Συστήματα

1️⃣ Μορφή γραμμικού συστήματος 2×2

Γενικά:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Πιθανά αποτελέσματα

- **Μία μοναδική λύση**
- **Καμία λύση** (ασύμβατο σύστημα)
- **Άπειρες λύσεις** (εξαρτημένο σύστημα)

Κριτήριο γίνεται με **ορίζουσα**:

$$\Delta = ae - bd.$$

- Αν **Δ ≠ 0** → **μοναδική λύση**
- Αν **Δ = 0**:
  - Αν και οι άλλες ορίζουσες 0 → **άπειρες λύσεις**
  - Αλλιώς → **καμία λύση**

2️⃣ Μέθοδος αντικατάστασης

Βήματα

1. Λύνω μια εξίσωση ως προς έναν άγνωστο.
2. Τον αντικαθιστώ στην άλλη.
3. Βρίσκω τον δεύτερο άγνωστο.
4. Επιστρέφω για τον πρώτο.

Χρήση

- Καλή όταν **ένας συντελεστής είναι 1 ή −1**.
- Όχι βολική με δύσκολους αριθμούς.

3️⃣ Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

(ή απαλοιφής)

Βήματα

1. Πολλαπλασιάζω εξισώσεις ώστε οι συντελεστές ενός αγνώστου να γίνουν αντίθετοι.

2. Προσθέτω τις εξισώσεις → εξαφανίζεται ένας άγνωστος.
3. Λύνω για τον άλλον.
4. Αντικαθιστώ για να βρω τον πρώτο.

Χρήση

- Η **πιο γρήγορη** μέθοδος σε εξετάσεις.
- Ιδανική με **ακέραιους συντελεστές**.

Γραμμικό σύστημα 2×2

- $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

Ορίζουσες

Κύρια ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$$

Ορίζουσα για το x

(αντικαθιστούμε τη στήλη του x με τα σταθερά μέλη)

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - bf$$

Ορίζουσα για το y

(αντικαθιστούμε τη στήλη του y με τα σταθερά μέλη)

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd$$

Περιπτώσεις λύσεων

1️⃣ Μοναδική λύση

Αν $\Delta \neq 0$ τότε:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

☞ Οι ευθείες **τέμνονται σε ένα σημείο**.

---

2 Άπειρες λύσεις

Αν $\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0$

☞ Οι δύο εξισώσεις παριστάνουν **την ίδια ευθεία**.

---

3 Καμία λύση (ασύμβατο σύστημα)

Αν $\Delta = 0$ και τουλάχιστον μία από τις $\Delta_{x,} \Delta_y \neq 0$

☞ Οι ευθείες είναι **παράλληλες και διαφορετικές**.

Μνημονικός πίνακας

Δ	Δx	Δy	Λύσεις
≠0	οτιδήποτε	οτιδήποτε	**Μία λύση**
0	0	0	**Άπειρες λύσεις**
0	≠0 ή ≠0	–	**Καμία λύση**

🔹 Άσκηση 1

Δίνονται $a, b \in \mathbb{R}$.
Το σύστημα

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ 2x + by = 3 \end{cases}$$

να έχει **μοναδική λύση**. Να βρεθεί η συνθήκη.

Λύση

Κύρια ορίζουσα:

$$\Delta = ab - 2.$$

Μοναδική λύση ⇔

$$\Delta \neq 0 \Rightarrow ab \neq 2.$$

✅ **Απάντηση:** $ab \neq 2$.

🔹 Άσκηση 2

Βρείτε τα k ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} x + ky = 2 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$$

να είναι **ασύμβατο**.

Λύση

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2k.$$

Ασύμβατο ⇒

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4 - 2k = 0 \Rightarrow k = 2.$$

Ελέγχουμε:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & k \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5k = 8 - 10 = -2 \neq 0.$$

Άρα πράγματι **καμία λύση**.

🔹 Άσκηση 3

Βρείτε τα λ ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ 2\lambda x + 2y = 4 \end{cases}$$

να έχει **άπειρες λύσεις**.

Λύση

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 2\lambda & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda - 2\lambda = 0.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2\lambda & 4 \end{vmatrix} = 4\lambda - 4\lambda = 0.$$

Άρα για **κάθε** λ:

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$$

⇒ άπειρες λύσεις.

✅ **Απάντηση:** για όλα τα $\lambda \in \mathbb{R}$.

🔹 Άσκηση 4 (τύπου Αρχιμήδη)

Θετικοί ακέραιοι m, n.
Το σύστημα

$$\begin{cases} mx + y = m \\ x + ny = n \end{cases}$$

να **μην έχει λύση**. Βρείτε τα (m, n).

Λύση

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & n \end{vmatrix} = mn - 1.$$

Καμία λύση ⇒

$$\Delta = 0 \Rightarrow mn = 1.$$

Με m, n θετικούς ακέραιους:

$$m = n = 1.$$

Έλεγχος:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m & 1 \\ n & n \end{vmatrix} = mn - n = n(m-1) = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & m \\ 1 & n \end{vmatrix} = mn - m = m(n-1) = 0.$$

Άρα εδώ παίρνουμε **άπειρες λύσεις**, όχι καμία.
Επομένως **δεν υπάρχει** ζεύγος θετικών ακεραίων με καμία λύση.

✅ **Απάντηση: κανένα ζεύγος**.

Ασκήσεις

1

Για ποια $k \in \mathbb{R}$ το σύστημα

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

έχει **μοναδική λύση**;

2

Βρείτε τα λ ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + \lambda y = 6 \end{cases}$$

να έχει **άπειρες λύσεις**.

3

Βρείτε τα α ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + y = 2 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$$

να είναι **ασύμβατο**.

4

Θετικοί ακέραιοι m, n.
Το σύστημα

$$\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ 2x + ny = 1 \end{cases}$$

να έχει **μοναδική λύση**.
Να βρείτε όλους τους δυνατούς (m, n).

5

Για ποιο k το σύστημα

$$\begin{cases} x + ky = 2 \\ kx + y = 2 \end{cases}$$

έχει **άπειρες λύσεις**;

6

Βρείτε τα λ ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ 2\lambda x + 2y = 3 \end{cases}$$

να **μην έχει λύση**.

7

Για ποια a το σύστημα

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

έχει **ακριβώς μία λύση με** $x = y$;

8

Βρείτε τα k ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} kx + y = 0 \\ x + ky = 0 \end{cases}$$

να έχει **μη μηδενική λύση** $(x, y) \neq (0, 0)$.

(κλασική άσκηση ιδιοτιμών τύπου Αρχιμήδη)

9

Θεωρούμε

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ kx + (k+1)y = 2 \end{cases}$$

Να βρεθεί το k ώστε η λύση να ικανοποιεί $x > 0,\ y > 0$.

10 (πιο δύσκολη)

Για ποια λ το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + (1-\lambda)y = 1 \\ (1-\lambda)x + \lambda y = 1 \end{cases}$$

έχει:

α) μοναδική λύση

β) άπειρες λύσεις

γ) καμία λύση