Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω. Αν τα απλά ενδεχόμενα του Ω είναι ισοπίθανα τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$

Δηλαδή ο υπολογισμός της $P(A)$ ανάγεται στην απαρίθμηση των στοιχείων των συνόλων Ω και A. Η απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου γίνεται με τις παρακάτω μεθόδους της Συνδυαστικής η οποία είναι ένας βασικός κλάδος των Μαθηματικών.

Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Αν για μια διατεταγμένη νιάδα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ υπάρχουν $\varkappa_1$ δυνατότητες συμπλήρωσης της πρώτης θέσης α_1, $\varkappa_2$ δυνατότητες συμπλήρωσης της δεύτερης θέσης α_2, ... $\varkappa_\nu$ δυνατότητες συμπλήρωσης της νιοστής θέσης α_ν, τότε υπάρχουν $\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 \ldots \varkappa_\nu$ διαφορετικές νιάδες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Αν μια ορισμένη εργασία αναλύεται σε δυο βήματα και: το 1ο βήμα διεκπεραιώνεται με μ διαφορετικούς τρόπους και: σε καθένα από τους μ αυτούς τρόπους υπάρχουν ν διαφορετικοί τρόποι διεκπεραίωσης του 2ου βήματος, τότε η εργασία διεκπαιρεώνεται με $\mu \cdot \nu$ διαφορετικούς τρόπους.

Μεταθέσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν δοθούν ν διαφορετικά στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, τότε καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους μετους οποίους μπορούμε όλα τα στοιχεία να τα βάλουμε σε μια σειρά λέγεται **μετάθεση** των στοιχείων αυτών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

▶ Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό μια μετάθεση των ν στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι μια διατεταγμένη νιάδα με στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$

▶ Δυο μεταθέσεις ν διαφορετικών στοιχείων είναι **διαφορετικές**, όταν υπάρχει ένα τουλάχιστο στοιχείο που είναι σε διαφορετικές θέσεις στις δυο μεταθέσεις.

Για παράδειγμα

Οι μεταθέσεις αβγδ και αγβδ των στοιχείων α, β, γ, και δ είναι διαφορετικές

▶ Το πλήθος των μεταθέσεων των ν στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ συμβολίζεται με M_ν και δίνεται από τον τύπο:

$$M_\nu = \nu!$$

- Το σύμβολο **ν!** διαβάζεται "ν παραγοντικό" και παριστάνει το γινόμενο $1.2.3.\ldots(\nu-1)\nu$.

Δηλαδή είναι $\boldsymbol{\nu! = 1.2.3.\ldots(\nu-1)\nu}$

Ορίζουμε ακόμα: $\boldsymbol{0! = 1}$

Για παράδειγμα:

$1! = 1,\ 2! = 1.2.3,\ 3! = 1.2.3,\ 4! = 1.2.3.4$

$(\nu-1)! = 1.2.3.\ldots(\nu-1)\nu$

Επομένως είναι: $\boldsymbol{\nu! = (\nu-1)!\nu = (\nu-2)!\,(\nu-1)\nu}$

Διατάξεις

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω Α ένα σύνολο με ν στοιχεία. **Διάταξη των ν στοιχείων του συνόλου Α ανα κ, με κ ≤ ν**, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε **κ** διαφορετικά στοιχεία του Α και να τα βάλουμε σε μια σειρά.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

► Αν Α είναι ένα σύνολο με ν στοιχεία, τότε σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, διάταξη των ν στοιχείων του Α ανα κ με $\kappa \le \nu$ είναι κάθε παράταξη σε ευθεία γραμμή κ διαφορετικών στοιχείων του Α.

Για παράδειγμα

- Ο αριθμός 257 είναι διάταξη 3 στοιχείων του συνόλου $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$
- Η λέξη "άστρο" είναι μια διάταξη 5 στοιχείων του συνόλου $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \chi, \psi, \omega\}$
- Έστω Α το σύνολο των μαθητών μιας τάξης. Αν από το σύνολο Α πάρουμε 4 μαθητές και τους βάλουμε να καθήσουν σ' ένα θρανίο ο ένας δίπλα στον άλλο, τότε έχουμε μια διάταξη 4 στοιχείων του συνόλου Α.

► Σε κάθε διάταξη κ στοιχείων ενός συνόλου Α, κάθε στοιχείο περιέχεται **μόνο μια φορά**.

► Δυο διατάξεις **κ** στοιχείων ενός συνόλου Α είναι **διαφορετικές**, όταν υπάρχει ένα τουλάχιστο στοιχείο της μιας που δεν περιέχεται στην άλλη διάταξη ή αν σχηματίζονται από τα ίδια στοιχεία, τότε να υπάρχει ένα στοιχείο που να είναι σε διαφορετικές θέσεις στις δυο διατάξεις.

► Όταν αναφερόμαστε στο σύνολο των διατάξεων κ στοιχείων από τα ν στοιχεία ενός συνόλου Α, χρησιμοποιούμε την έκφραση: **"Διατάξεις των ν ανα κ"**

- ▶ Στις διατάξεις των ν ανα κ έχουμε τον περιορισμό $\kappa \leq \nu$
- ▶ Το πλήθος των διατάξεων των ν ανα κ συμβολίζεται με Δ_κ^ν και δίνεται από τον τύπο

$$\Delta_\kappa^\nu = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$$

- ▶ Σε μια διάταξη στοιχείων ενός συνόλου A πρέπει να προσέχουμε τα παρακάτω:
  - ● Ποιο είναι το πλήθος ν των στοιχείων του συνόλου αναφοράς A.
  - ● Πόσα από τα στοιχεία του A θα πάρουμε για να σχηματίσουμε τη διάταξη.
  - ● Ποια από τα στοιχεία του A έχουν ειδικές δεσμεύσεις.

Συνδυασμοί

ΟΡΙΣΜΟΣ

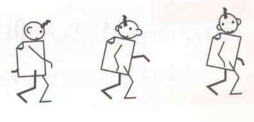
Έστω A ένα σύνολο με ν στοιχεία. **Συνδυασμός των ν στοιχείων του A ανα κ**, λέγεται κάθε υποσύνολο του A με κ στοιχεία.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- ▶ Έστω A ένα σύνολο με ν στοιχεία. Όταν αναφερόμαστε στο σύνολο των συνδυασμών κ στοιχείων του A χρησιμοποιούμε την έκφραση: **"Συνδυασμοί ν ανα κ"**
- ▶ Στους συνδυασμού των "ν ανα κ" έχουμε τον περιορισμό $\nu \geq \kappa$
- ▶ Δυο συνδυασμοί "ν ανα κ" είναι **διαφορετικοί** όταν δεν αποτελούνται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία.
- ▶ Το πλήθος των συνδυασμών "ν ανα κ" συμβολίζεται με $\binom{\nu}{\kappa}$ και δίνεται από τον τύπο:

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\,\kappa!}$$

  - ● Δεχόμαστε ότι: $\binom{\nu}{0} = 1$
- ▶ Στους συνδυασμούς των "ν ανα κ" ενδιαφερόμαστε μόνο για τη φύση των αντικειμένων που διαλέγουμε και όχι για την μεταξύ τους θέση όπως στις διατάξεις.



1

Να βρείτε τον θετικό ακέραιο ν που ικανοποιεί τη σχέση: $2\Delta_2^{\nu}+50=\Delta_2^{2\nu}$

Λύση

● Περιορισμοί: $\nu \geq 2$ και $2\nu \geq 2 \Leftrightarrow \nu \geq 1$. Άρα $\nu \geq 2$

► Εχουμε διαδοχικά: $2\Delta_2^{\nu}+50=\Delta_2^{2\nu} \Leftrightarrow 2\cdot\dfrac{\nu!}{(\nu-2)!}+50=\dfrac{(2\nu)!}{(2\nu-2)!} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\frac{(\nu-2)!\,(\nu-1)\,\nu}{(\nu-2)!}+50=\frac{(2\nu-2)!\,(2\nu-1)\,(2\nu)}{(2\nu-2)!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\nu-1)\nu+50=(2\nu-1)\,(2\nu) \Leftrightarrow 2\nu^2-2\nu+50=4\nu^2-2\nu \Leftrightarrow 2\nu^2=50 \Leftrightarrow \nu^2=25 \Leftrightarrow \nu=5$$

2

Αν $10\binom{\nu}{5}=21\binom{\nu}{3}$, να προσδιορίσετε τον θετικό ακέραιο ν

Λύση

● Περιορισμοί: $\nu \geq 5$

► Εχουμε διαδοχικά: $10\binom{\nu}{5}=21\binom{\nu}{3} \Leftrightarrow 10\dfrac{\nu!}{(\nu-5)!\,5!}=21\dfrac{\nu!}{(\nu-3)!\,3!} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{(\nu-5)!\,5!}=\frac{2!}{(\nu-3)!\,3!} \Leftrightarrow \frac{10}{(\nu-5)!\,3!\,4.\,5}=\frac{21}{(\nu-5)!\,(\nu-4)(\nu-3)\,3!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{21}{(\nu-4)(\nu-3)} \Leftrightarrow \nu^2-4\nu-3\nu+12=42 \Leftrightarrow \nu^2-7\nu-30=0 \Leftrightarrow \nu=10 \text{ ή } \nu=-3$$

Δεκτή λύση η $\nu=10$

3

Αν ν, κ θετικοί ακέραιοι με $\nu \geq \kappa+1$, να αποδειχθεί ότι: $\binom{\nu-1}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa-1}=\binom{\nu}{\kappa}$

Λύση

Εχουμε διαδοχικά: ► $\binom{\nu-1}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa-1}=\dfrac{(\nu-1)!}{(\nu-1-\kappa)!\,\kappa!}+\dfrac{(\nu-1)!}{(\nu-\kappa)!\,(\kappa-1)!}=$

$$=\frac{(\nu-1)!}{(\nu-\kappa-1)!\,(\kappa-1)!\,\kappa}+\frac{(\nu-1)!}{(\nu-\kappa-1)!\,(\nu-\kappa)\,(\kappa-1)!}=$$

$$=\frac{(\nu-1)!\,(\nu-\kappa)+(\nu-1)!\,\kappa}{(\nu-\kappa-1)!\,(\kappa-1)!\,\kappa(\nu-\kappa)}=\frac{(\nu-1)!\,(\nu-\kappa+\kappa)}{(\nu-\kappa)!\,\kappa!}=$$

$$=\frac{(\nu-1)!\,\nu}{(\nu-\kappa)!\,\kappa!}=\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\,\kappa!}=\binom{\nu}{\kappa}$$

4

Αν ν, κ θετικοί ακέραιοι με $\nu > \kappa$, να αποδειχθεί ότι: $\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu}{\nu-\kappa}$

διαδοχικά: ► $\binom{\nu}{\kappa} = \dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\,\kappa!}$ και $\binom{\nu}{\nu-\kappa} = \dfrac{\nu!}{(\nu-\nu+\kappa)!\,(\nu-\kappa)!} = \dfrac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}$

ως $\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu}{\nu-\kappa}$

Εστω ν, μ θετικοί ακέραιοι με $\nu > \mu$. Αν ισχύουν $\Delta^{\nu}_{\mu} = 3024$ και $\binom{\nu}{\mu} = 126$,
να βρείτε τον μ

$\binom{\nu}{\mu} = \dfrac{\Delta^{\nu}_{\mu}}{\mu!}$ έχουμε: $126 = \dfrac{3024}{\mu!} \Leftrightarrow \mu! = \dfrac{3024}{126} \Leftrightarrow \mu! = 24 \Leftrightarrow \mu! = 4!$ Άρα $\mu = 4$

Να αποδειχθεί ότι: $\Delta^{\nu+1}_{\kappa} = \Delta^{\nu}_{\kappa} + \kappa \cdot \Delta^{\nu}_{\kappa-1}$

διαδοχικά:

$= \dfrac{(\nu+1)!}{(\nu+1-\kappa)!}$ (1)

$\kappa \cdot \Delta^{\nu}_{\kappa-1} = \dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} + \kappa\,\dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa+1)!} = \dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} + \kappa\,\dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!\,(\nu-\kappa+1)} =$

$= \dfrac{\nu!\,(\nu-\kappa+1) + \kappa\cdot\nu!}{(\nu-\kappa)!\,(\nu-\kappa+1)} = \dfrac{\nu!\,(\nu-\kappa+1+\kappa)}{(\nu+1-\kappa)!} = \dfrac{\nu!\,(\nu+1)}{(\nu+1-\kappa)!} = \dfrac{(\nu+1)!}{(\nu+1-\kappa)}$ (2)

; σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\Delta^{\nu+1}_{\kappa} = \Delta^{\nu}_{\kappa} + \kappa \cdot \Delta^{\nu}_{\kappa-1}$

Κατά πόσους τρόπους μπορούν 4 άτομα να καθήσουν σε 7 συνεχόμενα αριθμημένα καθίσματα;

τα συνεχόμενα καθίσματα είναι αριθμημένα κάθε τοποθέτηση των 4 ατόμων είναι μια από άξεις των "7 ανα 4".

ως έχουμε: $\Delta^{7}_{4} = \dfrac{7!}{3!} = \dfrac{3!\,4\cdot5\cdot6\cdot7}{3!} = 840$ διαφορετικούς τρόπους

Ενας μαθητής πρέπει να διαλέξη ένα από τα 4 μαθήματα επιλογής και 2 από τα 5 μαθήματα ειδικότητας. Με πόσους τρόπους μπορεί να κάνει την επιλογή του;

Λύση

► Το μάθημα επιλογής μπορεί να το διαλέξει κατά 4 τρόπους

► Το μάθημα ειδικότητας μπορεί να το διαλέξει κατά $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$ διαφορετικούς τρόπους

Βήματα	μαθήμα επιλογής	μάθημα ειδικότητας
Τρόποι	4	$\binom{5}{2}$

Άρα σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης έχει $4 \cdot 10 = 40$ διαφορετικούς τρόπους

9

α) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης "ΘΕΜΑ" υπάρχουν;
β) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από Θ;
γ) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν και τελειώνουν με φωνήεν;

Λύση

α) ► Επειδή τα γράμματα της λέξης "ΘΕΜΑ" είναι διαφορετικά, κάθε αναγραμματισμός είναι μια μετάθεση 4 στοιχείων. Άρα το πλήθος των αναγραμματισμών είναι $M_4 = 4! = 24$

β) ► Το πρώτο γράμμα (Θ) επιλέγεται κατά 1 τρόπο
Τα τρια άλλα γράμματα είναι μια μετάθεση 3 στοιχείων, οπότε το τμήμα αυτό της λέξης επιλέγεται κατά $M_3 = 3! = 6$ διαφορετικούς τρόπους. Επομένως σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης του πλήθους των αναγραμματισμών που αρχίζουν με το Θ είναι: $1 \cdot 6 = 6$

κατάσταση προβλήματος

Θ	αβγ
1 τρόπος	Μετάθεση 3 στοιχείων

γ) ► Το πρώρο γράμμα επιλέγεται κατά 2 τρόπους
Τα 4ο γράμμα επιλέγεται κατά 1 τρόπο. Τα άλλα δυο γράμματα είναι μια μετάθεση 2 στοιχείων, οπότε επιλέγεται κατά $M_2 = 2! = 2$ τρόπους

Άρα σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης το πλήθος των αναγραμματισμώνς που αρχίζουν και τελειώνουν σε φωνήεν είναι $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

Φ_1	αβ	Φ_2
2 τρόποι	μετάθεση 2 στοιχείων	1τρόπος
⇓	⇓	⇓
1ο βήμα	2ο βήμα	3ο βήμα

10

Κατά πόσους τρόπους μπορούν να εγκατασταθούν 6 παιδιά πάνω σε ένα έλκυθρο με 6 θέσεις στη σειρά, αν γνωρίζουμε ότι 3 ορισμένα παιδιά είναι ικανά να πάρουν τη θέση του οδηγού

Λύση

Η εγκατάσταση των 6 παιδιών στις 6 θέσεις του έλκυθρου γίνεται σε δυο βήματα

1ο βήμα: Η θέση του οδηγού (α_1) επιλέγεται κατά 3 τρόπους

2ο βήμα: Στις υπόλοιπες 5 θέσεις θα εγκατασταθούν τα υπόλοιπα 5 παιδιά. Κάθε εγκατάσταση των 5 παιδιών στις 5 θέσεις είναι μια μετάθεση 5 στοιχείων. Αυτό συνεπώς μπορεί να γίνει κατά $M_5 = 5! = 120$ διαφορετικούς τρόπους

α_1	$\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$
	⇓
3 τρόποι	μετάθεση 5 στοιχείων
⇓	⇓
1ο βήμα	2ο βήμα

α με την αρχή της απαρίθμησης έχουμε $3 \cdot 120 = 360$ διαφορετικούς τρόπ...
παιδιών στο έλκυθρο

...ριθμούς μικρότερους του 300 μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία ..., 5} αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου

...τερους του 300 έχουμε μονοψήφιους, διψήφιους και τριψήφιους

...ι: υπάρχουν 5

Το ψηφίο των δεκάδων (Δ) επιλέγεται κατά 5 τρόπους και το ψηφίο των μονάδων (Μ) κατά 4 τρόπους

Δ	Μ
5 τρόποι	4 τρόποι

...των διψήφιων είναι: $5 \cdot 4 = 20$

...:

- Το ψηφίο των εκατοντάδων (Ε) επιλέγεται κατά 2 τρόπους (1 ή 2)
- Το ψηφίο των δεκάδων (Δ) επιλέγεται κατά 4 τρόπους
- Το ψηφίο των μονάδων επιλέγεται κατά 3 τρόπους

Ε	Δ	Μ
2 τρόποι	4 τρόποι	3 τρόποι
⇓	⇓	⇓
1ο βήμα (1 ή 2)	2ο βήμα	3ο βήμα

...ος των τριψήφιων είναι $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

...αριθμοί οι μικρότεροι του 3ου βαθμού σε πλήθος: $5 + 20 + 24 = 49$

...ους περιττούς τετραψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να ...ματίσουμε με τα ψηφία {2, 3, 4, 5, 6, 7}

...ή ενός τετραψήφιου περιττού με ...ά ψηφία που επιλέγονται από τα ψη... 4, 5, 6, 7} γίνεται σε 4 βήματα

Χ	Ε	Δ	Μ
5 τρόποι	4 τρόποι	3 τρόποι	3 τρόποι
⇓	⇓	⇓	⇓
2ο βήμα	3ο βήμα	4ο βήμα	1ο βήμα

Πρώτα επιλέγουμε το ψηφίο των μονάδων (Μ). Το ψηφίο αυτό επιλέγεται κατά 3 διαφορετικού τρόπους (3 ή 5 ή 7)

Το ψηφίο των χιλιάδων (Χ) επιλέγεται κατά 5 διαφορετικούς τρόπους (το ένα ψηφίο το χρησιμοποιήσαμε στις μονάδες)

Το ψηφίο των εκατοντάδων (Ε) επιλέγεται κατά 4 διαφορετικούς τρόπους

...: Το ψηφίο των δεκάδων (Δ) επιλέγεται κατά 3 διαφορετικούς τρόπους

...ς σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης το πλήθος των τετραψηφίων περιττών με διαφορετικά ψηφία είναι $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 180$

3

εφαρμογές

Άλλη λύση:

Η κατασκευή ενός περιττού τετραψηφίου με διαφορετικά ψηφία που επιλέγονται από τα ψηφία $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ μπορεί να γίνει σε δυο βήματα

ΧΕΔ	Μ
Διάταξη των "6 ανα 3"	3 τρόποι
$\Downarrow$	$\Downarrow$
2ο βήμα	1ο βήμα

1ο βήμα: Το ψηφίο των μονάδων (Μ) επιλέγεται πρώτα και αυτό μπορεί να γίνει κατά 3 διαφορετικούς τρόπους (3 ή 5 ή 7)

2ο βήμα: Το τμήμα ΧΕΔ των άλλων τριών ψηφίων είναι μια από τις διατάξεις των "5 ανα 3". Άρα αυτό μπορεί να γίνει κατά $\Delta_3^5 = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ διαφορετικούς τρόπους.

Επομένως το πλήθος των περιττών τετραψηφίων αριθμώνς είναι $3 \cdot 60 = 180$

13

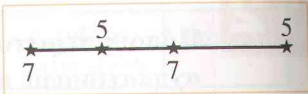
Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας 4 από τα ψηφία 7, 7, 5, 5, 5;

Λύση

► ***1η περίπτωση:*** Παίρνουμε 2 φορές το 7 και 2 φορές το 5

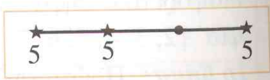
Ο σχηματισμός του τετραψηφίου γίνεται σε δυο βήματα

1ο βήμα: Διαλέγουμε πρώτα 2 θέσεις από τις 4 για να τοποθετήσουμε τα δυο όμοια 7. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε κατά $\binom{4}{2} = 6$ διαφορετικούς τρόπους. Με έναν από τους τρόπους αυτούς τοποθετούμε τα δυο 7. Στις υπόλοιπες 2 θέσεις τοποθετούμε τα δυο 5. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε κατά ένα τρόπο. Άρα σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης έχουμε $6 \cdot 1 = 6$ διαφορετικούς τετραψήφιους



► ***2η περίπτωση:*** Παίρνουμε τρεις φορές το 5 και 1 φορά τα 7

1ο βήμα: Διαλέγουμε πρώτα 3 θέσεις από τις 4 για να τοποθετήσουμε τα τρια 5. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε κατά $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$ διαφορετικούς τρόπους.



Με έναν από τους τρόπους αυτούς τοποθετούμε τα τρια 5. Στη θέση που απομένει τοποθετουμε το 7 και αυτό γίνεται κατά 1 τρόπο. Άρα σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης έχουμε $4 \cdot 1 = 4$ τετραψήφιους.

Επομένως μπορούμε να σχηματίσουμε $6 + 4 = 10$ τετραψήφιους

14

Πόσους τετραψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι;

ση

Εστω $\overline{ΧΕΔΜ}$ ένας τετραψήφιος αριθμός με διαφορετικά ψηφία που επιλέγονται από τα ψηφία {0, 1, 2, 3, 4}. Αυτός ο αριθμός μπορεί να γίνει σε δυο βήματα γιατί το ψηφίο των χιλιάδων (Χ) έχει περιορισμό. Δεν μπορεί να είναι το 0

κατάσταση προβλήματος

Χ	ΕΔΜ
4 τρόποι	Διάταξη των "4 ανα 3"
⇓	⇓
1ο βήμα	2ο βήμα

βήμα: Το ψηφίο των χιλιάδων (Χ) επιλέγεται κατά 4 διαφορετικούς τρόπους

βήμα: Η διατεταγμένη τριάδα ΕΔΜ είναι μια από τις διατάξεις των "4 ανα 3". Άρα επιλέγεται κατά $Δ_3^4 = \frac{4!}{1!} = 4! = 24$ διαφορετικούς τρόπους.

ομένως σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης το πλήθος των τετραψηφίων είναι $4 \cdot 24 = 96$

Άρτιοι τετραψήφιοι

κατάσταση προβλήματος

Χ	Ε	Δ	0
4 τρόποι	3 τρόποι	2 τρόποι	1 τρόπος

1η περίπτωση: Άρτιοι που λήγουν σε 0

1ο βήμα: Το ψηφίο των μονάδων επιλέγεται κατά ένα τρόπο (μόνο το 0)

2ο βήμα: Το ψηφίο των χιλιάδων (Χ) επιλέγεται κατά 4 τρόπους

3ο βήμα: Το ψηφίο των εκατοντάδεων (Ε) επιλέγεται κατά 3 τρόπους

4ο βήμα: Το ψηφίο των δεκάδων (Δ) επιλέγεται κατά 2 τρόπους

ρα σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης το πλήθος των άρτιων που λήγουν σε 0 είναι:
$3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

2η περίπτωση: :Άρτιοι που λήγουν σε 2 ή 4

1ο βήμα: Το ψηφίο των μονάδων (Μ) επιλέγεται κατά 2 τρόπους 2 ή 4

2ο βήμα: Το ψηφίο των χιλιάδων (Χ) επιλέγεται κατά 3 διαφορετικούς τρόπους (όχι το 0, όχι το 2 ή το 4)

κατάσταση προβλήματος

Χ	Ε	Δ	Μ
3 τρόποι	3 τρόποι	2 τρόποι	2 τρόποι
⇓	⇓	⇓	⇓
2ο βήμα	3ο βήμα	4ο βήμα	1ο βήμα

3ο βήμα: Το ψηφίο των εκατοντάδων (Ε) επιλέγεται κατά 3 τρόπους (όχι το 2 ή 4 και όχι το ψηφίο των χιλιάδων)

4ο βήμα: Το ψηφίο των δεκάδων (Δ) επιλέγεται κατά 2 τρόπους

ρα σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης το πλήθος των άρτιων που λήγουν σε 2 ή 4 είναι:
$\cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$

τομένως το πλήθος των άρτιων είναι $24 + 36 = 60$

5

Μια τετραμελής επιτροπή θα εκλεγεί από 6 καθηγητές και 10 μαθητές. Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η επιτροπή όταν:

α) περιέχει 2 καθηγητές και 2 μαθητές

β) τουλάχιστο 2 καθηγητές

Λύση

α) Οι καθηγητές μπορούν να επιλέγουν κατά $\binom{6}{2} = 15$ διαφορετικούς τρόπους, ενώ οι μαθητές μπορούν να επιλέγουν κατά $\binom{10}{2} = 45$ διαφορετικούς τρόπους. Άρα σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης η τετραμελής επιτροπή μπορεί να σχηματιστεί κατά $15 \cdot 45 = 674$ διαφορετικούς τρόπους.

β) Θέλουμε η επιτροπή να περιέχει τουλάχιστο δυο καθηγητές. Επομένως θα πρέπει να βρούμε το πλήθος των επιτροπών της μορφής:

$\{K_1, K_2, M_1, M_2\}$ ή $\{K_1, K_2, K_3, M_1\}$ ή $\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$

- Η επιτροπή της μορφής $\{K_1, K_2, M_1, M_2\}$ μπορεί να σχηματιστεί κατά 675 διαφορετικούς τρόπους (α) ερώτημα
- Στην επιτροπή της μορφής $\{K_1, K_2, K_3, M\}$ οι καθηγητές επιλέγονται κατά $\binom{6}{3} = 20$ διαφορετικούς τρόπους, ενώ οι μαθητές επιλέγονται κατά $\binom{10}{1} = 10$ διαφορετικούς τρόπους. Άρα σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης η επιτροπή αυτή μπορεί να σχηματιστεί κατά: $20 \cdot 10 = 200$ διαφορετικούς τρόπους.
- Η επιτροπή της μορφής $\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ μπορεί να σχηματιστεί κατά $\binom{6}{4} = 15$ διαφορετικούς τρόπους.

Επομένως οι διαφορετικές επιτροπές που περιέχουν τουλάχιστο δυο καθηγητές είναι σε πλήθος:
$675 + 200 + 15 = 890$

16

Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε 4 από 10 βιβλία όταν:
α) απαραίτητα πρέπει να επιλέξουμε ένα ορισμένο βιβλίο
β) πρέπει να αποκλείσουμε ένα ορισμένο βιβλίο
γ) πρέπει να επιλέξουμε ένα ορισμένο και να αποκλείσουμε ένα ορισμένο βιβλίο

Λύση

α) Έστω Α το ορισμένο βιβλίο που πρέπει να διαλέξουμε. Τότε αυτό επιλέγεται κατά ένα τρόπο. Τα υπόλοιπα τρια βιβλία θα τα επιλέξουμε από τα υπόλοιπα 9. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε κατά $\binom{9}{3} = \dfrac{9!}{6!\,3!} = 84$ διαφορετικούς τρόπους.

Επομένως σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης έχουμε $1 \cdot 84 = 84$ διαφορετικούς τρόπους για να διαλέξουμε 4 βιβλία από τα 10 όταν πρέπει απαραίτητα να διαλέξουμε ένα ορισμένο βιβλιο.

β) Αφού πρέπει να αποκλείσουμε ένα ορισμένο βιβλίο Β τα 4 βιβλία θα τα διαλέξουμε από τα υπόλοιπα 9. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε κατά $\binom{9}{4} = \dfrac{9!}{5!\,4!} = 126$ διαφορετικούς τρόπους.

γ) Το ορισμένο βιβλίο Α επιλέγεται κατά 1 τρόπο. Τα υπόλοιπα 3 βιβλία θα τα επιλέξουμε από τα υπόλοιπα 8 βιβλια αφού το ένα αποκλείεται να επιλεγεί. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε κατά $\binom{8}{3} = \dfrac{8!}{5!\,3!} = 56$ διαφορετικούς τρόπους.

Άρα σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης έχουμε: $1 \cdot 56 = 56$ διαφορετικούς τρόπους για να λέξουμε 4 βιβλία από τα 10 όταν πρέπει να επιλέξουμε ένα ορισμένο βιβλίο και να αποκλεί-ιμε ένα ορισμένο βιβλίο.

7

Να συγκρίνετε την πιθανότητα να φέρουμε 5 στη ρίψη ενός ζαριού με την πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα 7 στη ρίψη δυο ζαριών.

ση

Ο δειγματικός χώρος στη ρίψη ενός ζαριού είναι το σύνολο $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Άρα η πιθανότητα να φέρουμε 5 στη ρίψη ενός ζαριού είναι $\varrho_1 = \dfrac{1}{6}$

Ο δειγματικός χώρος Ω_2 κατά τη ρίψη δυο ζαριών έχει 36 στοιχεία (6 x 6). Άρα $N(\Omega_2) = 36$.

Τα ζεύγη των ενδείξεων των δυο ζαριών με άθροισμα 7 είναι

$A = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$. Άρα $N(A) = 6$

Επομένως η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα 7 στη ρίψη δυο ζαριών είναι

$$\varrho_2 = \frac{N(A)}{N(\Omega_2)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \varrho_2$$

8

4 άτομα μπαίνουν στο ασανσέρ στο ισόγειο ενός 7όροφου κτιρίου. Κάθε άτομο μπορεί να κατέβει σε οποιοδήποτε όροφο αρχής γενομένης από τον 1ο όροφο. Να βρείτε την πιθανότητα να κατέβουν όλα τα άτομα σε διαφορετικούς ορόφους.

ση

Κάθε άτομο μπορεί να διαλέξει τον όροφο κατά 7 τρόπους, Επομένως τα δυνατά αποτελέσματα είναι σε πλήθος: $N(\Omega) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$

Εφ' όσον τα 4 άτομα θα κατέβουν σε διαφορετικούς ορόφους τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι τόσα όσες και οι διατάξεις των "7 ανα 4".

Άρα $N(A) = \Delta_4^7 = \dfrac{7!}{3!} = 840$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{840}{7^4} = \dfrac{120}{343}$

9

α) Πόσους τριψήφιους με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία {1, 2, 3, 4, 5, 6};

β) Από ένα κουτί που περιέχει τους παραπάνω τριψήφιους αριθμούς τραβάμε έναν στην τύχη. Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου

Α: "ο αριθμός είναι άρτιος"

ση

Κάθε τριψήφιος αριθμός με διαφορετικά ψηφία που σχηματιζέται με τα ψηφία του συνόλου $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ είναι μια διάταξη των "6 ανα 3".

Επομένως το πλήθος των τριψήφιων αυτών είναι: $N(\Omega) = \Delta_3^6 = \frac{6!}{3!} = \frac{3!\,4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} = 120$

β) Θα βρούμε πρώτα το πλήθος των άρτιων τριψήφιων αριθμών που σχηματίζονται με τα ψηφία $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Έστω $\overline{\alpha\beta\gamma}$ ένα άρτιος τριψήφιος

1ο βήμα: Το ψηφίο των μονάδων επιλέγεται κατά 3 τρόπους (2 ή 4 ή 6)

2ο βήμα: Το ψηφίο των εκατοντάδεων επιλέγεται κατά 5 τρόπους (ένα ψηφίο χρησιμοποιήθηκε για το ψηφίο των μονάδων)

3ο βήμα: Το ψηφίο των δεκάδων επιλέγεται κατά 4 τρόπους

κατάσταση προβλήματος

α	β	γ
5 τρόποι	4 τρόποι	3 τρόποι
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
2ο βήμα	3ο βήμα	1ο βήμα

Επομένως σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης το πλήθος των άρτιων με διαφορετικά ψηφία είναι $N(A) = 5 \cdot 5 \cdot 3 = 60$.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

20

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά 4 αγόρια και 3 κορίτσια; Ποια η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια;

Λύση

α) Κάθε τοποθέτηση των 7 παιδιών σε μια σειρά είναι μια μετάθεση 7 στοιχείων. Επομένως οι διαφορετικοί τρόποι που υπάρχουν για να τοποθετήσουμε τα παιδιά σε μια σειρά είναι $M_7 = 7!$

β) Θεωρούμε όλα τα αγόρια σαν ένα στοιχείο Α και όλα τα κορίτσια σαν ένα στοιχείο (Κ). Τα στοιχεία Α και Κ μπορούν να μπουν σε μια σειρά κατά 2 τρόπους ΑΚ ή ΚΑ. Τα αγόρια μεταξύ τους μπορούν να είναι στη σειρά κατά 4! διαφορετικούς τρόπους, ενώ τα κορίτσια μπορούν να είναι στη σειρά κατά 3! διαφορετικούς τρόπους. Άρα σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης τα αγόρια και τα κορίτσια μπορούν να μπουν σε μια σειρά έτσι ώστε όλα τα αγόρια να είναι μαζί και όλα τα κορίτσια να είναι μαζί είναι $2 \cdot 4!\,3!$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι η: $P = \frac{2 \cdot 4!\,3!}{7!} = \frac{2 \cdot 4!\,3!}{4!\,5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{10}$

21

Ένα κουτί περιέχει 9 κάρτες αριθμημένες από το 1 ως το 9. Παίρνουμε διαδοχικά 3 κάρτες χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου: Α: "οι ενδείξεις των καρτών είναι άρτιος – περιττός – άρτιος"

Λύση

► Τα δυνατά αποτελέσματα είναι τόσα όσες οι διατάξει των "9 ανα 3".

Άρα είναι $N(\Omega) = \Delta_3^9 = \frac{9!}{6!} = 504$

► Ευνοϊκό αποτέλεσμα είναι κάθε διατεταγμένη τριάδα της μορφής (A_1, Π, A_2) (άρτιος – περιττός – άρτιος)

- Ο πρώτος άρτιος (A_1) επιλέγεται κατά 4 διαφορετικούς τρόπους.
- Ο περιττός (Π) επιλέγεται κατά 5 διαφορετικούς τρόπους
- Ο δεύτερος άρτιος (A_2) επιλέγεται κατά 3 διαφορετικούς τρόπους

Επομένως σύμφωνα με την αρχή την απαρίθμησης τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι σε πλήθος:
$N(A) = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{60}{504} = \dfrac{5}{42}$

22

Ένας σάκκος περιέχει τις λέξεις που σχηματίζονται από τα γράμματα $\{Α, Β, Γ, α, β, γ\}$ όταν αυτά χρησιμοποιούνται όλα και μόνο μια φορά το καθένα. Τραβάμε στην τύχη μια λέξη. Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου:
Α: "η λέξη αρχίζει με κεφαλαίο γράμμα"

Λύση

► Το πλήθος των λέξεων που σχηματίζονται από τα γράμματα $\{Α, Β, Γ, α, β, γ\}$ όταν αυτά χρησιμοποιούνται όλα και μόνο μια φορά το καθένα είναι όσες οι μεταθέσεις 6 στοιχείων που είναι $M_6 = 6! = 720$. Άρα ο σάκκος περιέχει 720 λέξεις, οπότε είναι $N(\Omega) = 720$

► Μια λέξη που αρχίζει με κεφαλαίο γράμμα σχηματίζεται σε δυο βήματα

α_1	$\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$
3 τρόποι	μετάθεση 5 στοιχείων

$\Downarrow$
5!

1ο βήμα: Το πρώτο γράμμα α_1 (κεφαλαίο) επιλέγεται κατά 3 τρόπους: Α ή Β ή Γ

2ο βήμα: Το υπόλοιπο τμήμα $\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6$ της λέξης είναι μια μετάθεση 5 στοιχείων. Άρα αυτό σχηματίζεται κατά 5! διαφορετικούς τρόπους

Επομένως σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης το πλήθος των λέξεων που αρχίζουν με κεφαλαίο γράμμα είναι $N(A) = 3 \cdot 5! = 3 \cdot 120 = 360$

Επομένως η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{360}{720} = \dfrac{1}{2}$

23

Τρια βιβλία επιλέγονται τυχαία από 12 βιβλία εκ των οποίων τα 5 είναι Μαθηματικά (Μ), τα 4 είναι Φυσικής (Φ) καὶ τα 3 είναι Χημεία (Χ)
Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου:
Α: "Δυο τουλάχιστο από τα βιβλία είναι Μαθηματικών"

Λύση

► Τα δυνατά αποτελέσματα είναι τόσα όσοι και οι συνδυασμοί των "12 ανα 3".

Άρα $N(\Omega) = \dbinom{12}{3} = 220$

► Τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι όλες οι τριάδες της μορφής $\{M_1, M_2, B\}$ ή $\{M_1, M_2, M_3\}$

- Οι τριάδες της μορφής $\{M_1, M_2, B\}$ είναι σε πλήθος $\dbinom{5}{2} \cdot \dbinom{7}{1} = 10 \cdot 7 = 70$

● Οι τριάδες της μορφής $\{M_1, M_2, M_3\}$ είναι σε πλήθος $\binom{5}{3} = 10$

Επομένως τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι σε πλήθος $N(A) = 70 - 10 = 80$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{80}{220} = \dfrac{4}{11}$

24 **Σε μια διεθνή σύσκεψη συμμετέχουν 3 Αμερικάνοι (Α), 2 Γερμανοί (Γ) και 3 Ρώσοι (Ρ) που κάθονται τυχαία σ' ένα τραπέζι ο ένας δίπλα στον άλλο. Ποια η πιθανότητα τα μέλη της ίδιας εθνικότητας να κάθονται μαζί;**

Λύση

▶ Τα πρόσωπα είναι σε πλήθος: $3 + 2 + 3 = 8$. Άρα τα δυνατά αποτελέσματα είναι τόσα όσες και οι μεταθέσεις των 8 στοιχείων. Δηλαδή $N(\Omega) = 8!$

▶ Ως προς την εθνικότητα τα μέλη ορίζουν 3 διαφορετικά στοιχεία Α(Αμερ.), Γ(Γερμ.), Ρ(Ρώσοι) εφ' όσον τα μέλη της ίδιας εθνικότητας θα κάθονται μαζί.

Τα στοιχεία Α, Γ, Ρ μπορούν να τοποθετηθούν στη σειρά κατά 3! διαφορετικούς τρόπους

Οι Αμερικανοί μεταξύ τους μπορούν να καθήσουν κατά 3! διαφορετικούς τρόπους, οι Γερμανοί κατά 2! διαφορετικούς τρόπους και οι Ρώσοι κατά 3! διαφορετικούς τρόπους. Επομένως σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι $N(A) = 3!\,3!\,2!\,3!$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{3!\,3!\,2!\,3!}{8!} = \dfrac{3}{280}$.

25 **Ένα παιδί έχει στον κουμπαρά του 3 νομίσματα των 10 δραχ., 5 νομίσματα των 50 δρχ. και 10 νομίσματα των 100 δρχ. Βγάζει συγχρόνως από τον κουμπαρά του 3 νομίσματα στην τύχη. Ποια η πιθανότητα των ενδεχομένων**
Α: "να βγάλει 3 νομίσματα των 100 δρχ."
Β: "να βγάλει τρια νομίσματα διαφορετικής αξίας"

Λύση

Ο κουμπαράς έχει 18 νομίσματα.

▶ Κάθε τράβηγμα από τον κουμπαρά 3 νομισμάτων συγχρόνως είναι ένας συνδυασμός των "18 ανα 3". Επομένως τα δυνατά αποτελέσματα είναι σε πλήθος $N(\Omega) = \binom{18}{3} = 816$

i) Τα νομίσματα των 100 δρχ. είναι 10. Οι ευνοϊκές περιπτώσεις του ενδεχομένου Α είναι:

$N(A) = \binom{10}{3} = 120$

Επομένως η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{120}{819} = \dfrac{5}{34}$

ii) Ευνοϊκό αποτέλεσμα για το ενδεχόμενο Β είναι η τριάδα $\{10, 50, 100\}$

- Το νόμισμα (10) επιλέγεται κατά 3 διαφορετικούς τρόπους
- Το νόμισμα (50) επιλέγεται κατά 5 διαφορετικούς τρόπους
- Το νόμισμα (100) επιλέγεται κατά 10 διαφορετικούς τρόπους

Επομένως σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι $N(B): 3 \cdot 5 \cdot 10 = 15$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Β είναι: $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{150}{816} = \dfrac{25}{136}$

26

Από ένα σάκκο που περιέχει 5 κόκκινες (Κ), 4 άσπρες (Α) και 3 μαύρες (Μ) μπάλες τραβάμε 3 μπάλες μαζί. Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου:
Α: "όλες οι μπάλες είναι του ίδιου χρώματος"

Λύση

- Ο σάκκος περιέχει: $5 + 4 + 3 = 12$ μπάλες. Κάθε τράβηγμα είναι ένας από τους συνδυασμούς των "12 ανα 3". Άρα τα δυνατά αποτελέσματα είναι σε πλήθος $N(\Omega) = \binom{12}{3} = 220$
- Οι ευνοϊκές πριπτώσεις είναι τόσες όσοι και οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε από το σάκκο 3 μεγάλες κόκκινες ή 3 μπάλες άσπρες ή 3 μπάλες μαύρες.
  - Οι κόκκινες μπάλες μπορούν να επιλεγούν κατά $\binom{5}{3} = 10$ διαφορετικούς τρόπους
  - Οι άσπρες μπάλες μπορούν να επιλεγούν κατά $\binom{4}{3} = 4$ διαφορετικούς τρόπους
  - Οι μαύρες μπάλες μπορούν να επιλεγούν κατά $\binom{3}{5} = 1$ τρόπο

Επομένως οι ευνοϊκές περιπτώσεις του πειράματος είναι: $N(A) = 10 + 4 + 1 = 15$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{15}{220} = \dfrac{3}{44}$

27

Μια επιτροπή από 4 μαθητές της Γ' Λυκείου εκλέγεται κάθε χρόνο για να παρακολουθήσει το συνέδριο του συλλόγου των καθηγητών. Οι εκλέξιμοι μαθητές είναι 12 μεταξύ των οποίων είναι δυο δίδυμοι αδελφοί. Επιλέγουμε στην τύχη μια τετραμελή επιτροπή. Ποια η πιθανότητα του ενδεχομενου.
Α: "οι δίδυμοι αδελφοί να μην έχουν επιλεγεί μαζί στην επιτροπή"

Λύση

- Κάθε επιλογή 4 μαθητών από τους 12 εκλέξιμους είναι ένας συνδυασμός των "12 ανα 4". Άρα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος είναι: $N(\Omega) = \binom{12}{4} = 495$
- Το ενδεχόμενο Α είναι το αντίθετο του ενδεχομένου Α': "οι δίδυμοι αδελφοί έχουν επιλεγεί μαζί στην επιτροπή"

Κάθε ευνοϊκό αποτέλεσμα του ενδεχομένου Α' είναι μια τετράδα της μορφής $(\Delta, \Delta, M_1, M_2)$

- Οι δίδυμοι αδελφοί $\{\Delta, \Delta\}$ επιλέγονται κατά 1 τρόπο
- Οι δυο άλλοι μαθητές $\{M_1, M_2\}$ επιλέγονται κατά $\binom{10}{2} = 45$ διαφορετικούς τρόπους

Άρα σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης έχουμε: $N(A') = 1 \cdot 45 = 45$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α' είναι: $P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{45}{495} = \frac{1}{11}$, οπότε

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$

28

Από 8 κορίτσια θα σχηματιστεί τετραμελής επιτροπή. Από αυτά τα κορίτσια οι Α και Β είναι αδελφές και για ειδικούς λόγους, όπους θα είναι η Α θα πρέπει να είναι και η Β, ενώ όπου θα είναι η Β δεν είναι ανάγκη να είναι και η Α. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η επιτροπή; Εκλέγουμε τυχαία μια επιτροπή. Ποια η πιθανότητα στην επιτροπή να περιλαμβάνεται η Α;

Λύση

▶ Έστω $\{A, B, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6\}$ το σύνολο των 8 κοριτσιών. Οι δυνατές επιτροπές που μπορούν να σχηματιστούν είναι της μορφής $\{K, K, K, K\}$ ή $\{A, B, K, K\}$ ή $\{B, K, K, K\}$

- Η επιτροπή της μορφής $\{K, K, K, K\}$ μπορεί να σχηματιστεί κατά $\binom{6}{4} = 15$ διαφορετικούς τρόπους
- Η επιτροπή της μορφής $\{A, B, K, K\}$ μπορεί να σχηματιστεί κατά $1 \cdot 1 \cdot \binom{6}{2} = 15$ διαφορετικούς τρόπους
- Η επιτροπή της μορφής $\{B, K, K, K\}$ μπορεί να σχηματιστεί κατά $1 \cdot \binom{6}{3} = 20$ διαφορετικούς τρόπους

Επομένως η επιτροπή μπορεί να σχηματιστεί κατά: $N(\Omega) = 15 + 15 + 20 = 50$ διαφορετικούς τρόπους

▶ Το κορίτσι Α περιλαμβάνεται σε 15 διαφορετικές επιτροπές.

Άρα $N(A) = 15$, οπότε $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{15}{30} = \frac{3}{10}$

29

Από μια ομάδα 10 φίλων μεταξύ των οποίων είναι ο Γιάννης και ο Κώστας θα εκλεγεί μια πενταμελής επιτροπή. Ποια η πιθανότητα ο Κώστας και ο Γιάννης να είναι στην επιτροπή; Ποια η πιθανότητα ο Γιάννης να είναι στην επιτροπή και να μην είναι ο Κώστας;

Λύση

▶ Οι πενταμελείς επιτροπές που μπορούν να σχηματιστούν είναι τόσες όσοι και οι συνδυασμοί των "10 ανα 5". Άρα τα δυνατά αποτελέσματα είναι σε $N(\Omega) = \binom{10}{5}$

▶ Έστω το ενδεχόμενο: Α: "Ο Κώστας και ο Γιάννης είναι στην επιτροπή"

Ευνοϊκό αποτέλεσμα είναι το: {Κώστας, Γιάννης, Α, Β, Γ}. Ο Κώστας επιλέγεται κατά ένα τρόπο. Ο Γιάννης επιλέγεται κατά 1 τρόπο. Τα τρία άλλα άτομα επιλέγονται κατά $\binom{8}{3}$ διαφορετικούς τρόπους.

Άρα τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι σε πλήθος $N(A) = 1 \cdot 1\binom{8}{3} = \binom{8}{3}$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{56}{1260} = \dfrac{2}{45}$

Έστω το ενδεχόμενο: Β: "Ο Γιάννης είναι στην επιτροπή και ο Κώστας δεν είναι"

Ευνοϊκό αποτέλεσμα είναι το: {Γιάννης, Α, Β, Γ, Δ}. Ο Κώστας επιλέγεται κατά ένα τρόπο. Τα άλλα 4 άτομα επιλέγονται κατά $\binom{8}{4}$ διαφορετικούς τρόπους (εξαιρείται ο Κώστας και ο Γιάννης)

Άρα τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι σε πλήθος $N(B) = 1\binom{8}{4} = \binom{8}{4}$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου B είναι: $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{70}{1260} = \dfrac{7}{126} = \dfrac{1}{18}$

0

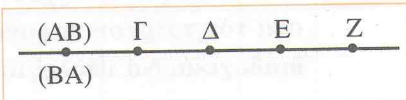
α) Κατά πόσους τρόπους 5 άτομα μπορούν να καθήσουν σε ένα μπάγκο το ένα δίπλα στο άλλο;

β) Ποια η πιθανότητα δυο ορισμένα άτομα το A και το B να καθήσουν σε διπλανές θέσεις; Ποια η πιθανότητα να μην καθήσουν σε διπλανές θέσεις;

ύση

ι) Κάθε τοποθέτηση των 5 ατόμων σε ένα μπάγκο το ένα δίπλα στο άλλο είναι και μια από τις μεταθέσεις των 5 στοιχείων. Άρα έχουμε $M_5 = 5! = 120$ διαφορετικούς τρόπους.

) Επειδή τα άτομα A και B θα καθήσουν το ένα δίπλα στο άλλο τα θεωρούμε πρώτα ως ένα άτομο (AB).



Έτσι έχουμε να τοποθετήσουμε 4 άτομα στη σειρά.

Αυτό μπορούμε να το κάνουμε κατά $4! = 24$ διαφορετικούς τρόπους. Τα δυο ορισμένα άτομα A και B μεταξύ τους μπορούν να καθήσουν κατά 2 διαφορετικούς τρόπους ΑΒ ή ΒΑ. Άρα σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης έχουμε: $24 \cdot 2 = 48$ διαφορετικούς τρόπους για να καθήσουν τα ορισμένα άτομα A και B το ένα δίπλα στο άλλο.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P_1 = \dfrac{48}{120} = \dfrac{2}{5}$

γ) Το ενδεχόμενο τα ορισμένα άτομα να μην καθήσουν το ένα δίπλα στο άλλο είναι το αντίθετο του ενδεχομένου "τα άτομα A και B κάθονται το ένα δίπλα στο άλλο".

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $P_2 = 1 - P_1 = 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$

31

Ποια είναι η πιθανότητα στο ΛΟΤΤΟ (6 από 49) να πετύχουμε 5 ακριβώς σωστά νούμερα παίζοντας μια στήλη;

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο να προβλέψουμε 5 ακριβώς σωστά νούμερα.

Οι δυνατές περιπτώσεις είναι τόσες όσοι οι συνδυασμοί των 49 ανα 6.

Δηλαδή $N(\Omega) = \binom{49}{6}$, αφού δεν έχει σημασία η σειρά κλήρωσης κάθε αριθμού.

Για τις ευνοϊκές περιπτώσεις του πειράματος έχουμε:

1ο βήμα: Πέντε ακριβώς νούμερα από τα 6 που κληρώθηκαν πρέπει να τα έχουμε σημειώσει στο δελτίο που συμπληρώσαμε.

Αυτό μπορούμε να το κάνουμε κατά $\binom{6}{5} = \frac{6!}{5!\,1!}$ διαφορετικούς τρόπους.

κατάσταση προβλήματος

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{(6)} \\ (5) & (1) \\ \Downarrow & \Downarrow \\ \binom{6}{5} & \binom{43}{1} \end{array}$$

2ο βήμα: Το έκτο νούμερο θα επιλεγεί από τα υπόλοιπα 43 νούμερα τα οποία δεν επιλέχτηκαν.

Αυτό μπορούμε να το κάνουμε κατά $\binom{43}{1} = 43$ διαφορετικούς τρόπους.

Επομένως σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι: $N(A) = 6 \cdot 43 = 258$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{258}{13983816}$

32

Σ' ένα τσίρκο υπάρχουν επτά άλογα. Τα 3 είναι άσπρα και τα 4 μαύρα. Στην πίστα του τσίρκου παρουσιάζονται 3 άλογα. Η είσοδος τους γίνεται τυχαία αλλά διαδοχικά. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων.

A: "το πρώτο άλογο που μπαίνει είναι άσπρο"

B: "τα τρία άλογα που μπαίνουν είναι άσπρα"

Λύση

▶ Κάθε παρουσίαση των 3 αλόγων από τα 7 στην πίστα του τσίρκου τυχαία αλλά διαδοχικά είναι μια διάταξη των "7 ανα 3". Επομένως οι δυνατές περιπτώσεις είναι $N(\Omega) = \Delta_3^7 = \frac{7!}{4!} = 210$

▶ Κάθε ευνοϊκό αποτέλεσμα είναι μια διατεταγμένη τριάδα (A_1, A_2, A_3) όπου η πρώτη συνιστώσα έχει τη δέσμευση να είναι άσπρο άλογο

A_1	$A_2\,A_3$
3 τρόποι	Διάταξη των 6 ανα 2

1ο βήμα: Το A_1 επιλέγεται κατά 3 διαφορετικούς τρόπους (τα άσπρα άλογα είναι 3)

2ο βήμα: Το ζευγάρι $A_2\ A_3$ είναι μια από τις διατάξεις των 6 ανα 2 (το ένα άσπρο άλογο επιλέχτηκε για την 1η θέση)

Άρα το ζευγάρι $A_2\ A_3$ επιλέγεται κατά $\Delta_2^6 = \frac{6!}{4!} = 30$ διαφορετικούς τρόπους.

Άρα σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι: $N(A) = 3 \cdot 30 = 90$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$

► Β: "τα τρια άλογα που μπαίνουν είναι άσπρα"

Επειδή τα άσπρα άλογα είναι 3 οι ευνοϊκές περιπτώσεις του ενδεχομένου Β είναι όσες οι μεταθέσεις 3 στοιχείων. Δηλαδή $N(B) = 3! = 6$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Β είναι: $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$

33

Ένα κουτί περιέχει τους τριψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία που μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία {1, 2, 3, 4, 5}. Τραβάμε ένα αριθμό στην τύχη. Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου
Α: "ο αριθμός είναι άρτιος" Β: "ο αριθμός αρχίζει από 1"

Λύση

► Κάθε τριψήφιος αριθμός $\overline{\alpha\beta\gamma}$ που σχηματίζεται από τρια διαφορετικά στοιχεία του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ είναι μια διάταξη των "5 ανα 3".

Επομένως το πλήθος των τριψήφιων αριθμών είναι: $N(\Omega) = \Delta_3^5 = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$

► Έχουμε το ενδεχόμενο Α: "ο αριθμός είναι άρτιος"

Έστω $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ ένα άρτιος αριθμός τριψήφιος με διαφορετικά ψηφία που σχηματίζεται από τα στοιχεία του συνόλου $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

κατάσταση προβλήματος

α_1	α_2	$\alpha_3 =$ άρτιος
4 τρόποι	3 τρόποι	2 τρόποι
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
1ο βήμα	3ο βήμα	1ο βήμα

● Για να σχηματίσουμε τον παραπάνω άρτιο αριθμό πρώτα επιλέγουμε το τρίτο ψηφίο α_3 που είναι άρτιος αριθμός του Ε, οπότε το α_3 θα είναι 2 ή 4. Έτσι έχουμε 2 τρόπους επιλογής για το α_3

► Το ψηφίο των εκατοντάδων α_1 επιλέγεται κατά 4 τρόπους γιατί ήδη το 2 ή το 4 χρησιμοποιήθηκε για το ψηφίο α_3

► Το ψηφίο α_2 των δεκάδων επιλέγεται κατά 3 τρόπους γιατί ήδη χρησιμοποιήθηκαν δυο στοιχεία του συνόλου Ε

Άρα σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων είναι $N(A) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Άρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

▶ Β: "ο αριθμός αρχίζει από 1"

Ο τριψήφιος της μορφής $\overline{1\beta\gamma}$ σχηματίζεται σε τρια βήματα

κατάσταση προβλήματος

1	β	γ
1 τρόπος	4 τρόποι	3 τρόποι
⇓	⇓	⇓
1ο βήμα	2ο βήμα	3ο βήμα

● Το ψηφίο 1 επιλέγεται κατά ένα τρόπο

▶ Το ψηφίο β επιλέγεται κατά 4 τρόπους (2 ή 3 ή 4 ή 5)

▶ Το ψηφίο γ επιλέγεται κατά 3 τρόπους (γιατί χρησιμοποιήθηκαν δυο στοιχεία του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Επομένως σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης το πλήθος των τριψήφιων που αρχίζουν με 1 είναι $N(B) = 1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$

Επομένως: $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5}$

34

Στο τμήμα επισκευών μιας εταιρείας ηλεκτρικών συσκευών υπάρχουν προς επισκευή 10 τηλεοράσεις και 12 βίντεο. Το προσωπικό που διαθέτει η εταιρεία επισκευάζει σε μια μέρα μόνο 6 συσκευές. Αν οι συσκευές που θα επισκευασθούν διαλέγονται τυχαία, να βρεθεί η πιθανότητα σε μια μέρα

Α: να επισκευαστούν 3 τηλεοράσεις και 3 βίντεο

Β: να επισκευαστούν το πολύ 5 τηλεοράσεις

Λύση

Οι συσκευές που θα επισκευαστούν είναι $10 + 12 = 22$. Οι δυνατοί τρόποι που υπάρχουν για να επισκευαστούν 6 συσκευές σε μια μέρα είναι σε πλήθος $N(\Omega) = \binom{22}{6}$

▶ Ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε προς επισκευή 3 από τις 10 τηλεοράσεις είναι $\binom{10}{3}$ και ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διαλεξουμε 3 από τα 12 βίντεο $\binom{12}{3}$. Επομένως είναι $N(A) = \binom{10}{3} \cdot \binom{12}{3}$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι τώρα: $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{\binom{22}{8}}{\binom{10}{3}\binom{12}{3}}$ ή $P(A) = 0{,}3538$

▶ Το ενδεχόμενο Β είναι το συμπληρωματικό του ενδεχομένου Γ: επισκευάζονται 6 τηλεοράσεις

$$\text{Άρα } P(B) = 1 - P(\Gamma) = 1 - \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{10}{8}}{\binom{22}{6}} = 1 - \frac{10!\,16!}{4!\,22!} = 1 - \frac{20}{3553} \text{ ή } P(B) = \frac{3533}{3553}$$

ή $P(B) \approx 99{,}4\%$