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{9}{25}$

▶ Είναι: $Z = \{2\}$, οπότε $N(Z) = 1$ και $P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} = \frac{1}{25}$

3

Μια τσάντα του γκόλφ περιέχει 2 κόκκινα μπαστούνια, 4 μπλε και 5 άσπρα. Τραβάμε ένα μπαστούνι στην τύχη. Υπολογίστε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: "το μπαστούνι είναι κόκκινο"

Β: "το μπαστούνι δεν είναι κόκκινο"

Γ: "το μπαστούνι είναι άσπρο"

Δ: "το μπαστούνι είναι κόκκινο ή άσπρο"

Λύση

Έχουμε: $N(\Omega) = 2 + 4 + 5 = 11$

► Τα κόκκινα μπαστούνια είναι 2, οπότε $N(A) = 2$. Άρα είναι: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{11}$

► Τα μπαστούνια που δεν είναι κόκκινα είναι: $4 + 5 = 9$.

Άρα είναι: $N(B) = 9$, οπότε $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{9}{11}$

Αλλοιώς: Είναι $B = A'$, οπότε $P(B) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{11} = \frac{9}{11}$

► Τα άσπρα μπαστούνια είναι 5, οπότε $N(\Gamma) = 5$. Άρα $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{5}{11}$

► Έχουμε $N(\Delta) = 2 + 5 = 7$. Άρα $P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{7}{11}$

4

Ρίχνουμε ένα ζάρι στον αέρα. Ποια η πιθανότητα των ενδεχομένων. Η ένδειξη του ζαριού είναι:

Α: "άρτιος αριθμός"

Β: "αριθμός μεγαλύτερος του 4"

Γ: "άρτιος ή μεγαλύτερος του 4"

Λύση

Επειδή $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,\}$ είναι $N(\Omega) = 6$

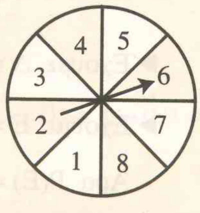
► Είναι $A = \{2, 4, 6\}$. Άρα $N(A) = 3$, οπότε $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

► Είναι $B = \{5, 6\}$. Άρα $N(B) = 2$, οπότε $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

► Είναι $\Gamma = \{2, 4, 5, 6\}$. Άρα $N(\Gamma) = 4$, οπότε $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

5

Η διπλανή σβούρα γυρνάει και καταγράφουμε την ένδειξη της. Βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων.



Α: "ψηφίο του αριθμού 335"

Β: "πολλαπλάσιο του 3"

Γ: "άρτιος αριθμός"

Δ: "6 ή 2"

Ε: "η ένδειξη είναι 11"

Ζ: "σύνθετος αριθμός"

Η: "ούτε πρώτος αριθμός ούτε σύνθετος αριθμός"

Λύση

Επειδή $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ είναι $N(\Omega) = 8$

► Είναι $A = \{3, 5\}$. Άρα $N(A) = 2$, οπότε $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

► Είναι $B = \{3, 6\}$. Άρα $N(B) = 2$, οπότε $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

► Είναι $\Gamma = \{2, 4, 6, 8\}$. Άρα $N(\Gamma) = 4$, οπότε $P(\Gamma) = \dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{4}$

► Είναι $\Delta = \{6, 2\}$. Άρα $N(\Delta) = 2$, οπότε $P(\Delta) = \dfrac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

► Είναι $E = \varnothing$, οπότε $P(E) = 0$

► Είναι $Z = \{4, 6, 8\}$. Άρα $N(Z) = 3$, οπότε $P(Z) = \dfrac{N(Z)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{8}$

► Είναι $H = \{1\}$. Άρα $N(H) = 1$, οπότε $P(H) = \dfrac{N(H)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{8}$

6

Ακέραιοι αριθμοί από το 1 μέχρι το 20 γράφονται σε ομοιόμορφες κάρτες και έπειτα ανακατεύονται. Μια κάρτα επιλέγεται στην τύχη.

α) Βρείτε την πιθανότητα να είναι ο αριθμός:

A: "άρτιος" **B: "τέλειο τετράγωνο"** **Γ: "περιττός"**

Δ: "άρτιος και τέλειο τετράγωνο" **E: "άρτιος ή τέλειο τετράγωνο"**

Z: "άρτιος και περιττός" **H: "άρτιος ή περιττός"**

β) Γράψτε εξισώσεις που συνδέουν τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i) A, B, $A \cap B$ και $A \cup B$ **ii) A, Γ, $A \cap \Gamma$ και $A \cup \Gamma$**

Λύση

α) Έχουμε: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 19, 20\}$ οπότε $N(\Omega) = 20$

► Είναι $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$, οπότε $N(A) = 10$.

Άρα $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$

► Είναι $B = \{1, 4, 9, 16\}$, οπότε $N(B) = 4$. Άρα $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$

► Είναι $\Gamma = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 17, 19\}$, οπότε $N(\Gamma) = 10$. Άρα $P(\Gamma) = \dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$

► Έχουμε $\Delta = \{4, 16\}$, οπότε $N(\Delta) = 2$. Άρα $P(\Delta) = \dfrac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$

► Έχουμε $E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 1, 9\}$, οπότε $N(E) = 12$.

Άρα $P(E) = \dfrac{N(E)}{N(\Omega)} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$

► Έχουμε $Z = \varnothing$, οπότε $P(Z) = 0$

► Έχουμε $H = \Omega$, οπότε $P(H) = 1$

β) i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ii) $(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap B)$

7

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα: $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ και $B = \{\omega_2, \omega_3\}$. Αν $P(A) = \frac{2}{5}$ και $P(B) = \frac{3}{4}$, να βρεθούν οι πιθανότητες $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$ και $P(\omega_3)$

Λύση

Εφ' όσον ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι το σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ έχουμε:
$P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3)$, ή $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) = 1$ (1)

Έχουμε όμως:

- ► $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ και $P(A) = \frac{2}{5}$. Επομένως θα είναι $P(\omega_1) + P(\omega_2) = \frac{2}{5}$ (2)
- ► $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ και $P(B) = \frac{3}{4}$. Επομένως $P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4}$ (3)

Από (1) – (2) έχουμε: $P(\omega_3) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, οπότε από τη σχέση (3) προκύπτει
$P(\omega_2) + \frac{3}{5} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{3}{20}$ Από τη σχέση (2) έχουμε: $P(\omega_1) + \frac{3}{20} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(\omega_1) = \frac{1}{4}$

✓

8

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,5$ και $P(A \cap B) = 0,4$

α) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα

β) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων

Γ: "να πραγματοποιηθεί το A ή το B"

Δ: "να μη πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B"

Λύση

α) Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα. Τότε όμως θα ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,8 + 0,5 = 1,3 > 1$, που αυτό είναι άτοπο. Άρα τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα

β) Είναι $\Gamma = A \cup B$, οπότε $P(\Gamma) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ή $P(\Gamma) = 0,8 + 0,5 - 0,4 = 1,3 - 0,4 = 0,9$

► Το ενδεχόμενο Δ: "να μη πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B" είναι αντίθετο του ενδεχομένου: "να πραγματοποιηθεί το A ή το B".
Επομένως είναι $\Delta = (A \cup B)'$, οπότε $P(\Delta) = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,9 = 0,1$

✓

9

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{7}{10}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ και $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

Γ: "να πραγματοποιηθεί μόνο το A"

Δ: "να πραγματοποιηθεί μόνο το B"

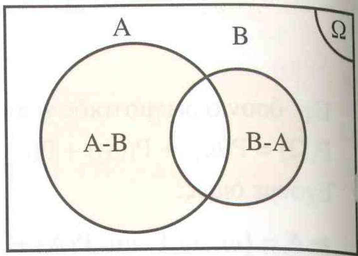
Ε: "να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B"

Λύση

▶ Είναι $\Gamma = A - B$, οπότε $P(\Gamma) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

▶ Είναι $\Delta = B - A$, οπότε $P(\Delta) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$

▶ Έχουμε $E = (A - B) \cup (B - A)$ και επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα θα ισχύει:



$P(E) = P(A - B) + P(B - A) = P(\Gamma) + P(\Delta) =$

$= \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

10

Για τα ενδεχόμενα A, B του δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ και $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

Γ: "να μην πραγματοποιηθεί το A"

Δ: "να πραγματοποιηθεί το A και το B"

Ε: "να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B"

Ζ: "να πραγματοποιηθεί μόνο το B"

Θ: "να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A και B"

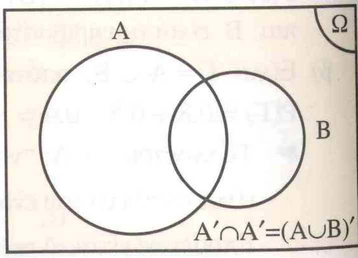
Λύση

▶ Το ενδεχόμενο $\Gamma = A'$, οπότε $P(\Gamma) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

▶ Είναι $\Delta = A \cap B$, οπότε $P(\Delta) = P(A \cap B)$. Όμως $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ή $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$

▶ Είναι $E = A' \cap B' = (A \cup B)'$ Επομένως

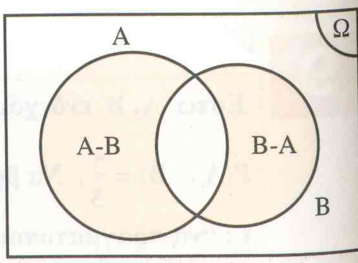


$P(E) = P\left((A \cup B)'\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$

▶ Είναι $Z = B - A$, οπότε $P(Z) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

ή $P(Z) = \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

▶ Είναι $Z = (A - B) \cup (B - A)$ και επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα θα ισχύει:



$P(Z) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

ή $P(Z) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$

11

Για τα ενδεχόμενα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, $P(B') = \frac{1}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$. Να βρείτε τις πιθανότητες: $P(B)$, $P(A)$, $P(A-B)$, $P(B-A)$ και $P\left[(A-B) \cup (B-A)\right]$

Λύση

▶ Είναι $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

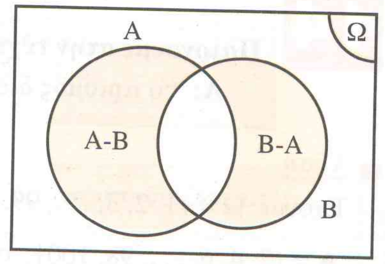
▶ Επειδή $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ έχουμε: $\frac{4}{5} = P(A) + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(A) = \frac{8}{15}$

▶ Επειδή $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{8}{15} - \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

▶ Επειδή $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

▶ Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

$$P\left[(A-B) \cup (B-A)\right] = P(A-B) + P(B-A) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$



12

√ → προσοχή

Ρίχνουμε στον αέρα ένα ζάρι που δεν είναι αμερόληπτο και έστω $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ τα ενδεχόμενα η ένδειξη να είναι 1, 2, 3, 4, 5, 6 αντιστοίχως. Αν $P(A_1) = \frac{1}{12}$, $P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = \frac{1}{6}$ και $P(A_6) = \frac{1}{4}$, ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου: Α: "η ένδειξη να είναι άρτιος αριθμός"

Λύση

Για να έχουμε ένδειξη άρτιο αριθμό πρέπει να φέρουμε 2 ή 4 ή 6

Επομένως $P(A) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

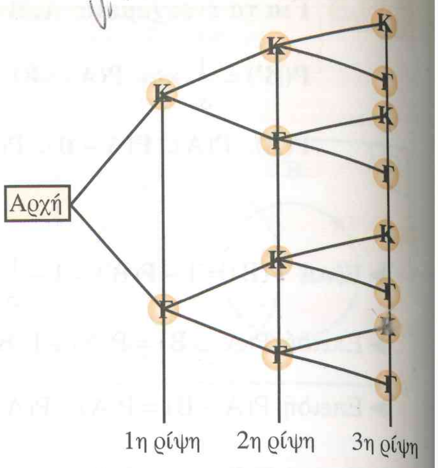
13

√

Ρίχνουμε ένα νόμισμα στον αέρα τρεις φορές και καταγράφουμε τις ενδείξεις.
α) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;
β) Ποια είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων
Α: "οι ενδείξεις είναι ίδιες"
Β: "το πολύ μια ένδειξη είναι γράμματα"

Λύση

Η κατάσταση του πειράματος φαίνεται στο διπλανό δεντροδιάγραμμα.



α) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

$\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$

οπότε $N(\Omega) = 8$

β) ▶ Είναι $A = \{ΚΚΚ, ΓΓΓ\}$, οπότε $N(A) = 2$

Επομένως $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

▶ Είναι $B = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$, οπότε $N(B) = 4$

Επομένως $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

14

Παίρνουμε στην τύχη ένα από τους αριθμούς 1, 2, 3, . . ., 100. Ποια η πιθανότητα:

A: "ο αριθμός διαιρείται με το 2" B: "ο αριθμός διαιρείται με το 5"

Λύση

Έχουμε $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$, οπότε $N(\Omega) = 100$

$A = \{2, 4, 6, \ldots, 98, 100\}$, οπότε $N(A) = 50$. Επομένως: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$

$B = \{5, 10, 15, \ldots, 90, 95, 100\}$, οπότε $N(B) = 20$. Επομένως: $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$

15

Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δείγματος χώρου Ω ισχύουν: $P(A') \le 0{,}28$ και $P(B') \le 0{,}71$

α) Να αποδειχθεί ότι $P(A \cap B) \ge 1{,}01 - P(A \cup B)$

β) Να εξετάσετε αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα

Λύση

Παρατήρηση

Για την απόδειξη ανισοτήτων στις πιθανότητες χρησιμοποιούμε τις παρακάτω προτάσεις:

Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύουν:

▶ $0 \le P(A) \le 1$ $0 \le P(B) \le 1$

▶ Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \le P(B)$.

Θυμίζουμε ακομα ότι:

● $A \cap B \subseteq A \cup B$

● $A \cap B \subseteq A$ ● $A \cap B \subseteq B$

α) Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (1)

Είναι όμως:

▶ $P(A') \le 0{,}28 \Leftrightarrow 1 - P(A) \le 0{,}28 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) \ge 1 - 0{,}28 \Leftrightarrow P(A) \ge 0{,}72$

▶ $P(B') \le 0{,}71 \Leftrightarrow 1 - P(B) \le 0{,}71 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B) \ge 1 - 0{,}71 \Leftrightarrow P(B) \ge 0{,}29$

Επομένως:

$P(A) + P(B) \ge 0{,}72 + 0{,}29 = 1{,}01$, οπότε είναι:

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \geq 1{,}01 - P(A \cap B)$ και από τη σχέση (1) προκύπτει
$P(A \cup B) \geq 1{,}01 - P(A \cap B)$

β) Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.
Τότε όμως θα ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \geq 1{,}01 > 1$ που αυτό είναι άτοπο. Άρα τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα

16

Για δυο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $P(A) = 0{,}8$ και $P(B) = 0{,}5$

α) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα

β) Να αποδείξετε ότι: $P(A \cup B) \geq 0{,}8$ και $P(A \cap B) \leq 0{,}5$

Λύση

α Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.
Τότε όμως θα ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}8 + 0{,}5\ 1{,}3 > 1$, που αυτό είναι άτοπο. Επομένως τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

β) ▶ Επειδή $A \cup B \subseteq A$, έχουμε $P(A \cup B) \leq P(A)$ ή $P(A \cup B) \leq 0{,}8$

▶ Επειδή $A \cap B \subseteq B$, έχουμε $P(A \cap B) \leq P(B)$ ή $P(A \cap B) \leq 0{,}5$

7

Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Απόδειξη

Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων έχουμε:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (1)
Όμως $P(A \cap B) \geq 0$, οπότε $-P(A \cap B) \leq 0 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$ και λόγω της (1) η τελευταία ανισότητα γίνεται $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

8

Για το ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $0 < P(A) < 1$.
Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')} \geq 4$$

Απόδειξη

Επειδή $0 < P(A) < 1$ θα ισχύει και $P(A') = 1 - P(A) > 0$. Έχουμε τώρα διαδοχικά:

$$\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')} \geq 4 \Leftrightarrow P(A') + P(A) \geq 4P(A)\,P(A') \Leftrightarrow 1 - P(A) + P(A) \geq 4P(A)\,(1 - P(A)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 4P(A) - 4(P(A))^2 \Leftrightarrow 4(P(A))^2 - 4P(A) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2P(A) - 1)^2 \geq 0 \text{ (αληθής)}$$

9

Για δυο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω, να δείξετε ότι:

$$P(B) - P(A') \leq P(A \cap B)$$

3

εφαρμογές

Λύση

Είναι $N(\Omega) = 28$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: "αγόρι" Β: "κορίτσι" Γ: "μαύρα μάτια"

Θέλουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cup \Gamma$

► Είναι $N(\Gamma) = 6 + 8 = 14$, οπότε $P(A) = \dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{14}{28} = \dfrac{1}{2}$

► Είναι $N(A) = 12$, οπότε $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{12}{28} = \dfrac{3}{7}$

► Είναι $N(A \cap \Gamma) = 6$, οπότε $P(A \cap \Gamma) = \dfrac{N(A \cap \Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{6}{28} = \dfrac{3}{14}$

Έχουμε τώρα:

$$P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) = \frac{3}{7} + \frac{1}{2} - \frac{3}{14} = \frac{5}{7}$$

24

Ένα κουτί περιέχει 12 άσπρες μπάλες, x κόκκινες και ψ μαύρες. Παίρνουμε τυχαία μια μπάλα. Η πιθανότητα να πάρουμε κόκκινη μπάλα είναι $\frac{1}{2}$ και η πιθανότητα να πάρουμε μαύρη μπάλα είναι $\frac{1}{3}$. Να βρείτε πόσες μπάλες υπάρχουν στο κουτί.

Λύση

Είναι $N(\Omega) = 12 + x + \psi$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: "άσπρη μπάλα" Β: "κόκκινη μπάλα" Γ: "μαύρη μπάλα"

Τότε όμως θα είναι $P(B) = \dfrac{1}{2}$ και $P(\Gamma) = \dfrac{1}{3}$. Επειδή $N(B) = x$ και $N(\Gamma) = \psi$ έχουμε:

► $P(B) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x + \psi + 12} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = x + \psi + 12 \Leftrightarrow x = \psi + 12$ (1)

► $P(\Gamma) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\psi}{x + \psi + 12} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3\psi = x + \psi + 12 \Leftrightarrow 2\psi = x + 12$

και λόγω της (1) έχουμε: $2\psi = \psi + 12 + 12 \Leftrightarrow \psi = 24$, οπότε $x = \psi + 12 = 36$

Επομένως στο κουτί υπάρχουν $12 + 24 + 36 = 72$ μπάλες

25

Σε μια τάξη από 20 παιδιά, τα 10 παιδιά πηγαίνουν στο σχολείο του με το λεωφορείο, 8 παιδιά με ποδήλατο και 6 με λεωφορείο ή ποδήλατο. Παίρνουμε στην τύχη ένα παιδί. Ποια η πιθανότητα των ενδεχομένων

Α: "το παιδί χρησιμοποιεί λεωφορείο"

Β: "το παιδί χρησιμοποιεί ποδήλατο"

Γ: "το παιδί χρησιμοποιεί λεωφορείο ή ποδήλατο ή και τα δύο"

Δ: "να μη χρησιμοποιεί λεωφορείο ή ποδήλατο"

Ε: "να χρησιμοποιεί λεωφορείο αλλά όχι ποδήλατο"

3

εφαρμογές

η

υμε $N(\Omega) = 20$

;πειδή τα παιδιά που χρησιμοποιούν λεωφορείο είναι 10 είναι $N(A) = 10$, οπότε

$$(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

'α παιδιά που χρησιμοποιούν ποδήλατο είναι 8. Άρα $N(B) = 8$, οπότε $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

;πειδή $\Gamma = A \cup B$ έχουμε $P(\Gamma) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ή

$$(\Gamma) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{6}{20} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{5+4-3}{40} = \frac{6}{10} = \frac{2}{5}$$

γιατί $N(A \cap B) = 6$, οπότε $P(A \cap B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$)

ίναι $\Delta = (A \cup B)'$, οπότε $P(\Delta) = P\left[(A \cup B)'\right] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

ίναι $E = A \cap B' = A - B$, οπότε $P(E) = P(A - B)$ ή

$$(E) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

✓

Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ είναι ένα δειγματικός χώρος που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Εκλέγουμε τυχαίως ένα απλό ενδεχόμενα $\lambda \in \Omega$. Αν $f(x) = 2x^2 - 4x + \lambda$, να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση $f(x) = 0$ να μην έχει πραγματικές ρίζες

η

ξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες όταν και μόνο όταν ισχύει

$0 \Leftrightarrow 16 - 8\lambda < 0 \Leftrightarrow 8\lambda > 16 \Leftrightarrow \lambda > 2$. Άρα $\lambda \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8,\} = A$

υμε $N(\Omega) = 8$ και $N(A) = 6$, οπότε $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

✓

Δίνεται το σύστημα: $\{x - 2\psi = 3$ και $\alpha x + (\alpha^2 - 5\alpha + 2)\psi = 6\}$. Για να προσδιορίσουμε την τιμή της παραμέτρου α ρίχνουμε ένα ζάρι στον αέρα. Η ένδειξη του ζαριού καθορίζει την τιμή του α. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων.

Α: "το σύστημα έχει άπειρες λύσεις"

Β: "το σύστημα είναι αδύνατο"

Γ: "το σύστημα έχει μια μόνο λύση"

Δ: "το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, \psi) = (1, -1)$

η

ι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$