24) Γ) 10

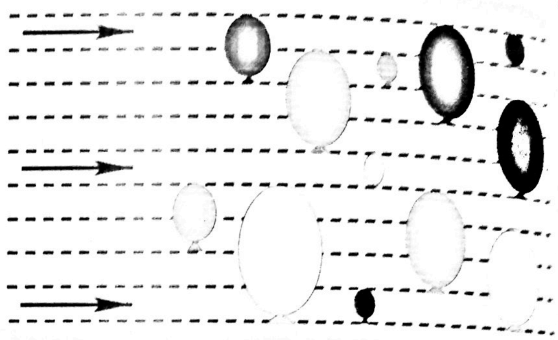
Αφού ο Ηρακλής έκανε 14 κοψιές και κάθε τρίτη κοψιά φυτρώνει ένα καινούργιο κεφάλι, σημαίνει ότι ***φύτρωσε κεφάλι μετά την τρίτη, έκτη, ένατη και δωδέκατη κοψιά***. Δηλαδή φύτρωσαν τελικά 4 νέα κεφάλια. Αφού ο Ηρακλής έκοψε συνολικά 14 κεφάλια σημαίνει ότι στην αρχή η Λερναία Ύδρα είχε 14-4 = 10 κεφάλια. Αν θέλουμε να κάνουμε επαλήθευση, λέμε (εδώ τα βέλη δηλώνουν κοψιά, οπότε μετά από κάθε τρίτο βέλος προσθέτουμε ένα κεφάλι)

10 → 9 → 8 → 7 που έγιναν 8 → 7 → 6 → 5 που έγιναν 6 → 5 → 4 → 3 που έγιναν 4 → 3 → 2 → 1 που έγιναν 2 → 1 → 0. Σύνολο 14 κοψιές.

Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού

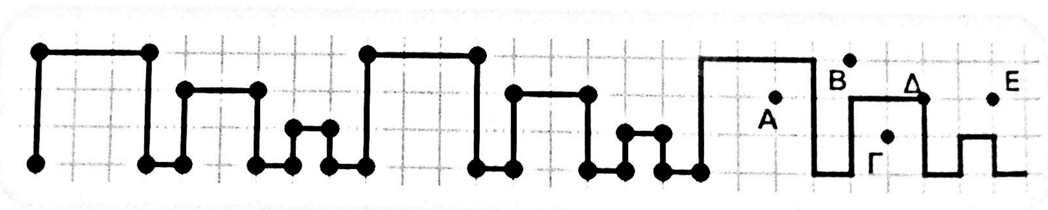
1) Γ) 4

Το σχήμα δείχνει τα 4 μπαλόνια (με γκρι χρώμα) που δεν θα χτυπηθούν από τα βέλη.



2) Δ) το Δ

Δεν έχουμε παρά να σχεδιάσουμε με το μολύβι μας πάνω στο τετραγωνισμένο χαρτί την τρίτη επανάληψη του μοτίβου. Θα προκύψει η κόκκινη γραμμή που φαίνεται στην εικόνα, η οποία περνάει από το Δ.



3) Γ)

Επειδή ο κύλινδρος, που από ψηλά φαίνεται ως κύκλος, είναι στην μέση του μακρόστενου παραλληλογράμμου, πρέπει να αποκλείσουμε τις απαντήσεις (Α), (Β) και (Δ). Επίσης στο αρχικό σχήμα αν περπατήσει κανείς στο μακρόστενο παραλληλόγραμμο από την αρχή προς τον κύβο, θα έχει τον κύβο στο αριστερό του χέρι, ενώ στην (Ε) είναι στο δεξί, οπότε αποκλείουμε και αυτή την περίπτωση. Μένει η (Γ), που ταιριάζει σε όλα τα δεδομένα.

4) Ε)

Μετά από τέσσερις μετακινήσεις του πάνω τούβλου προς την βάση, ο πύργος ξαναπαίρνει την αρχική του μορφή. Από εκεί και πέρα κάθε τετράδα πύργων είναι ολόιδια με την αρχική τετράδα. Ετσι, ο 16ος πύργος, που είναι ο τέταρτος της τέταρτης τετράδας, είναι ίδιος με τον τέταρτο της πρώτης τετράδας. Δηλαδή η σωστή απάντηση είναι η (Ε).

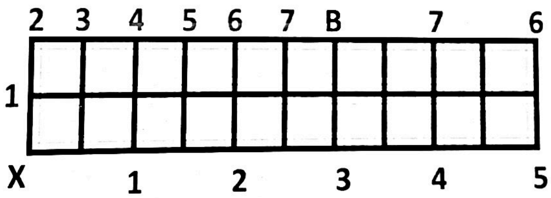
5) **Δ)** 21

α΄ τρόπος. Με τα τρία βέλη στην πρώτη προσπάθεια η Άρτεμις πήρε 12 πόντους πετυχαίνοντας την μεσαία ζώνη του στόχου. Άρα κάθε βέλος της έδωσε 12:3=4 πόντους. Από την δεύτερη προσπάθεια έχει δύο βέλη στην μεσαία ζώνη και ένα στο κέντρο κερδίζοντας 15 πόντους. Άρα το βέλος στο κέντρο της έδωσε 15-4-4=7 πόντους. Οπότε στην τρίτη προσπάθεια πήρε 3x7=21 πόντους αφού πέτυχε και με τα τρία βέλη το κέντρο.

β΄ τρόπος. Από τον πρώτο στον δεύτερο γύρο η Άρτεμις έκανε καλύτερη βολή σε ένα βέλος. Συγκεκριμένα, ένα βέλος από την μεσαία ζώνη την πρώτη φορά, πέτυχε το κέντρο την δεύτερη. Αυτό της έδωσε 15-12=3 πόντους παραπάνω. Με άλλα λόγια, η μετακίνηση ενός βέλους από την μεσαία ζώνη στην κεντρική αυξάνει κατά τρεις τους πόντους. Επειδή έχουμε δύο τέτοια βέλη από την δεύτερη προσπάθεια στην τρίτη, οι πόντοι της δεύτερης προσπάθειας θα αυξηθούν κατά 3+3=6 πόντους. Άρα στην τρίτη προσπάθεια οι πόντοι θα γίνουν 15+6=21.

6) **Β)** στο Β

α΄ τρόπος. Όταν το αργό σαλιγκάρι φτάσει στον πρώτο κόμβο της διαδρομής του, το γρήγορο που έχει διπλάσια ταχύτητα από το αργό, θα φτάσει στον δεύτερο κόμβο της δικής του διαδρομής. Αυτό το μοτίβο επαναλαμβάνεται: Για κάθε κόμβο του αργού σαλιγκαριού, το γρήγορο περπατάει δύο. Στο σχήμα σημειώσαμε τις αντίστοιχες θέσεις των σαλιγκαριών. Θα διαπιστώσουμε ότι θα βρεθούν συγχρόνως στο σημείο Β.



β΄ τρόπος. Αφού το ένα σαλιγκάρι έχει διπλάσια ταχύτητα από το άλλο σημαίνει ότι όταν συναντηθούν, το ένα θα έχει περπατήσει διπλάσια απόσταση από το άλλο. Μετρώντας την περίμετρο του κήπου θα διαπιστώσουμε ότι έχει μήκος 24 μονάδες. Οπότε το αργό σαλιγκάρι θα περπατήσει τις 8 από αυτές τις μονάδες όταν το άλλο θα περπατήσει τις 16, που είναι το διπλάσιο του 8, και τα δύο μαζί δίνουν 8+16=24. Μετρώντας περιμετρικά απόσταση 8 μονάδων από το Χ, θα δούμε ότι το αργό σαλιγκάρι θα βρεθεί στο σημείο Β.

7) **Ε)** 72 μ.

Αφού το τετράγωνο έχει περίμετρο 36 μ., σημαίνει ότι κάθε πλευρά του έχει μήκος 36:4 = 9 μ. Από το σχήμα βλέπουμε ότι το κάθε τρίγωνο έχει μία κοινή πλευρά με το τετράγωνο, και άρα μήκους 9 μ. Αφού το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, σημαίνει ότι και οι άλλες πλευρές του τριγώνου έχουν μήκος 9 μ. Στην περίμετρο του κήπου βλέπουμε 8 τέτοιες πλευρές. Οπότε η περίμετρος έχει μήκος 8x9 = 72 μ. Ένας λίγο καλύτερος τρόπος να σκεφτούμε είναι ο εξής: Το τετράγωνο έχει 4 ίσες πλευρές και ο κήπος έχει 8 πλευρές (τις διπλάσιες) οι οποίες είναι όλες ίσες με τις προηγούμενες. Άρα ο κήπος έχει την διπλάσια περίμετρο από το τετράγωνο, δηλαδή 2x36 = 72 μ.

8) Δ) Σάββατο

Από το ημερολόγιο βλέπουμε ότι η 14 του μηνός είναι ημέρα Τρίτη (το πρώτο από τα δύο Τ δηλώνει την ημέρα Τρίτη ενώ το δεύτερο δηλώνει Τετάρτη). Προσθέτοντας 7 διαπιστώνουμε ότι θα είναι Τρίτη και τις 21 του μηνός. Άλλες 4 μέρες μέχρι τις 25 μας δίνει ότι η ημερομηνία αυτή πέφτει ημέρα Σάββατο.

9) Δ) 31

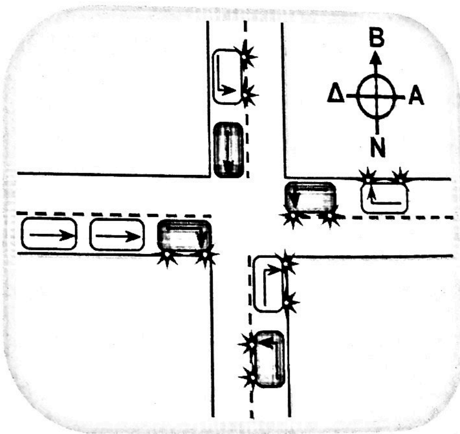
Τα 26 ευρώ που έχει η παρέα χωρίζονται ως 26=5+5+5+5+5+1 (πέντε πεντάδες συν ένα). Με τα 5+5+5+5+5 ευρώ θα αγοράσει 6+6+6+6+6 = 30 παγωτά. Μένει 1 ευρώ με το οποίο θα αγοράσει 1 ακόμα παγωτό, σύνολο 31.

10) Γ) το Σάββατο

Καταγράφουμε τις ημέρες και τον αντίστοιχο αριθμό των κομματιών χαρτιού. Ο κάθε αριθμός προκύπτει από τον προηγούμενο με διπλασιασμό του.

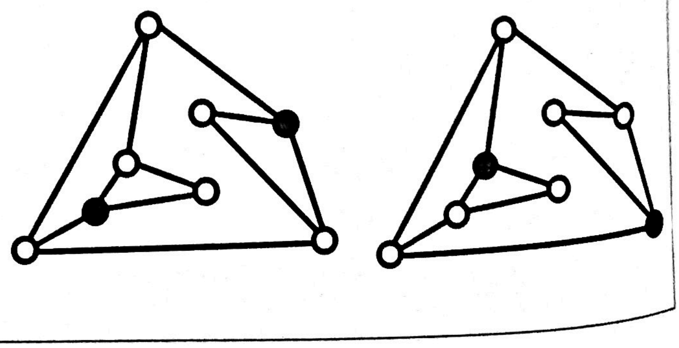
Δευτέρα = 5 κομμάτια, Τρίτη = 10 κομμάτια, Τετάρτη = 20 κομμάτια, Πέμπτη = 40 κομμάτια
Παρασκευή = 80 κομμάτια, Σάββατο = 160 κομμάτια (πάνω από 100).

11) Β)



Στο Νότιο μέρος της διασταύρωσης θα βρεθούν 3 αυτοκίνητα, τα σημειωμένα με κόκκινο. Στο Δυτικό θα βρεθεί 1 αυτοκίνητο, το πράσινο. Ήδη από αυτές τις πληροφορίες αντιλαμβανόμαστε ότι η σωστή απάντηση είναι η εικόνα (Β) καθώς είναι η μόνη που έχει 3 αυτοκίνητα στην Νότια πλευρά και 1 στην Δυτική. Μπορούμε ωστόσο να ελέγξουμε ότι και οι άλλες πλευρές είναι σωστές. Το αφήνουμε στον αναγνώστη ως άμεσο.

12) Α) 2



Επειδή κανένας γλόμπος δεν συνδέεται με όλους τους άλλους, σημαίνει ότι πρέπει να ακουμπήσουμε τουλάχιστον δύο γλόμπους. Το σχήμα αριστερά μας δείχνει έναν τρόπο να ακουμπήσουμε δύο γλόμπους (τους κόκκινους) και να ανάψουν όλοι οι άλλοι.

Το σχήμα δεξιά μας δείχνει έναν δεύτερο τρόπο να πετύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

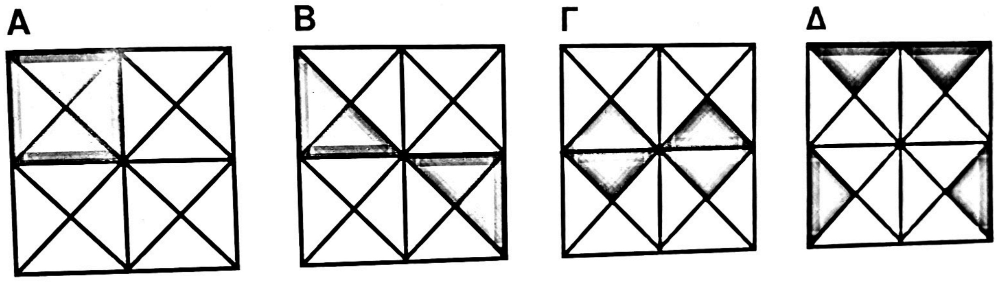
13) **Δ) 13**

Επειδή από το 3 αφαιρούμε έναν αριθμό για να μας δώσει 5 (που είναι μεγαλύτερο από το 3) σημαίνει ότι έχουμε κρατούμενο, και η πράξη είναι αφαίρεση από το 13. Οπότε ο αριθμός που αφαιρέσαμε είναι ο 8. Παίρνοντας υπόψη και το κρατούμενο βλέπουμε ότι ο πρώτος αριθμός είναι ο 53. Έλεγχος: 25+28=53. Άρα το άθροισμα των δύο σβησμένων αριθμών είναι 5+8=13.

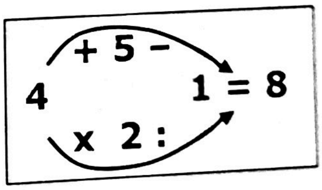
$$\begin{array}{r} 53 \\ -\ 28 \\ \hline 25 \end{array}$$

14) **Ε) Σε κανένα. Όλες οι μαυρισμένες περιοχές είναι ίσες μεταξύ τους**

Αν χωρίσουμε το σχήμα σε τρίγωνα όπως στις εικόνες, θα διαπιστώσουμε ότι σε κάθε τετράγωνο η μαυρισμένη περιοχή είναι όσο 4 τρίγωνα (δύο πράσινα και δύο κόκκινα). Άρα όλες οι μαυρισμένες περιοχές είναι ίσες μεταξύ τους.



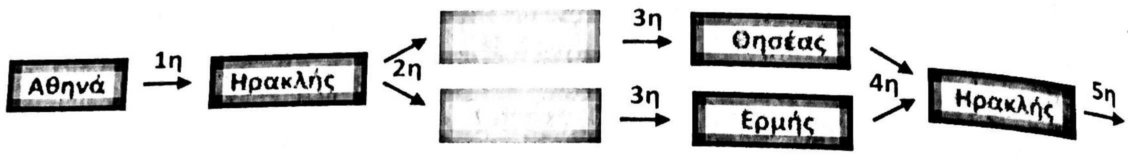
15) **Γ) 3**



Η επάνω πράξη έχει μία πρόσθεση και μία αφαίρεση. Η πρόσθεση πρέπει να δίνει αριθμό μεγαλύτερο του 8 αφού ***μετά την αφαίρεση*** πρέπει να δίνει αποτέλεσμα 8. Άρα για την πρόσθεση πρέπει να χρησιμοποιηθούν οπωσδήποτε οι αριθμοί 4 και 5 γιατί το 4+5 = 9 είναι ο μόνος τρόπος να πετύχουμε άθροισμα μεγαλύτερο από 8 χρησιμοποιώντας τους 1, 2, 3, 4 ή 5. Έτσι η πάνω πράξη είναι είτε η 4+5-1=8 ή η 5+4-1=8. Συμπεραίνουμε ότι ο δεξιότερος αριθμός (κόκκινος στο σχήμα) είναι ο 1. Για την κάτω πράξη έχουμε ένα γινόμενο και μία διαίρεση (με το 1) που δίνει 8. Άρα το γινόμενο είναι 8 (αφού η διαίρεση με το 1 δεν αλλάζει το αποτέλεσμα), που σημαίνει ότι προέρχεται από τους 2x4=8 ή 4x2 = 8. Ο αριθμός 4 είναι κοινός στις δύο περιπτώσεις, δηλαδή της επάνω και της κάτω πράξης, οπότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι η σωστή διάταξη είναι η σημειωμένη. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός που δεν χρησιμοποιήθηκε είναι ο 3.

16) **Γ) ο Ηρακλής**

Ο Ηρακλής, ως αγόρι, θα ρίξει την (δεύτερη) μπαλιά σε έναν από τους Ερμή ή Θησέα. Δεν ξέρουμε σε ποιον, αλλά θα εξετάσουμε και τις δύο εκδοχές. Αν την ρίξει στον Ερμή τότε αυτός θα την ρίξει σε αγόρι αλλά όχι πίσω στον Ηρακλή. Άρα θα την ρίξει στον Θησέα. Όμοια, αν ο Ηρακλής ρίξει την μπαλιά στον Θησέα, τότε αυτός θα την ρίξει στον Ερμή. Συνεχίζοντας με τον ίδιο συλλογισμό, δηλαδή από αγόρι σε αγόρι αλλά όχι σε αυτόν από τον οποίο πήρε την μπαλιά, θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν οι εξής δύο περιπτώσεις:



Και στις δύο περιπτώσεις η τέταρτη μπαλιά θα είναι προς τον Ηρακλή, οπότε αυτός θα ρίξει την πέμπτη μπαλιά.

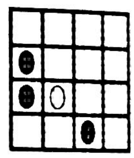
17) Α) στο 1° κλουβί

Επειδή η πρόταση «ένα και ένα κάνει δύο» που γράφει η τρίτη πόρτα είναι σωστή, σημαίνει ότι οι άλλες δύο είναι λάθος. Επομένως είναι λάθος η πρόταση του πρώτου κλουβιού και άρα το λιοντάρι βρίσκεται εκεί. Μπορούμε τώρα να ελέγξουμε ότι όλα τα δεδομένα ταιριάζουν σε αυτή την εκδοχή.

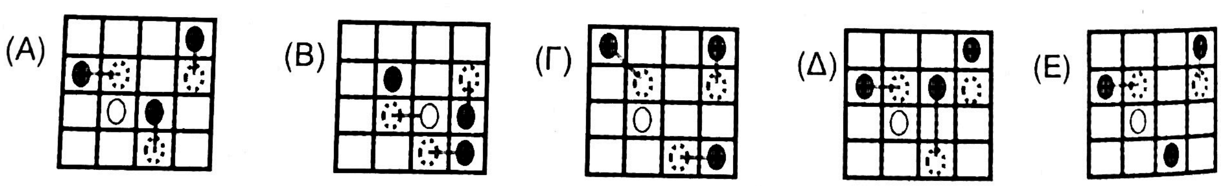
18) Ε)

Όταν διπλώσουμε το ανάπτυγμα (Ε) ώστε να γίνει κύβος, θα διαπιστώσουμε ότι οι δύο λευκές έδρες είναι η μία απέναντι της άλλης. Άρα αποκλείεται το ανάπτυγμα αυτό να είναι ο κύβος μας αφού όλες οι απέναντι έδρες του έχουν διαφορετικό χρώμα. Με λίγη τρισδιάστατη φαντασία μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όλα τα άλλα αναπτύγματα είναι σωστά.

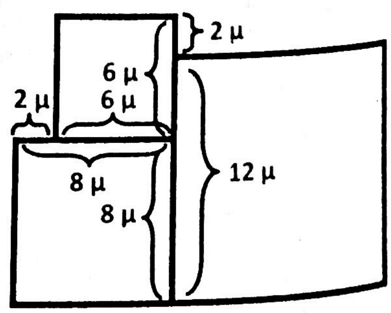
19) Α)



Από τις εικόνες στην εκφώνηση είναι σαφές ότι η πασχαλίτσα που δεν κινείται είναι η κίτρινη του αρχικού σχήματος (δεξιά). Από τις πέντε απαντήσεις που δίνονται, η μόνη που ταιριάζει στις επιτρεπτές κινήσεις είναι η (Α). Στο σχήμα δείχνουμε πώς έγινε η μετακίνηση από την τρίτη φορά στην τέταρτη. Οι υπόλοιπες εικόνες είναι λάθος, η καθεμία για άλλο λόγο: Στην (Β) μετακινήθηκε αυτή που πρέπει να μείνει αμετακίνητη (κίτρινη). Στην (Γ) η μία πασχαλίτσα μετακινήθηκε διαγώνια, στην (Δ) μία μετακινήθηκε κατά δύο τετράγωνα και στην (Ε) μία πασχαλίτσα δεν μετακινήθηκε.

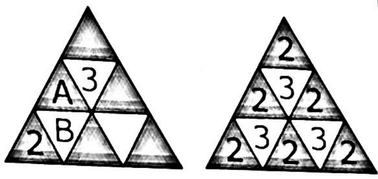


20) Γ) 12 μ



Αφού η πλευρά του μικρού τετραγώνου είναι 6 μ, εύκολα βλέπουμε από το σχήμα ότι το μεσαίο τετράγωνο έχει πλευρά 6 + 2 = 8μ. Άρα το ύψος του σχήματος είναι 6 + 8 =14 μ. Αφαιρώντας τα 2 μ που προεξέχει το μικρό τετράγωνο, συμπεραίνουμε ότι το μεγάλο τετράγωνο έχει πλευρά μήκους 14-2=12 μ.

21) Γ) 21



Το τρίγωνο με τον αριθμό Α έχει κοινό σύνορο με δύο τρίγωνα, το ένα από τα οποία έχει το 3 και το άλλο έχει έναν αριθμό Β. Από την υπόθεση είναι Α+3=Α+Β. Ο μόνος τρόπος να συμβαίνει αυτό είναι αν Β=3. Αφού τα δύο κάτω αριστερά τρίγωνα έχουν τους αριθμούς 2 και 3, με άθροισμα 2+3=5, σημαίνει ότι όλα τα ζεύγη τριγώνων με κοινή πλευρά πρέπει να έχουν άθροισμα 5. Εύκολα τώρα συμπληρώνουμε τους αριθμούς στα τρίγωνα: Το διπλανό κάθε τριγώνου που έχει τον αριθμό 2 είναι τρίγωνο που έχει τον 3, και αντίστροφα. Στο τέλος θα δούμε ότι τα γαλάζια τρίγωνα περιέχουν το 2 και τα κίτρινα το 3. Το άθροισμα όλων των αριθμών είναι 2+2+2+2+2+2+3+3+3=21.

22) Γ) δύο

Με απλές δοκιμές βλέπουμε ότι ο μόνος τρόπος να γράψει ο Αρχιμήδης τον 7 ως άθροισμα τριών διαφορετικών αριθμών του πίνακα είναι ο 7=1+2+4. Για να γράψει ο Διόφαντος τον 8 ως άθροισμα τριών διαφορετικών αριθμών του πίνακα υπάρχουν ακριβώς δύο τρόποι, ο 8=1+2+5 και ο 8=1+3+4. Και οι δύο είναι πιθανοί, οπότε ας εξετάσουμε χωριστά τις δύο επιλογές. Στην πρώτη έχουμε

-Αρχιμήδης: **1, 2**, 4 και Διόφαντος: **1, 2,** 5. Άρα οι αριθμοί που υπογράμμισαν και οι δύο είναι **δύο** (οι κόκκινοι)

-Αρχιμήδης: **1, 2**, 4 και Διόφαντος: **1**, 3, **4**. Άρα οι αριθμοί που υπογράμμισαν και οι δύο είναι πάλι **δύο** (οι κόκκινοι). Και στις δύο περιπτώσεις, οι αριθμοί που υπογράμμισαν και ο Αρχιμήδης και ο Διόφαντος είναι δύο.

23) Γ) Γ

Στην δεξιά ζυγαριά τα πέντε βάρη ισορροπούν άρα στην κάθε πλευρά το βάρος είναι το μισό του 3+5+5+5+8 = 26, δηλαδή 13. Στο αριστερό σκέλος βλέπουμε δύο μπάλες, τις Α και Δ. Από τα βάρη που δίνονται ο μόνος συνδυασμός βαρών που έχει άθροισμα 13 είναι ο 5+8. Οπότε τα Α και Δ είναι 5 και 8 αλλά δεν ξέρουμε (ακόμη) ποιο είναι ποιο. Έχουμε λοιπόν δύο εκδοχές, την **(Α=5, Δ =8)** και την **(Α=8, Δ=5)**. Θα δούμε ότι η δεύτερη εκδοχή αποκλείεται. Πραγματικά, αν ήταν Α=8 τότε στο δεξί σκέλος της πρώτης ζυγαριάς θα είχαμε βάρος ***τουλάχιστον 8+3=11*** κιλά (διότι το 3 είναι το ελαφρύτερο από όλα τα βάρη). Τότε όμως στο αριστερό σκέλος θα είχαμε ***το πολύ 5+5 =10*** κιλά (αφού τα 8 είναι στο άλλο σκέλος, σημαίνει ότι το αριστερό σκέλος θα είναι είτε 3+5 = 8 κιλά ή 5+5 = 10 κιλά, πάντως και στις δύο περιπτώσεις το πολύ 10). Αλλά τότε η ζυγαριά δεν θα έδειχνε σωστά (το βαρύ είναι πιο ψηλά). Τελικά αποκλείεται να είναι Α=8, και μένει η Α=5, και άρα Δ=8. Έπεται ότι τα άλλα τρία βάρη, τα ***Β, Γ, Ε είναι 3, 5, 5 κιλά με κάποια σειρά***. Βλέπουμε τώρα στην αριστερή ζυγαριά ότι ζυγίζονται τα Α=5, Β, Γ, Ε. Αφού τα Α+Γ = 5+Γ είναι πιο ελαφριά από τα Β+Ε, αποκλείεται να είναι Γ=5 (γιατί τότε το δεξί σκέλος θα ήταν 5+5 κιλά που είναι πιο πολύ από τα 3+5=8 του αριστερού). Συμπεραίνουμε ότι τελικά Γ=3 και άρα Β=Δ=5 κιλά. Συνοπτικά ***Α=Β=Ε=5 κιλά, Γ=3 κιλά και Δ=8 κιλά.***

24) Δ) ΑΑΑΒΓΒ

Θα δούμε ότι ο ***μεγαλύτερος δυνατός*** εξαψήφιος αριθμός που γράφεται με τρία Α, δύο Β και ένα Γ, εξαρτάται από ποια ακριβώς είναι τα ψηφία Α, Β, Γ. Όμως θα δούμε ότι αποκλείεται να είναι ο ΑΑΑΒΓΒ, όποια και αν είναι τα Α, Β, Γ, ενώ όλοι οι άλλοι είναι πιθανοί. Ας δούμε πρώτα γιατί ο πιο μεγάλος αποκλείεται να είναι ο ΑΑΑΒΓΒ. Πραγματικά, αν Β>Γ τότε ο αριθμός ***ΑΑΑΒΒΓ είναι σίγουρα πιο μεγάλος από τον*** ΑΑΑΒΓΒ (έχουν τα τέσσερα πρώτα ψηφία ίδια ενώ ο πρώτος έχει μεγαλύτερο το πέμπτο ψηφίο). Όμοια, αν Γ>Β τότε ο ***ΑΑΑΓΒΒ είναι σίγουρα πιο μεγάλος από τον*** ΑΑΑΒΓΒ (έχουν τα τρία πρώτα ψηφία ίδια ενώ ο πρώτος έχει μεγαλύτερο το τέταρτο ψηφίο). Και στις δύο περιπτώσεις ο ΑΑΑΒΓΒ ***δεν*** είναι ο μεγαλύτερος αριθμός της συγκεκριμένης μορφής που μπορούμε να γράψουμε. Ας δούμε παραδείγματα που όλες οι άλλες περιπτώσεις μπορούν να προκύψουν ως ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός με τα εν λόγω ψηφία.

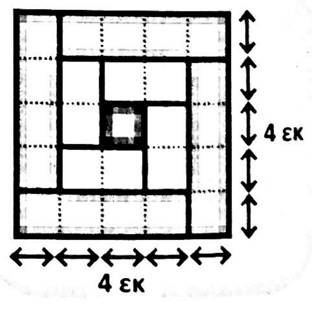
Ο (Α) ΑΑΑΒΒΓ είναι ο μεγαλύτερος δυνατός εξαψήφιος με τρία Α, δύο Β και ένα Γ, σε πολλές περιπτώσεις επιλογής των Α, Β, Γ. Για παράδειγμα αν Α=3, Β=2, Γ=1 τότε ο μεγαλύτερος είναι ο 333221 που είναι της μορφής (Α) ΑΑΑΒΒΓ. Ανάλογα, ο (Β) ΓΑΑΑΒΒ είναι ο μεγαλύτερος στην περίπτωση Α=2, Β=1,Γ=3 (και σε πολλές άλλες). Ο (Γ) ΒΒΑΑΑΓ είναι ο μεγαλύτερος αν π.χ. Α=2, Β=3, Γ=1. Τέλος, ο (Ε) ΑΑΑΓΒΒ είναι ο μεγαλύτερος αν Α=3, Β=1, Γ=2.

25) Γ) 45

Έχουμε τα δεδομένα α) $\boxed{\text{Μαμά + Κατερίνα = 36}}$ και β) $\boxed{\text{Μαμά + Γιαγιά = 81}}$

Αφού 81-36 = 45 σημαίνει ότι προσθέτοντας 45 στα χρόνια της Κατερίνας, στο πρώτο άθροισμα, θα βρούμε $\boxed{\text{Μαμά + Κατερίνα + 45 = 81}}$. Συγκρίνοντας με το δεύτερο άθροισμα καταλαβαίνουμε ότι η Γιαγιά είναι 45 χρόνια πιο μεγάλη από την Κατερίνα. Συνεπώς όταν γεννήθηκε η Κατερίνα, η Γιαγιά ήταν 45 χρονών.

26) Δ) 100 εκ



Ένας εύκολος τρόπος να μετρήσουμε το μήκος κάθε κομματιού από τα 9 του μαραγκού, είναι να χωρίσουμε το πλακάκι σε τετράγωνα ίσα με το κεντρικό 4x4 τετράγωνο. Βλέπουμε τώρα ότι έχουμε μία σανίδα πλάτους 4 εκ και μήκους 4 εκ (την κεντρική), τέσσερις σανίδες πλάτους 4 εκ και μήκους 8 εκ (τις κίτρινες) και τέσσερις σανίδες πλάτους 4 εκ και μήκους 16 εκ (τις εξωτερικές καφέ). Το συνολικό μήκος είναι 4 + 4x8 +4x16 = 100 εκ.

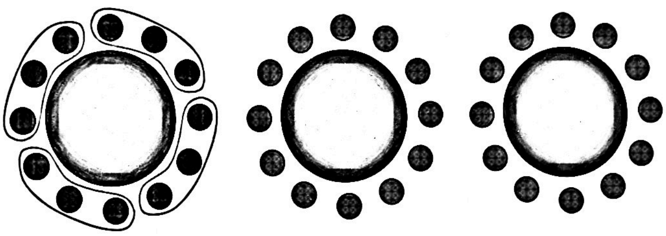
27) Β) 3

Το άθροισμα όλων των αριθμών που θέλει να χωρίσει ο Δάσκαλος είναι 2+3+…+10=54. Αφού ο Δάσκαλος θέλει η κάθε ομάδα να έχει το ίδιο άθροισμα σημαίνει ότι το συνολικό άθροισμα 54 είναι πολλαπλάσιο του (κοινού) αθροίσματος των ομάδων. Ακριβέστερα, πρέπει

(πλήθος ομάδων) x (άθροισμα αριθμών κάθε ομάδας) = (άθροισμα όλων των αριθμών) = 54

Με άλλα λόγια το κοινό άθροισμα των αριθμών στις ομάδες είναι διαιρέτης του 54 και άρα ένας από τους αριθμούς **1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 ή 54**. Επειδή ο αριθμός 10 βρίσκεται σε κάποια ομάδα, σημαίνει ότι το κοινό άθροισμα των αριθμών στις ομάδες είναι 10 ή παραπάνω. Άρα αποκλείονται οι περιπτώσεις 1, 2, 3, 6, 9. Μένουν οι 18, 27 ή 54. Αν το άθροισμα είναι 18, τότε το αντίστοιχο πλήθος ομάδων είναι 3 διότι 3x18 = 54. Όμοια, αν το κοινό άθροισμα είναι 27, τότε το αντίστοιχο πλήθος ομάδων είναι 2 διότι 2x27= 54, και αν είναι 54 τότε έχουμε μία ομάδα (όλοι οι αριθμοί μαζί), ενώ αποκλείονται άλλες περιπτώσεις. Άρα το μεγαλύτερο πλήθος ομάδων είναι 3, αρκεί να δείξουμε ότι μπορούμε πράγματι να χωρίσουμε τους αριθμούς 2, 3, … , 10 σε 3 ομάδες με άθροισμα 18 η καθεμία. Αυτό είναι εύκολο, και μάλιστα με πολλούς τρόπους. Δίνουμε έναν: Μία ομάδα έχει τους (8 και 10), η δεύτερη τους (9, 7 και 2) και η τρίτη τους υπόλοιπους, δηλαδή τους (6, 5, 4 και 3). Άρα το μέγιστο πλήθος χωρισμού σε ομάδες με ίδιο άθροισμα είναι 3, και το κοινό άθροισμα είναι 18.

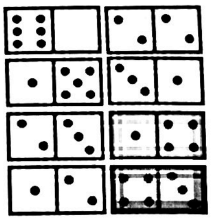
28) Β) 8

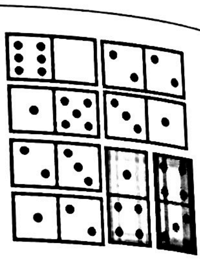


Αποκλείεται να κάθονται 3 δράκοι ο ένας δίπλα στον άλλον γιατί ο μεσαίος λέγοντας ***«και οι δύο γείτονές μου είναι δράκοι»*** θα είχε πει την αλήθεια, ενώ ξέρουμε ότι οι δράκοι λένε πάντα ψέματα. Άρα σε κάθε 3 συνεχόμενα ζώα στο τραπέζι, το πολύ τα δύο είναι δράκοι. Αν χωρίσουμε τώρα την παρέα σε (τέσσερις) τριάδες όπως στο σχήμα αριστερά, σημαίνει ότι σε κάθε μία από αυτές τις τέσσερις ομάδες, υπάρχουν το πολύ 2 δράκοι. Άρα ***οι δράκοι είναι το πολύ 4x2=8***. Όμως δεν έχουμε τελειώσει. Πρέπει οπωσδήποτε να δείξουμε ότι οι 8 δράκοι είναι αληθινή εκδοχή. Στο μεσαίο σχήμα δείχνουμε ότι μπορεί πραγματικά να είναι 8 οι δράκοι (πράσινοι στο σχήμα, ενώ τα καγκουρό είναι τα ανοικτό καφέ). Ας μην νομισθεί ότι στο τραπέζι κάθονται πάντα 8 δράκοι. Στο σχήμα δεξιά δείχνουμε μία κατάσταση (υπάρχουν και άλλες) όπου οι δράκοι είναι 6 και ικανοποιούνται οι συνθήκες του προβλήματος. Αυτό που έχει σημασία είναι, όπως δείξαμε, ότι οι δράκοι ***δεν μπορεί να είναι περισσότεροι από 8*** και ότι ***το 8 είναι αληθινή εκδοχή***.

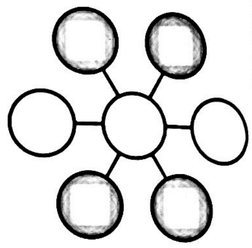
29) Γ) 3

Αν προσθέσουμε όλους τους αριθμούς που βλέπουμε στα ντόμινο, δηλαδή χωρίς τον κρυμμένο, θα βρούμε 37. Αφού κάθε στήλη (και κάθε γραμμή) έχει το ίδιο πλήθος από κουκκίδες, ***το συνολικό πλήθος από κουκκίδες πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 4*** (τέσσερις φορές οποιαδήποτε στήλη ή γραμμή). Επειδή το πλακάκι που δεν φαίνεται έχει από 0 έως 6 κουκκίδες, το συνολικό άθροισμα, μαζί με το κρυμμένο κομμάτι, πρέπει να είναι ένας από τους αριθμούς 37+0=37 ή 37+1=38, 37+2=39, 37+3=40 ή 37+4=41 ή 37+5=42 ή 37+6=43. Από αυτούς τους αριθμούς ***το μόνο πολλαπλάσιο του 4 είναι το 37+3=40***. Άρα το κρυμμένο κομμάτι του ντόμινο έχει 3 κουκκίδες. Αν θέλαμε, αν και δεν το ζητά η άσκηση, να διευθετήσουμε τα ντόμινο έτσι ώστε το πλήθος από τις κουκκίδες σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη να είναι το ίδιο, παραθέτουμε δύο παραδείγματα (υπάρχουν και άλλοι τρόποι). Οι εικονιζόμενοι είναι σχεδόν ίδιοι, με μόνη διαφορά ότι τα δύο κάτω δεξιά ντόμινο έχουν περιστραφεί κάθετα από οριζόντια.

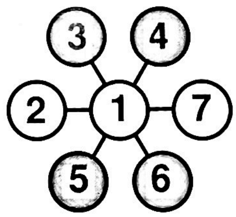


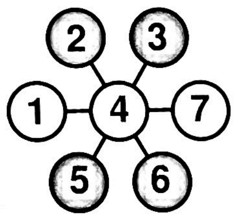


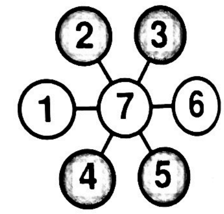
30) B) οποιοσδήποτε από τους 1, 4, 7



Ας πούμε ότι τοποθετήσαμε έναν από τους αριθμούς στον κεντρικό (λευκό) κύκλο. Μένουν οι άλλοι έξι που πρέπει να τοποθετηθούν στους εξωτερικούς. Ξέρουμε ότι το άθροισμα των αριθμών σε κάθε τρεις κύκλους που βρίσκονται σε ευθεία είναι το ίδιο σε όλες τις περιπτώσεις. Όμως ο αριθμός στον κεντρικό κύκλο είναι κοινός σε όλες αυτές τις τριάδες. Συμπεραίνουμε ότι ***το άθροισμα των αριθμών στους δύο πράσινους κύκλους* είναι ίσο με *το άθροισμα των αριθμών στους δύο κίτρινους κύκλους*** που με τη σειρά του **είναι ίσο με *το άθροισμα των αριθμών στους δύο καφέ κύκλους*** (αγνοούμε δηλαδή τον λευκό κύκλο). Έπεται ότι το άθροισμα των αριθμών στους έξι κύκλους είναι πολλαπλάσιο του 3 (ακριβέστερα, είναι 3 φορές όσο το άθροισμα των αριθμών στους πράσινους κύκλους ή, πράγμα που είναι το ίδιο, 3 φορές όσο το άθροισμα των αριθμών στους κίτρινους κύκλους ή στους καφέ κύκλους). Αυτή η πληροφορία θα έχει ως συμπέρασμα, όπως θα δούμε, ότι μερικοί από τους αριθμούς 1 έως 7 αποκλείεται να είναι στον κεντρικό κύκλο. Για παράδειγμα ο 2 αποκλείεται να είναι στον κεντρικό κύκλο γιατί οι υπόλοιποι έξι έχουν άθροισμα 1+3+4+5+6+7=26, που ***δεν είναι πολλαπλάσιο του 3***, ενώ ξέρουμε ότι οι υπόλοιποι έξι πρέπει να έχουν άθροισμα πολλαπλάσιο του 3. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι ούτε ο 3 μπορεί να είναι στον κεντρικό κύκλο γιατί οι υπόλοιποι έξι έχουν άθροισμα 1+2+4+5+6+7=25, που πάλι δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Με τον ίδιο τρόπο αποκλείουμε τον 5 (το άθροισμα των υπόλοιπων είναι 23). Επίσης αποκλείουμε τον 6 (το άθροισμα των υπόλοιπων είναι 22). Μένουν οι 1, 4 και 7. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτοί μπορούν να είναι στον κεντρικό κύκλο. Για παράδειγμα αν βάλουμε τον 1 στο κέντρο, μπορούμε να ζευγαρώσουμε τους υπόλοιπους ως 2+7=3+6=4+5 και με βάση αυτό να προκύψει η τοποθέτηση στο αριστερό σχήμα. Όμοια με τον 4 στο κέντρο (μεσαίο σχήμα) ή τον 7 (δεξιό σχήμα).







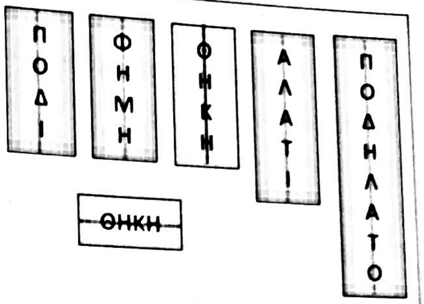
Α΄ και Β΄ Γυμνασίου

1) B) 19

Είναι $\frac{20+18}{20-18}=\frac{38}{2}=19$.

2) Δ) ΘΗΚΗ

Όπως φαίνεται από το σχήμα, οι λέξεις ΠΟΔΙ, ΦΗΜΗ, ΑΛΑΤΙ και ΠΟΔΗΛΑΤΟ έχουν κατακόρυφο άξονα συμμετρίας αν γραφτούν κάθετα. Αντίθετα, η λέξη ΘΗΚΗ δεν έχει, γιατί τα χαλάει το γράμμα Κ. Ας προσθέσουμε, αν και δεν χρειάζεται για την άσκηση, η λέξη ΘΗΚΗ έχει οριζόντια συμμετρία.



3) Β) 9 cm

Το πρώτο τρίγωνο έχει περίμετρο 6 + 10 + 11 = 27 cm. Άρα κάθε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου έχει μήκος 27:3 = 9 cm.

4) Δ) 12

Μπορούμε βέβαια να κάνουμε τις πράξεις, όμως είναι προς όφελός μας να κάνουμε απλοποιήσεις ώστε να γλυτώσουμε κόπο. Ειδικότερα, το 18 στην μία πλευρά απλοποιείται με το 6 στην άλλη αφήνοντας ένα 3 στη θέση του 18. Όμοια το 14 απλοποιείται με το 7, αφήνοντας ένα 2 στην θέση του 14. Τα ίδια με σύμβολα γράφονται

$$2\cdot\cancel{18}^{3}\cdot\cancel{14}^{2}=\cancel{6}^{1}\cdot * \cdot\cancel{7}^{1}$$

Μένει $* = 2\cdot 3\cdot 2 = 12$.

5) Γ)

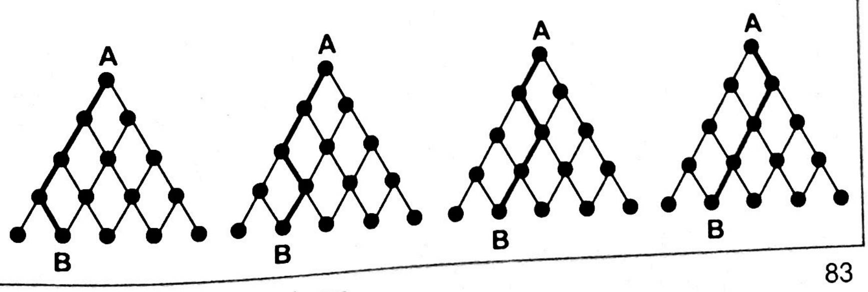
Παρατηρούμε ότι στις σανίδες του φράχτη υπάρχουν κάτι τρίγωνα, από τα οποία άλλα δείχνουν προς τα επάνω και άλλα προς τα κάτω. Δεν συμβαίνει το ίδιο με τις εικόνες (Α) και (Ε), οπότε πρέπει να αποκλεισθούν. Στην μεσαία και στις δύο ακριανές σανίδες η κορυφή του τριγώνου δείχνει προς την ίδια μεριά με την πάνω μύτη της κάθε σανίδας οπότε η εικόνα (Δ) πρέπει να αποκλεισθεί. Μένουν οι εικόνες (Β) και (Γ). Παρατηρώντας τους κύκλους διαπιστώνουμε ότι είναι περίπου στην μέση κάθε σανίδας ενώ στην εικόνα (Β) είναι πιο κοντά στην κάτω άκρη. Μένει η (Γ) που είναι η σωστή απάντηση και ταιριάζει με την αρχική εικόνα.

6) Δ) 20

Αφού το ύψος του κτιρίου είναι 3 m, ή αλλιώς 300 cm, και το κάθε σκαλοπάτι έχει ύψος 15 cm, χρειάζονται 300:15 = 20 σκαλοπάτια.

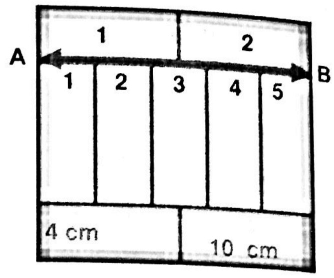
7) Γ) 4

Υπάρχουν τέσσερις διαφορετικές διαδρομές από τον κόμβο Α στον Β,



κατά μήκος των γραμμών και με την φορά που δείχνουν τα βέλη. Σε κάθε κόμβο η διαδρομή συνεχίζεται είτε «στρίβοντας αριστερά» είτε «στρίβοντας δεξιά». Το σχήμα δείχνει τις τέσσερις διαδρομές με κόκκινο.

8) Γ) 76 cm



Πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την μικρή πλευρά καθενός από τα 9 αρχικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Για τον σκοπό αυτό μετράμε με δύο διαφορετικούς τρόπους το μήκος ΑΒ (κόκκινη γραμμή στο σχήμα). Από το σχήμα βλέπουμε η ΑΒ έχει μήκος όσο 5 φορές την μικρή πλευρά του αρχικού παραλληλογράμμου. Επίσης έχει μήκος όσο 2 φορές την μεγάλη του πλευρά, δηλαδή $2\times 10 = 20$ cm. Συνεπώς η μικρή πλευρά του αρχικού παραλληλογράμμου είναι 20:5 = 4 cm. Τώρα, επειδή η περίμετρος του μεγάλου παραλληλογράμμου αποτελείται από 6 πλευρές μήκους 10 cm η καθεμία και 4 πλευρές μήκους 4 cm η καθεμία, το μήκος της είναι $6\cdot 10 + 4\cdot 4 = 76$ cm.

9) Β) 3^{2017}

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι τρεις διαδοχικοί αριθμοί είναι οι a-1, a, a+1. Το άθροισμά τους είναι (a-1)+a+(a+1)=3a, οπότε έχουμε $3a = 3^{2018}$. Άρα $a = \dfrac{3^{2018}}{3} = 3^{2018-1} = 3^{2017}$.

10) Α) $2^3 \cdot 3^8$

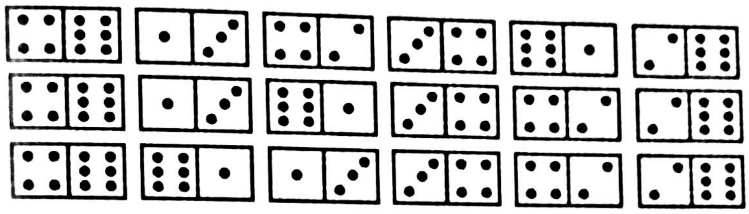
Το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα ψηφίων που μπορεί να έχει ένας πενταψήφιος είναι 9+9+9+9+9 = 45. Άρα ένας τρόπος να έχουμε άθροισμα πέντε ψηφίων είναι να μικρύνουμε ένα από τα 9 (δεν έχει σημασία ποιο) κατά μία μονάδα ώστε να έχουμε 8+9+9+9+9=44. Αυτός είναι και ο μόνος τρόπος γιατί αν μικρύνουμε άλλο ένα ψηφίο κατά μία μονάδα θα βρούμε άθροισμα το πολύ 43, που δεν μας κάνει. Άρα τα ψηφία του πενταψήφιου είναι, με κάποια σειρά, τα 8, 9, 9, 9, 9 των οποίων το γινόμενο είναι $8\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 2^3\cdot 3^2\cdot 3^2\cdot 3^2\cdot 3^2 = 2^3\cdot 3^8$.

11) Β) 21 δραχμές

Ο Κροίσος μπορεί να βγάλει κατά μέγιστο 3 νομίσματα της μιας αξίας και το πολύ δύο από καθεμία από τις άλλες (τις μικρότερες). Το καλύτερο που μπορεί να πετύχει είναι τα τρία νομίσματα που θα βγάλει να είναι των 5 δραχμών, ενώ τα άλλα να είναι των μικρότερων αξιών. Συνολικά μπορεί να βγάλει νομίσματα αξίας το πολύ 3x5 + 2x2 + 2x1 = 21 δραχμών.

12) Β) 2

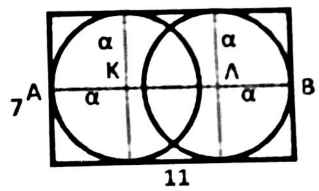
Κανένα από τα 6 εικονιζόμενα ντόμινο δεν έχει σωστό γειτονικό, οπότε με μία κίνηση αποκλείεται να τα φέρουμε σε σωστή θέση. Για παράδειγμα αν φέρουμε τα δύο τριάρια σε γειτονικές θέσεις (είτε με ανταλλαγή του δεύτερου και τρίτου ντόμινο είτε με ανταλλαγή του τρίτου και του τέταρτου) πάλι μένει σε λάθος θέση το τελευταίο και το προτελευταίο ντόμινο. Άρα ***χρειαζόμαστε τουλάχιστον δύο κινήσεις*** για να πετύχουμε τον στόχο μας. Οι παρακάτω εικόνες δείχνουν έναν τρόπο που μπορούμε να φέρουμε τα ντόμινο σε σωστή θέση με δύο κινήσεις. Στην κάθε περίπτωση έγινε ανταλλαγή των δύο κίτρινων ντόμινο. Οπότε ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων είναι 2.



13) Δ) 2 cm

Αφού οι γραμμές ΒΜ, ΒΝ χωρίζουν το τετράγωνο σε μέρη με ίσα εμβαδά, το καθένα έχει εμβαδόν το 1/3 του συνολικού εμβαδού, δηλαδή $\frac{1}{3}\cdot 3^2 = 3$. Άρα από το τρίγωνο ΑΒΜ του οποίου η μία κάθετος πλευρά έχει μήκος 3 cm και η άλλη ΑΜ, έχουμε $\frac{1}{2}\cdot 3 \cdot AM = 3$, από όπου ΑΜ = 2 cm.

14) Δ) 4



Επειδή ο κάθε κύκλος εφάπτεται στην πάνω και στην κάτω πλευρά του ορθογωνίου, που απέχουν μεταξύ τους 7 (όσο το πλάτος του ορθογωνίου), σημαίνει ότι διάμετρος κάθε κύκλου (κόκκινη γραμμή) είναι 2α = 7. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η ΑΒ έχει μήκος 11 (όσο η βάση του ορθογωνίου) και η ζητούμενη απόσταση ΚΛ ικανοποιεί ΚΛ = ΑΒ -2α = 11- 7 = 4.

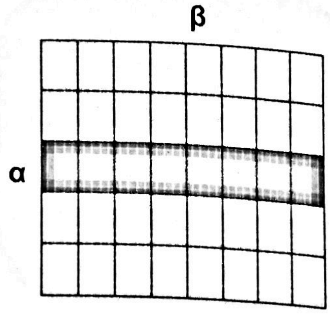
15) Β) 6

$$\boxed{\begin{array}{r} \times\ \text{Α}3 \\ 2\text{Β} \\ \hline 3\Gamma 2 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{r} \times\ \text{Α}3 \\ 24 \\ \hline 3\Gamma 2 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{r} \times\ 13 \\ 24 \\ \hline 312 \end{array}}$$

Επειδή το γινόμενο του Β επί 3, που είναι τα ψηφία των μονάδων των δύο διψήφιων, δίνουν αριθμό που λήγει σε 2 σημαίνει ότι Β = 4 γιατί μόνο το 4 επί το 3 δίνει αριθμό που λήγει σε 2, και συγκεκριμένα 4x3=12. Όλα τα άλλα γινόμενα του 3 δίνουν αριθμό που ***δεν*** λήγει σε 2, π.χ. 1x3=3, 2x3=6 και λοιπά. Άρα ο ένας από τους δύο διψήφιους είναι ο 24. Επίσης ξέρουμε ότι ο 24 επί τον αριθμό Α3 δίνει 3Γ2, δηλαδή έναν τριψήφιο που αρχίζει από 3 και έχει ψηφίο μονάδων το 2. Όμως τα πολλαπλάσια του 24 μεταξύ του 300 και 399 είναι τα 13 x 24 = 312, 14 x 24 = 336, 15 x 24 = 360 και 16 x 24 =384. Από αυτά ***μόνο το 13 x 24 λήγει σε 2,*** συνεπώς αυτό ακριβώς είναι το γινόμενο του κυρίου Αριθμόπουλου. Τελικά το άθροισμα των σβησμένων ψηφίων είναι Α + Β + Γ = 1 + 4 + 1 = 6.

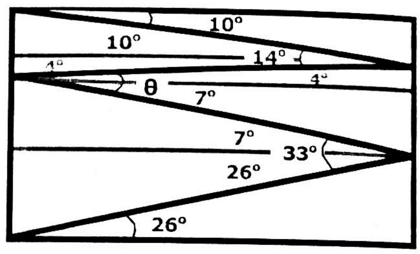
16) Γ) 32

Αν υπάρχουν α το πλήθος τετράγωνα στην μία πλευρά και β στην άλλη, όπως για παράδειγμα στο σχήμα, θα είναι $α x β = 40$. Χρησιμοποιώντας τους διαιρέτες του 40 διαπιστώνουμε ότι φυσικοί αριθμοί με γινόμενο 40 είναι μόνο οι περιπτώσεις 1x40, 2x20, 4X10, 5x8, 8x5, 10x4, 20x2 και 40x1. Η εκφώνηση του προβλήματος μας λέει ότι $α>1$, οπότε πρέπει να αποκλείσουμε την πρώτη περίπτωση. Επίσης η εκφώνηση μας λέει ότι ο ζωγράφος έβαψε πράσινη ***«την μεσαία γραμμή».*** Συμπεραίνουμε ότι στο γινόμενο $α x β$, πρέπει το $α$ να είναι περιττός αριθμός γιατί μόνο σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μεσαία γραμμή. Ελέγχοντας τις παραπάνω περιπτώσεις διαπιστώνουμε ότι η μόνη περίπτωση που έχει $α$ περιττό, και $α>1$, είναι η 5x8. Συνεπώς ο ζωγράφος έβαψε τα 8 τετράγωνα της τρίτης (μεσαίας) γραμμής ενώ έμειναν άβαφα τα υπόλοιπα $40-8=32$.

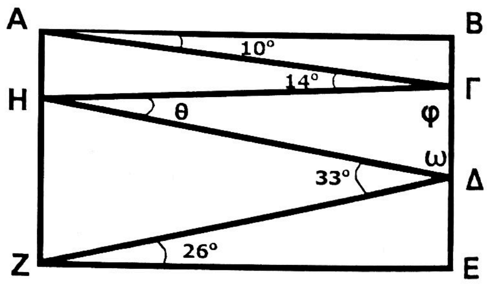


17) Α) 11°

α΄ τρόπος. Φέρνουμε παράλληλες προς την βάση από τις κορυφές των γωνιών (κόκκινες γραμμές στο σχήμα). Επειδή οι εντός εναλλάξ γωνίες σε παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από τρίτη είναι ίσες, εύκολα βλέπουμε ότι η γωνία 14° χωρίζεται σε δύο μικρότερες, από τις οποίες η επάνω είναι 10° οπότε η κάτω είναι $14^\circ - 10^\circ = 4^\circ$. Όμοια η γωνία των 33° χωρίζεται σε μία των 26° και μία των $33^\circ - 26^\circ = 7^\circ$. Πάλι με χρήση των εντός εναλλάξ γωνιών εύκολα βλέπουμε ότι $θ = 4^\circ + 7^\circ = 11^\circ$.



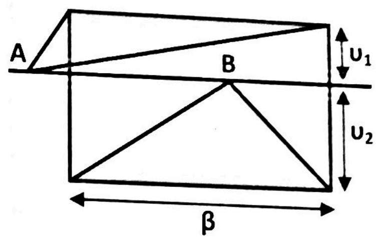
β΄ τρόπος. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°. Η γωνία Β είναι 90°, επομένως στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $10^\circ + 90^\circ + ΒΓΑ = 180^\circ$, άρα $ΒΓΑ = 180^\circ - 10^\circ - 90^\circ = 80^\circ$ οπότε $φ = 180^\circ - 14^\circ - 80^\circ = 86^\circ$. Όμοια, από το τρίγωνο ΕΔΖ παίρνουμε ότι $ΕΔΖ = 180^\circ - 26^\circ - 90^\circ = 64^\circ$ και άρα $ω = 180^\circ - 33^\circ - 64^\circ = 83^\circ$. Τέλος, μελετώντας το τρίγωνο ΓΗΔ συμπεραίνουμε ότι $θ = 180^\circ - φ - ω = 180^\circ - 86^\circ - 83^\circ = 11^\circ$.



18) Δ) 41

Η Υπατία δεν μπορεί να το γράψει το ψηφίο 4 μόνο του ούτε να το γράψει ως το ψηφίο των μονάδων ενός διψήφιου αριθμού (όπως οι 14, 24, 34, 54) γιατί ο αριθμός που προκύπτει δεν είναι πρώτος. Οπότε το 4 πρέπει υποχρεωτικά να είναι το ψηφίο των δεκάδων κάποιου από τους αριθμούς που μπορεί να γράψει η Υπατία. Οι επιλογές της είναι ανάμεσα στους 41, 42, 43 και 45. Τον 42 και το 45 τους απορρίπτουμε γιατί δεν είναι πρώτοι. Θα δούμε ότι δεν μπορεί να γράψει ούτε τον 43 γιατί τότε οι άλλοι πρώτοι αριθμοί μεταξύ του 2 και 100 που ζητά πρέπει να σχηματίζονται από τους 1, 2 και 5. Όμως το ψηφίο 1 σε συνδυασμό με τα υπόλοιπα δίνει τους 12, 21, 15 και 51, κανένας από τους οποίους δεν είναι πρώτος: για παράδειγμα 51=3x17. Τελικά η Υπατία ***πρέπει να γράψει τον 41***. Από εκεί και πέρα, με τα υπόλοιπα τρία ψηφία, δηλαδή τα 2, 3, 5, μπορεί να γράψει στον πίνακα είτε τους 2, 41, 53 ή τους 5, 23, 41, και κανέναν άλλο συνδυασμό.

19) Β) 20 cm^2



Παρατηρούμε ότι τα δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, και συγκεκριμένα όσο η κάτω πλευρά (μήκος) του ορθογωνίου. Επίσης παρατηρούμε ότι τα ύψη τους $υ_1$ και $υ_2$ έχουν άθροισμα $υ_1 + υ_1 = υ$, όσο το πλάτος του ορθογωνίου. Μας δίνεται ότι το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ισούται με 10 cm^2, συμβολικά $\frac{1}{2}βυ_1+\frac{1}{2}βυ_2=10\ cm^2$ (*), και ζητάμε το Ε=βυ. Με χρήση της τελευταίας και της (*) έχουμε $Ε=βυ=β(υ_1+υ_2)=βυ_1+βυ_2=2\cdot 10=20\ cm^2$.

20) Γ) 25 μ.

Όταν η χελώνα τρέξει 50 μ., ο Αχιλλέας που τρέχει 9 φορές πιο γρήγορα, θα διανύσει 9x50=450 μ. Συμπεραίνουμε ότι τρεις ολόκληροι γύροι γύρω από το οικόπεδο είναι 450 μ., οπότε ο ένας γύρος είναι 450:3 = 150 μ. Αφού οι δύο πλευρές του οικοπέδου έχουν μήκος 50 + 50 = 100 μ., οι άλλες δύο μαζί θα έχουν μήκος 150-100 = 50μ. Άρα η καθεμία θα έχει μήκος 25 μ.

21) Ε) 32

Θα εργαστούμε με εξίσωση: Αν Κ το πλήθος των καρυδιών που μάζεψε ο Μπαμπάς, τότε το παιδί μάζεψε $\frac{15}{100}Κ$ και η Μαμά $\frac{160}{100}Κ$. Αφού όλοι μαζί μάζεψαν 55 καρύδια, καταστρώνουμε την εξίσωση $Κ+\frac{15}{100}Κ+\frac{160}{100}Κ=55$. Λύνοντας ως προς Κ θα βρούμε Κ =20. Δηλαδή ο Μπαμπάς μάζεψε 20 καρύδια και άρα η Μαμά $\frac{160}{100}\cdot 20=32$. Ως επαλήθευση, το παιδί μάζεψε $\frac{15}{100}\cdot 20=3$ και όλοι μαζί 20 + 3 + 32 = 55 καρύδια, όπως δίνει το πρόβλημα.

22) Α) 17

2	9	6	17
7	5	4	16
8	1	3	12
17	15	13	

Αν προσθέσουμε όλες τις γραμμές και όλες τις στήλες τότε θα έχουμε προσθέσει τον κάθε αριθμό από δύο φορές: Την μια στην γραμμή που μετέχει και την άλλη, στην στήλη. Αλλά οι αριθμοί στα κουτάκια είναι οι 1 έως 9 από μια φορά ο καθένας, συνεπώς το άθροισμα που θα βρούμε είναι $2(1+2+3+4+5+6+7+8+9)=90$. Τα πέντε από τα έξι αθροίσματα που βρήκε ο Ερμής είναι $12+13+15+16+17=73$, που σημαίνει ότι το έκτο άθροισμα είναι 90-

73=17. Αν θέλαμε να βρούμε, αν και δεν το ζητά η άσκηση, μία διευθέτηση των αριθμών 1 έως 9 σε ένα 3x3 τετράγωνο που να έχει τις συγκεκριμένες ιδιότητες, τότε το διπλανό σχήμα δείχνει έναν από πολλούς τρόπους.

23) Δ) 32

Ο χρόνος έχει 365 μέρες, οπότε σύμφωνα με τον τουριστικό οδηγό οι μέρες που δεν είναι ηλιόλουστες είναι 365-350=15. Το χειρότερο που μπορεί να συμβεί είναι να επισκεφθεί ο Ερμής το νησί μία μέρα που είναι ηλιόλουστη και την επόμενη να μην είναι ηλιόλουστη και αυτή η ατυχία, δηλαδή ηλιόλουστη την μία μέρα και όχι ηλιόλουστη η επόμενη, να συνεχίσει 15 φορές (όσες είναι οι μέρες που δεν είναι ηλιόλουστες). Έτσι θα περάσουν 15x2=30 μέρες στις οποίες δεν υπάρχουν δύο διαδοχικές ηλιόλουστες. Μένοντας άλλες 2 μέρες, εξασφαλίζεται η απαίτηση του Ερμή να έχει δύο ηλιόλουστες μέρες. Το σύνολο της παραμονής του είναι 30+2=32 μέρες.

24) Ε) 19

α΄ τρόπος. Μέχρι εκείνη την ώρα είχαν μετρηθεί 14+16+20=50 ψήφοι, οπότε έμεναν άλλοι 90-20=40. Εκείνη την στιγμή ο Περικλής ήταν μπροστά από τη Αθηνά κατά 20-16=4 ψήφους, οπότε από τους 40 ψήφους που μένουν έχουμε να υπολογίσουμε πόσους ακόμη χρειάζεται ο Περικλής για να μην τον περάσει η Αθηνά. Στην χειρότερη περίπτωση για τον Περικλή, η Αθηνά θα πάρει τους επόμενους 4 ψήφους οπότε θα τον ισοφαρίσει. Άρα από τους ψήφους που μένουν, δηλαδή τους υπόλοιπους 40-4 = 36, ο Περικλής χρειάζεται περισσότερους από τους μισούς. Το μισό του 36 είναι 18, οπότε ο Περικλής χρειάζεται 19 ψήφους ακόμη. Επαλήθευση: Αν ο Περικλής πάρει 19 ακόμα ψήφους από τους 40, θα έχει 20+19=39, ενώ η Αθηνά με τους υπόλοιπους 40-19=21 θα έχει 16+21= 37, δηλαδή λιγότερους από τον Περικλή.

β΄ τρόπος. Διώχνουμε τους 14 ψηφοφόρους που ψήφισαν τον Ξενοφώντα (σαν να μην υπάρχουν) και επικεντρωνόμαστε στους υπόλοιπους 90-14=76. Από αυτούς τους εκλέκτορες ο Περικλής πρέπει να πάρει συνολικά περισσότερους από τους μισούς ψήφους, δηλαδή 76:2=38. Με άλλα λόγια χρειάζεται 39 ψήφους. Επειδή ήδη έχει τους 20, θέλει ακόμη 39-20=19 ψήφους.

25) Β) 7

α	**β**	**β-α**	**-α**	**-β**	**α-β**	**α**	**β**

Αν σε δύο γειτονικά τετραγωνάκια υπάρχουν οι αριθμοί α και β, αντίστοιχα, τότε το επόμενο πρέπει να έχει τον β-α ώστε ο αριθμός στο μεσαίο τετραγωνάκι να είναι όσο το άθροισμα των αριθμών στα δύο γειτονικά του, εδώ β = α+(β-α). Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να συμπληρώσουμε μερικά ακόμα τετραγωνάκια. Θα διαπιστώσουμε ότι περιέχουν διαδοχικά τους -α, -β, -β+α, α, β. Παρατηρούμε ότι ξαναβρήκαμε τους α και β σε κάποια επόμενα τετραγωνάκια. Ειδικότερα, ο αριθμός α ξαναβρίσκεται σε ένα τετραγωνάκι 6 θέσεις πιο εκεί από οποιαδήποτε άλλη θέση του (κόκκινα τετραγωνάκια στο

10					**3**
3					**10**
	X	**10**	**3**		