

Θέματα και Αναλυτικές Απαντήσεις

1

Με ποιον αριθμό είναι ίσο το άθροισμα

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 49 + 50) + (99 + 98 + 97 + \dots + 51 + 50)$$

A. 5050.

B. 5.100.

Γ. 5.000.

Δ. 550.

Ε. 500.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Οι αριθμοί στις δύο παρενθέσεις, αν οργανωθούν σε ζεύγη, δίνουν σταθερό άθροισμα 100.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Με βάση την παρατήρηση, αρκεί να υπολογίσω πόσα ζεύγη αριθμών δημιουργούνται.

Παρατηρώ ότι δημιουργούνται 50 ζεύγη αριθμών και κάθε ζεύγος δίνει άθροισμα 100, άρα το συνολικό άθροισμα είναι $50 \times 100 = 5.000$.

Απάντηση: Γ.

2

Το άθροισμα δύο θετικών ακέραιων αριθμών α και β είναι 64. Με ποιο από τα παρακάτω κλάσματα δεν μπορεί να είναι ισοδύναμο το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$;

A. $\frac{3}{5}$.

B. $\frac{1}{3}$.

Γ. $\frac{7}{9}$.

Δ. $\frac{3}{4}$.

Ε. Δεν μπορούμε να βρούμε τέτοιο κλάσμα.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Το θέμα αναφέρεται σε ισοδύναμα κλάσματα.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Μελετώ το άθροισμα των όρων στα ισοδύναμα κλάσματα.

Αν έχω τα ισοδύναμα κλάσματα $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}$, τότε το άθροισμα των όρων τους είναι 8, 16, 24, 32 αντίστοιχα, είναι δηλαδή πολλαπλάσια του 8. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να εντοπίσω εκείνη την απάντηση στην οποία το άθροισμα των όρων του κλάσματος δεν είναι ούτε διαιρέτης ούτε πολλαπλάσιο του 64.

Ένας άλλος τρόπος, περισσότερο αυστηρός από μαθηματική σκοπιά, είναι και ο παρακάτω:

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{5}$, τότε οι α και β θα μπορούσαν να ήταν $3k$ και $5k$ αντίστοιχα, οπότε το άθροισμά τους θα ήταν $8k$. Άρα $8k = 64$, που σημαίνει ότι $k = 8$, επομένως $\alpha = 24$ και $\beta = 40$.

Με παρόμοιο συλλογισμό καταλήγουμε ότι μπορεί το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ να είναι ίσο με $\frac{1}{3}$ ή $\frac{7}{9}$. Όμως, η περίπτωση του $\frac{3}{4}$ οδηγεί στην εξίσωση $7k = 64$, που είναι αδύνατη, γιατί ο k είναι θετικός ακέραιος.

Απάντηση: Δ.

3

Πόσες ακέραιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός x , όταν ισχύει: $11 < \sqrt{x} < 12$;

A. 23.

B. 22.

Γ. 12.

Δ. 1.

Ε. Καμία.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Έχω μία ανίσωση η οποία περιέχει μία ρίζα ακέραιου αριθμού και δύο ακεραίους αριθμούς.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Εκφράζω όλους τους αριθμούς σε μορφή ριζών ή όλους σε μορφή ακεραίων.

Επειδή $11 = \sqrt{121}$ και $12 = \sqrt{144}$, θα πρέπει να βρω τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $\sqrt{121} < \sqrt{x} < \sqrt{144}$. Άρα, υψώνοντας στο τετράγωνο θα πρέπει για τον αριθμό x να ισχύει: $121 < x < 144$. Οι ακέραιοι που ικανοποιούν την ανίσωση είναι οι 122, 123, ..., 143, δηλαδή συνολικά 22 ακέραιοι.

Απάντηση: B.

4

Ένα λεωφορείο διαθέτει 66 θέσεις. Ξεκινά από την αφετηρία άδειο και στην πρώτη στάση ανεβαίνει ένας επιβάτης, στη δεύτερη στάση ανεβαίνουν δύο άτομα, στην τρίτη στάση ανεβαίνουν τρία άτομα και ούτω καθεξής. Σε ποια στάση όλες οι θέσεις θα καταληφθούν από επιβάτες, αν είναι γνωστό ότι κανένας επιβάτης δεν κατέβηκε από το λεωφορείο;

A. Στην 7η.

B. Στην 8η.

Γ. Στην 9η.

Δ. Στην 10η.

Ε. Στην 11η.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Πρόκειται για άθροισμα διαδοχικών αριθμών.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Αθροίζω διαδοχικούς αριθμούς, μέχρι να φτάσω σε αποτέλεσμα 66: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66$.

Απάντηση: E.

5

Σε ένα εργοστάσιο 6 ίδιες μηχανές, όταν δουλεύουν συγχρόνως, παράγουν 200 ίδια αντικείμενα σε 4 ώρες. Πόσες ώρες θα χρειαστούν 8 τέτοιες μηχανές να παράγουν τα 200 αντικείμενα δουλεύοντας συγχρόνως;

A. 3 ώρες.

B. 3 ώρες και 20 λεπτά.

Γ. 2 ώρες και 40 λεπτά.

Δ. 2 ώρες.

Ε. Κανένα από τα προηγούμενα.

Παρατηρώ: Ο αριθμός των αντικειμένων και στις δύο περιπτώσεις είναι 200, δηλαδή σταθερός.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Μελετώ τις ώρες που θα χρειαζόταν μία μόνο μηχανή για να κατασκευάσει τα 200 αντικείμενα.

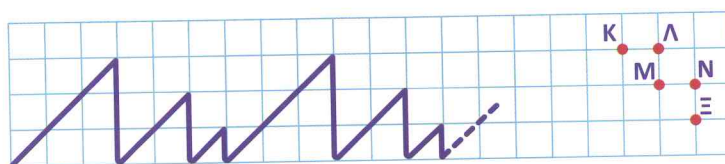
Η μία μηχανή μόνη της θα χρειαζόταν $6 \times 4 = 24$ ώρες. Αυτό σημαίνει ότι συνολικά, δηλαδή αθροιστικά, χρειάζονται 24 ώρες.

Επομένως, οι 8 μηχανές θα χρειαστούν $24 : 8 = 3$ ώρες.

Απάντηση: Α.

6

Ας υποθέσουμε ότι προσπαθεί κάποιος να συνεχίσει το μοτίβο που ακολουθούν τα ευθύγραμμα τμήματα.



Από ποιο σημείο θα περάσει ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα;

Α. Από το Κ.

Β. Από το Λ.

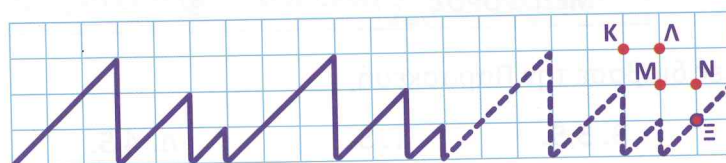
Γ. Από το Μ.

Δ. Από το Ν.

Ε. Από το Ξ.

Παρατηρώ: Όλα τα πλάγια ευθύγραμμα τμήματα είναι διαγώνιοι τετραγώνων, διαστάσεων 3×3 , 2×2 και 1×1 .

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Με βάση την παρατήρηση ολοκληρώνω την ακολουθία των τμημάτων και παρατηρώ ότι η γραμμή θα περάσει από το σημείο Ξ.



Απάντηση: Ε.

7

Ο καθηγητής των Μαθηματικών ζήτησε από τους μαθητές του να γράψουν μία εξίσωση η λύση της οποίας παριστάνεται με όλη τη σειρά των παρακάτω εικόνων.



Ποια είναι η εξίσωση αυτή;

Α. $3x + 5 = 8x + 3$.

Β. $5x + 3 = 3x + 8$.

Γ. $5x - 3 = 3x - 8$.

Δ. $3x - 5 = 5x + 8$.

Ε. $2x = 5$.

Παρατηρώ: Στο τέλος της διαδικασίας στο πρώτο μέλος απομένει μόνο το τετράγωνο και έχουμε από τη μία μεριά ένα τετράγωνο και από την άλλη 2,5 σφαίρες.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Με βάση την παρατήρηση, θεωρώ ότι ο άγνωστος είναι το τετράγωνο.

Στην πρώτη εικόνα η μετάφραση της ισορροπίας της ζυγαριάς είναι $5x + 3 = 3x + 8$. Άρα, αν ονομάσω x το τετράγωνο, μπορώ να καταλήξω στην εξίσωση $x = 2,5$. Πηγαίνοντας προς τα πίσω, αντικαθιστώ κάθε τετράγωνο με x και κάθε σφαίρα με μία μονάδα. Οπότε, καταλήγω ότι η αρχική εξίσωση είναι $5x + 3 = 3x + 8$.

Απάντηση: Β.

8

Στον πίνακα βλέπουμε τις ώρες που διάβασε η Ελένη κατά τη διάρκεια 5 ημερών μιας εβδομάδας και τον μέσο όρο του εβδομαδιαίου διαβάσματος. Από τον πίνακα λείπουν οι ώρες που διάβασε την Τρίτη και την Παρασκευή, για τις οποίες γνωρίζουμε ότι είναι ίδιες.

ΗΜΕΡΕΣ	ΩΡΕΣ ΔΙΑΒΑΣΜΑΤΟΣ
ΔΕΥΤΕΡΑ	4
ΤΡΙΤΗ	
ΤΕΤΑΡΤΗ	3
ΠΕΜΠΤΗ	5
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ	
ΣΑΒΒΑΤΟ	6
ΚΥΡΙΑΚΗ	8
ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ	5

Πόσες ώρες διάβασε την Παρασκευή;

A. 6.

B. 5,5.

Γ. 5.

Δ. 4,5.

E. 4.

Παρατηρώ: Μπορώ να υπολογίσω το σύνολο των ωρών διαβάσματος σε μία εβδομάδα (επτά ημέρες).

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Με βάση τον μέσο όρο υπολογίζω το σύνολο των ωρών διαβάσματος, από το οποίο αφαιρώ το σύνολο των ωρών που υπάρχουν στον πίνακα.

Αφού ο μέσος όρος είναι 5, άρα το σύνολο των ωρών διαβάσματος τη συγκεκριμένη εβδομάδα είναι $7 \times 5 = 35$. Το σύνολο των ωρών που αναγράφονται στον πίνακα είναι 26, επομένως την Τρίτη και την Παρασκευή διάβασε συνολικά 9 ώρες, δηλαδή 4,5 ώρες κάθε ημέρα.

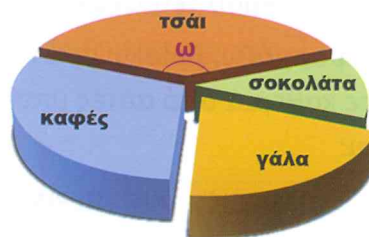
Απάντηση: Δ.

9

Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζεται ο αριθμός των 4 ειδών ποτών που πουλήθηκαν σε μία ημέρα σε μία καφετέρια.

Ποτό	Ποσότητα
Καφές	60
Τσάι	75
Ζεστή σοκολάτα	25
Γάλα	40

Αν κατασκευάσουμε ένα κυκλικό διάγραμμα (πίτα), με πόσες μοίρες θα είναι ίση η γωνία ω που θα αντιστοιχεί στο τσάι;



- A. 120° . B. 108° . Γ. 135° . Δ. 145° . Ε. 150° .

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Το θέμα μου ζητά να μετατρέψω τα αριθμητικά δεδομένα σε μοίρες.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Κάνω αναγωγή του αθροίσματος $60 + 75 + 25 + 40 = 200$ στον αριθμό 360.

Το τσάι είναι τα $\frac{75}{200}$ της συνολικής ποσότητας των ποτών που σερβιρίστηκαν. Η αναγωγή σε μοίρες γίνεται με το γινόμενο $\frac{75}{200} \times 360^\circ = 135^\circ$.

Απάντηση: Γ.

10

Ρίχνουμε τρία ζάρια και προσθέτουμε τα τρία αποτελέσματα που εμφανίζονται.

Πόσα συνολικά διαφορετικά αποτελέσματα μπορεί να προκύψουν από τη διαδικασία αυτή;

- A. 20. B. 18. Γ. 17. Δ. 16. Ε. Κανένα από τα προηγούμενα.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Αθροίζω όλους τους συνδυασμούς ανά 3 των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5, 6.

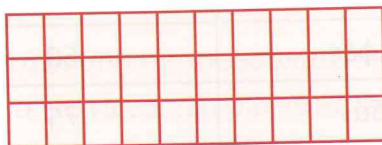
Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Υπολογίζω την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του αθροίσματος.

Η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος είναι 3 ενώ η μέγιστη είναι 18. Όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι όλοι οι ακέραιοι αριθμοί από το 3 μέχρι και το 18.

Απάντηση: Δ.

11

Διαθέτουμε 30 ίδια τετράγωνα. Σε καθένα από αυτά οι πλευρές είναι ίσες με 2 cm. Με αυτά τα 30 τετράγωνα μπορούμε να κατασκευάσουμε διάφορα ορθογώνια παραλληλόγραμμα, όπως το παρακάτω, ανάλογα με τον τρόπο που τα διατάσσουμε.



Ποια είναι η ελάχιστη περίμετρος που μπορούμε να πετύχουμε σε κάποιο από αυτά τα ορθογώνια;

- A. 52 cm. B. 44 cm. Γ. 40 cm. Δ. 36 cm. E. 30 cm.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Μπορώ να κατασκευάσω αρκετά ορθογώνια διαφορετικών διαστάσεων. Επιπλέον, η πλευρά κάθε μικρού τετραγώνου είναι 2 cm.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Βρίσκω πρώτα όλες τις δυνατές διατάξεις των μικρών τετραγώνων και σε καθεμία από αυτές υπολογίζω την περίμετρο. Οι δυνατές διατάξεις είναι:

ΔΙΑΤΑΞΗ	ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ
1×30	124
2×15	68
3×10	52
5×6	44

Παρατηρώ ότι η μέγιστη περίμετρος αντιστοιχεί στη διάταξη όπου όλα τα τετράγωνα τοποθετούνται σε μία μόνο γραμμή, ενώ η ελάχιστη αντιστοιχεί στη διάταξη όπου η διαφορά μεταξύ του πλήθους των γραμμών και του πλήθους των στηλών είναι η ελάχιστη δυνατή.

Απάντηση: B.

12

Διαθέτουμε 20 αντικείμενα και 5 κουτιά. Θέλουμε να τοποθετήσουμε τα 20 αντικείμενα στα 5 κουτιά, αλλά θα πρέπει:

- να μην υπάρχουν δύο κουτιά με τον ίδιο αριθμό αντικειμένων
- να μην υπάρχει κουτί που να περιέχει 4 αντικείμενα.

Πόσα το πολύ αντικείμενα μπορεί να περιέχει ένα κουτί;

- A. 12. B. 11. Γ. 10. Δ. 9. E. 8.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Το θέμα μου ζητά να μεγιστοποιήσω τον αριθμό των αντικειμένων σε ένα μόνο κουτί.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Ελαχιστοποιώ τα αντικείμενα σε 4 από τα 5 κουτιά. Τέσσερα κουτιά θα περιέχουν 1, 2, 3 και 5 αντικείμενα με συνολικό αριθμό αντικειμένων 11. Άρα, το τέταρτο κουτί θα περιέχει 9 αντικείμενα, που είναι και ο μέγιστος αριθμός αντικειμένων σε ένα κουτί.

Απάντηση: Δ.

13

Ποιο είναι το συνολικό εμβαδόν των δύο τετραγώνων;

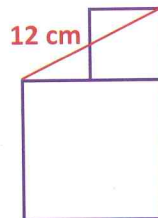
A. 100 cm^2 .

B. 120 cm^2 .

Γ. 140 cm^2 .

Δ. 144 cm^2 .

Ε. Δεν μπορεί να υπολογιστεί.



ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Τα 12 cm είναι υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Αφού θα πρέπει να υπολογίσω άθροισμα εμβαδών δύο τετραγώνων και γνωρίζω την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου, αξιοποιώ το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ονομάζω α και β τις πλευρές των δύο τετραγώνων. Παρατηρώ ότι σχηματίζεται ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 12 και κάθετες πλευρές α και β . Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχω $\alpha^2 + \beta^2 = 12^2$. Αλλά και το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων είναι $\alpha^2 + \beta^2$. Επομένως, η σωστή απάντηση είναι 144 cm^2 .

Απάντηση: Δ.

14

Στη διπλανή εικόνα υπάρχουν 4 ίσοι κύκλοι που εφάπτονται στις πλευρές ενός τετραγώνου και μεταξύ τους. Κάθε κύκλος έχει ακτίνα 2 cm και εμβαδόν $12,56 \text{ cm}^2$ περίπου.

Μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή του εμβαδού του έγχρωμου μέρους του τετραγώνου;

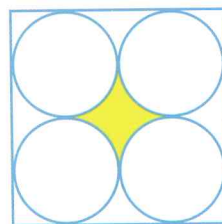
A. Μεταξύ 5 cm^2 και 6 cm^2 .

B. Μεταξύ 4 cm^2 και 5 cm^2 .

Γ. Μεταξύ 3 cm^2 και 4 cm^2 .

Δ. Μεταξύ 2 cm^2 και 3 cm^2 .

Ε. Κανένα από τα προηγούμενα.



ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Το σχήμα έχει άξονες συμμετρίας.

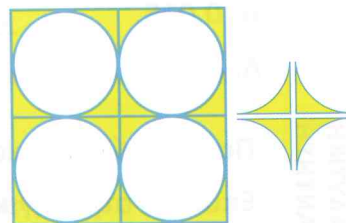
Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Θα χωρίσω σε τμήματα το σχήμα με τη βοήθεια αξόνων συμμετρίας.

Στη διπλανή εικόνα παρατηρώ ότι το σχήμα του οποίου αναζητώ το εμβαδόν έχει χωριστεί σε 4 ίσα κομμάτια (καμπυλόγραμμα τρίγωνα). Συνολικά υπάρχουν 16 τέτοια τρίγωνα.

Αν από το εμβαδόν του τετραγώνου αφαιρέσω τους τέσσερις κύκλους, θα βρω το εμβαδόν των 16 τριγώνων. Η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τέσσερις ακτίνες, δηλαδή 8 cm .

Άρα $64 - 4 \times 12,56 = 13,76 \text{ cm}^2$. Επομένως, το εμβαδόν των τεσσάρων καμπυλόγραμμων τριγώνων θα είναι $13,76 : 4 = 3,44 \text{ cm}^2$.

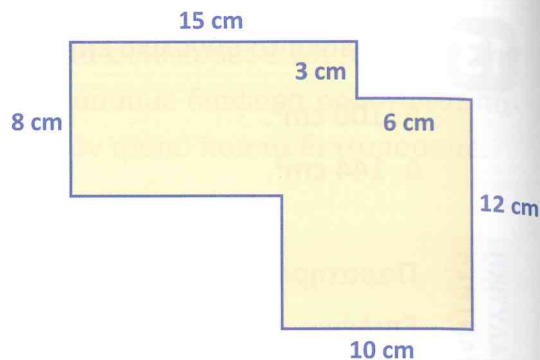
Απάντηση: Γ.



15

Στο διπλανό σχήμα όλες οι γωνίες είναι ορθές και δίνονται τα μήκη ορισμένων πλευρών. Πόσο είναι το εμβαδόν του σχήματος;

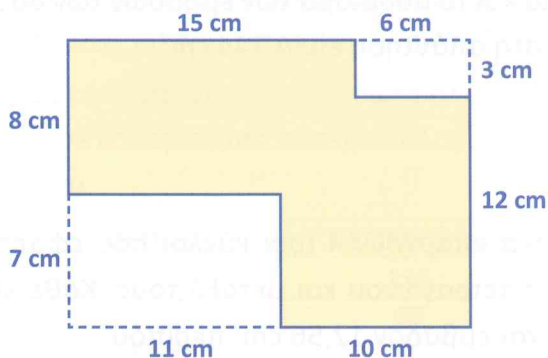
- A. 200 cm^2 . B. 220 cm^2 . Γ. 240 cm^2 .
Δ. 320 cm^2 . Ε. 400 cm^2 .



ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Μπορώ εύκολα να υπολογίσω όλα τα τμήματα στην περίμετρο του σχήματος.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Μελετώ το παρακάτω σχήμα.



Υπολογίζω το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου, που είναι $21 \times 15 = 315 \text{ cm}^2$, και το άθροισμα των εμβαδών των δύο μικρότερων: $3 \times 6 + 7 \times 11 = 18 + 77 = 95 \text{ cm}^2$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με $315 - 95 = 220 \text{ cm}^2$.

Απάντηση: B.

16

Αν για τους θετικούς αριθμούς α και β ισχύει $\sqrt{0,04 \times 0,4 \times \alpha} = 0,4 \times 0,04 \times \sqrt{\beta}$ ποια είναι η τιμή του κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$;

- A. 0,016. B. 1,60. Γ. 0,16.
Δ. 16. Ε. Κανένα από τα προηγούμενα.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Τα α και β βρίσκονται κάτω από τετραγωνικές ρίζες.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Προσπαθώ να απαλλαγώ από τις τετραγωνικές ρίζες, ώστε να μπορώ να υπολογίσω τον λόγο των α και β .

Από την ισότητα $\sqrt{0,04 \times 0,4 \times \alpha} = 0,4 \times 0,04 \times \sqrt{\beta}$ προκύπτει ότι:
 $0,04 \times 0,4 \times \alpha = 0,16 \times 0,0016 \times \beta$.

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{0,16 \times 0,0016}{0,04 \times 0,4}$.

Επειδή $0,04 \times 0,4 = 0,016$, θα ισχύει τελικά ότι $\frac{\alpha}{\beta} = 0,016$.

Απάντηση: A.

17 Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, για τους οποίους ισχύει $0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta$, και οι σχέσεις: 1) $\frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta} > \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta}$, 2) $\frac{\beta + \delta}{\alpha + \gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$ και 3) $\frac{\alpha \times \beta}{\gamma \times \delta} > 1$.

Πόσες από αυτές είναι σωστές;

A. Η 1 και η 3.

B. Η 1 και η 2.

Γ. Καμία από αυτές.

Δ. Μόνο η 1.

Ε. Όλες.

Παρατηρώ: Μπορώ να υπολογίσω ποια είναι η σχέση κάθε κλάσματος με τη μονάδα.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Συγκρίνω κάθε κλάσμα με τη μονάδα. Παρα-

τηρώ ότι $\frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta} > 1$, $\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} < 1$, $\frac{\beta + \delta}{\alpha + \gamma} > 1$, $\frac{\alpha \times \beta}{\gamma \times \delta} < 1$, $\frac{\beta}{\gamma} < 1$. Επομένως, ισχύει μόνο

η σχέση $\frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta} > \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta}$.

Απάντηση: Δ.

18 Αν α ένας θετικός αριθμός, τι από τα παρακάτω ισχύει για το γινόμενο:

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha};$$

A. Είναι ακέραιος αριθμός.

B. Είναι πάντα αριθμός μεγαλύτερος του 1.

Γ. Είναι ίσο με α^3 .

Δ. Είναι πάντα μεγαλύτερος του α .

Ε. Κανένα από τα προηγούμενα.

Παρατηρώ: Ανά δύο οι παράγοντες του γινομένου δίνουν αποτέλεσμα α .

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Υπολογίζω τα ζεύγη της μορφής $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha}$. Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού αυτού είναι $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.

Παρατηρώ ότι έχω 3 γινόμενα της μορφής $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha}$, άρα το αποτέλεσμα των 3 ζευγών είναι $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3$.

Απάντηση: Γ.

19 Παρακάτω καταγράφονται τα βήματα με τα οποία ένας μαθητής έλυσε την εξίσωση $2 \cdot (x + 1) = \frac{x}{2} + 14$, μόνο που δεν έβαλε τα βήματα αυτά στη σωστή σειρά.

A. $4x - x = 28 - 4$ **B.** $x = 8$ **Γ.** $2x + 2 = \frac{x}{2} + 14$ **Δ.** $3x = 24$ **Ε.** $4x + 4 = x + 28$ **ΣΤ.** $x = \frac{24}{3}$

Ποια είναι η σωστή σειρά;

A. Γ. - Α. - Δ. - Ε. - ΣΤ. - Β.

B. Ε. - Γ. - Α. - Δ. - ΣΤ. - Β.

Γ. Γ. - Ε. - Α. - Δ. - ΣΤ. - Β.

Δ. Γ. - Ε. - Α. - ΣΤ. - Δ. - Β.

Ε. Κανένα από τα προηγούμενα.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Τα βήματα επίλυσης της εξίσωσης δεν έχουν τοποθετηθεί στη σωστή σειρά.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Μελετώ ένα προς ένα τα βήματα και προσπαθώ να τα βάλω με την εξής σειρά:

Απαλοιφή παρενθέσεων → απαλοιφή παρονομαστών → διαχωρισμός γνωστών από αγνώστους → εκτέλεση των πράξεων μεταξύ αγνώστων και μεταξύ αριθμών → διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου.

Απάντηση: Γ.

20

Δίνεται ο παρακάτω αλγόριθμος:

- Κατασκεύασε ένα ορθογώνιο τρίγωνο που η μία γωνία του να είναι ίση με 60° .
- Υπολόγισε το μήκος της μεγαλύτερης πλευράς και ονόμασέ το α .
- Υπολόγισε το μήκος της μικρότερης πλευράς και ονόμασέ το β .
- Υπολόγισε το μήκος της τρίτης πλευράς και ονόμασέ το γ .
- Ονόμασε δ τη δεκαδική έκφραση του κλάσματος $\frac{\beta}{\gamma}$.
- Τύπωσε δ .
- Τέλος.

Σε τι χρησιμεύει ο αλγόριθμος αυτός;

- A.** Υπολογίζει τις γωνίες του τριγώνου.
- B.** Βρίσκει τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
- Γ.** Υπολογίζει το εμβαδόν του τριγώνου.
- Δ.** Υπολογίζει το συνημίτονο των 60° .
- E.** Υπολογίζει την εφαπτομένη της γωνίας των 30° .

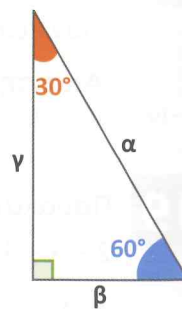
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Ο αλγόριθμος υπολογίζει τον λόγο δύο κάθετων πλευρών του ορθογώνιου τριγώνου.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Υπολογίζω τη γωνία η οποία βρίσκεται απέναντι από τη μικρότερη πλευρά και αναζητώ τον κατάλληλο τριγωνομετρικό αριθμό που εκφράζει ο λόγος των δύο κάθετων πλευρών του τριγώνου. Για ευκολία κατασκευάζω ένα σχήμα.

Στο σχήμα είναι φανερό ότι ο λόγος (κλάσμα) $\frac{\beta}{\gamma}$ εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας των 30° .

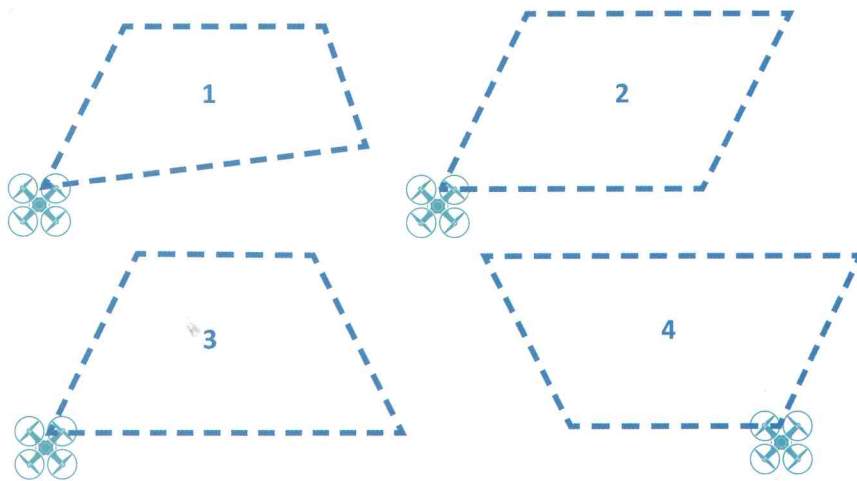
Απάντηση: E.



Σε ένα μικρό drone φορτώνουμε ένα πρόγραμμα με την παρακάτω σειρά εντολών:

- Στρίψε δεξιά 30° .
- Προχώρησε μπροστά 100.
- Στρίψε δεξιά 60° .
- Προχώρησε μπροστά 80.
- Στρίψε δεξιά 60° .
- Προχώρησε μπροστά 100.
- Στρίψε δεξιά 120° .
- Προχώρησε μπροστά 180.
- Τέλος.

Ποια από τις παρακάτω διαδρομές θα ακολουθήσει το drone;



- A. Την 1. B. Τη 2. Γ. Την 3. Δ. Την 4. Ε. Καμία.

Παρατηρώ: Στο πρόγραμμα υπάρχουν δύο εντολές με ίσες αποστάσεις και 2 εντολές με ίσες γωνίες.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Μελετώ βήμα προς βήμα τις εντολές και για κάθε εντολή αναζητώ τη σωστή κίνηση στα σχήματα.

Αρχικά παρατηρώ ότι σε όλα τα σχήματα οι δύο πρώτες εντολές έχουν εκτελεστεί σωστά. Η τρίτη εντολή, «στρίψε δεξιά 60° », δεν έχει εκτελεστεί στο σχήμα 4, το οποίο και απορρίπτεται, ενώ η τέταρτη εντολή, «προχώρησε μπροστά 80», φαίνεται να έχει εκτελεστεί σωστά στα σχήματα 1, 2 και 3. Η πέμπτη εντολή, «στρίψε δεξιά 60° », έχει εκτελεστεί σωστά μόνο στα σχήματα 1 και 3.

Οι επόμενες εντολές έχουν εκτελεστεί σωστά μόνο στο σχήμα 3.

Απάντηση: Γ.

22

Ένα νούφαρο έχει τις ρίζες του στον πυθμένα μιας λίμνης. Τα δεκατρία δέκατα έβδομα του ύψους του νούφαρου βρίσκονται μέσα στο νερό ενώ πάνω από την επιφάνεια του νερού το νούφαρο αναπτύσσεται κατά 20 cm.

Πόσο είναι το βάθος της λίμνης στο σημείο που βρίσκεται το νούφαρο;

- A. 1 m. B. 65 cm. Γ. 85 cm. Δ. 60 cm. Ε. 30,5 cm.



ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Γνωρίζω το μήκος των $\frac{4}{17}$ του νούφαρου.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Εργάζομαι με τη στρατηγική της αναγωγής στη μονάδα.

Αφού τα $\frac{13}{17}$ του λουλουδιού βρίσκονται μέσα στο νερό, τα 20 cm, που εξέχουν από το νερό, αντιστοιχούν στα $\frac{4}{17}$ του μήκους του λουλουδιού. Επομένως, στο $\frac{1}{17}$ του μήκους του λουλουδιού αντιστοιχούν τα 5 cm. Τελικά, στα $\frac{13}{17}$ του μήκους του λουλουδιού αντιστοιχούν $13 \times 5 \text{ cm} = 65 \text{ cm}$.

Απάντηση: B.

23

Η Μαίρη θέλει να κόψει μία διακοσμητική χάρτινη λωρίδα σε τρία είδη κομματιών, σε μεγάλα, μεσαία και μικρά. Κόβει αρχικά τη λωρίδα σε 10 μεγάλα κομμάτια. Στη συνέχεια παίρνει τα μισά από αυτά και τα κόβει σε 3 μεσαία κομμάτια το καθένα. Τέλος, παίρνει το ένα τρίτο των μεσαίων κομματιών και τα κόβει σε 2 μικρά κομμάτια.



Πόσα συνολικά κομμάτια της χάρτινης λωρίδας υπάρχουν στο τέλος;

- A. 15. B. 20. Γ. 25.
Δ. Άπειρα. Ε. Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Μπορώ να υπολογίσω σε κάθε φάση το πλήθος των κομματιών.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Υπολογίζω σε κάθε φάση το πλήθος των κομματιών που κόβονται και αυτών που παραμένουν.

Αρχικά από τα 10 μεγάλα κομμάτια παραμένουν 5. Τα άλλα 5 κόβονται το καθένα σε 3 κομμάτια, άρα σε 15 μεσαία κομμάτια.

Από αυτά τα 15 κομμάτια, τα 10 παραμένουν. Τα άλλα 5 κόβονται το καθένα σε 2 κομμάτια, άρα σε 10 μικρά κομμάτια.

Στο τέλος υπάρχουν 5 μεγάλα, 10 μεσαία και 10 μικρά κομμάτια, δηλαδή 25 κομμάτια συνολικά.

Απάντηση: Γ.

24

Σε ένα ποσό Α εφαρμόζουμε 3 διαδοχικές μειώσεις, η πρώτη μείωση είναι 20%, η δεύτερη 30% και η τρίτη 40%. Ποιο είναι το τελικό ποσοστό μείωσης του ποσού Α;

A. 90%.

B. 86%.

Γ. 66,4%.

Δ. 33,6%.

Ε. Κανένα από τα προηγούμενα.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Στα δεδομένα δεν δίνονται ποσότητες, αλλά μόνο ποσοστά.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Για να είναι πιο εύκολοι οι υπολογισμοί μου, υποθέτω ότι το αρχικό ποσό Α είναι 100, και επάνω σε αυτήν την ποσότητα εφαρμόζω τα ποσοστά μείωσης.

Μετά την πρώτη μείωση το ποσό Α ελαττώνεται κατά $20\% \times 100 = 20$. Στο ποσό που απομένει, δηλαδή στο 80, η μείωση είναι ίση με $30\% \times 80 = 24$ και τέλος στο υπόλοιπο ποσό, δηλαδή στο 56, η μείωση ανέρχεται σε $40\% \times 56 = 22,4$. Η τελική μείωση είναι $20 + 24 + 22,4 = 66,4$ στην αρχική τιμή 100.

Απάντηση: Γ.

25

Μία εταιρεία ασφαλείας χρησιμοποιεί συνολικά 5 υπαλλήλους για να προστατεύει ένα κτίριο γραφείων για 30 ημέρες. Κάθε ημέρα χρειάζονται 4 υπάλληλοι για την προστασία του κτιρίου εναλλάξ (ο 5ος υπάλληλος έχει ρεπό). Αν όλοι οι υπάλληλοι εργάστηκαν τις ίδιες ημέρες, πόσες ημέρες εργάστηκε ο καθένας στο διάστημα των 30 ημερών;

A. 25.

B. 24.

Γ. 30.

Δ. 6.

Ε. 26.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Παρατηρώ: Καθημερινά απασχολούνται 4 από τους 5 υπαλλήλους και ένας κάθε φορά έχει ρεπό.

Επιλέγω στρατηγική και εφαρμόζω: Ονομάζω Α, Β, Γ, Δ, Ε τους πέντε υπαλλήλους. Στις 5 πρώτες ημέρες όλοι θα έχουν δουλέψει από 4 ημέρες και θα έχουν μία ημέρα ρεπό. Για παράδειγμα, θα μπορούσαν να είναι:

(Α, Β, Γ, Δ – Ε ρεπό), (Α, Β, Γ, Ε – Δ ρεπό), (Α, Β, Δ, Ε – Γ ρεπό), (Α, Γ, Δ, Ε – Β ρεπό), (Β, Γ, Δ, Ε – Α ρεπό)

Άρα, στις $5 \times 6 = 30$ ημέρες θα έχουν δουλέψει $4 \times 6 = 24$ ημέρες και θα έχουν πάρει $1 \times 6 = 6$ ημέρες ρεπό.

Απάντηση: Β.