Γ. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

I. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

24. α. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το A, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πάντοτε πεδίο ορισμού το A.

β. Ισχύει $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

γ. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

δ. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

ε. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

στ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

ζ. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.

η. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2.

θ. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

ι. Σε μια συνάρτηση, ένα τοπικό μέγιστο δε μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.	η.	θ.	ι.

25. α. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$, τότε $\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \ell_1\ell_2$

β. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)\ .$$

γ. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ, δηλαδή αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ τότε για κάθε φυσικό αριθμό ν μεγαλύτερο του 1 θα ισχύει $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\nu}=\nu\ell^{\nu-1}$.

δ. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ_1, δηλαδή αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$, τότε $\lim_{x\to x_0} (f(x))^{\nu} = \ell_1^{\nu}$ (ν θετικός ακέραιος).

ε. Αν x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε $\lim_{x\to x_0} ημx = ημx_0$

στ. Ισχύει $\lim_{x\to x_0}(συνx) = συνx_0$.

ζ. Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη.

η. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.	η.

26. α. $(x^{\rho})' = \rho\cdot x^{\rho-1}$, ρ ρητός, $x>0$

β. Για κάθε $x>0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

γ. Αν $x > 0$, τότε $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

δ. Για τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$ ισχύει ότι $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

ε. Για τη συνάρτηση $f(x)=ημx$ ισχύει ότι $(ημx)' = -συνx$.

στ. $(ημx)' = συνx$

ζ. $(συνx)' = ημx$

η. $(\sqrt{3})' = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

θ. $(x^{\nu})' = (\nu-1)\cdot x^{\nu}$, όπου ν φυσικός αριθμός

ι. Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

α.
β.
γ.
δ.
ε.
στ.
ζ.
η.
θ.
ι.

27. α. $(cf(x))' = cf'(x)$

β. $(f(x)g(x))' = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$

γ. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g(x)$$

δ. Ισχύει $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$, όπου f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

ε. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) + g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$, $(g(x) \neq 0)$

στ. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$, τότε ισχύει

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

ζ. Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της συνθέτης συνάρτησης ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.

28. α. Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x, όταν $x = x_0$.

β. Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\upsilon(t_0) = f'(t_0)$.

γ. Ισχύει $(\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

δ. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σημείο x_0. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$.

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

στ. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

ζ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

η. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

θ. Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x=x_0$ μέγιστο.

ι. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0)=0$, για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, και η παράγωγός της f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο διάστημα αυτό.

ια. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)>0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

α.	β.	γ.	δ.	ε.	στ.	ζ.	η.	θ.	ι.	ια.

II. Να συμπληρώσετε τις ισότητες.

29. α. $(c)' = ...$ β. $(x)' = ...$ γ. $(x^\rho)' = ...$, ρ ρητός, $\rho>0$

δ. $(\sqrt{x})' = ...$, $x>0$ ε. $\left(\frac{1}{x}\right)' = ...$, $x \neq 0$

στ. $(\eta\mu x)' = ...$ ζ. $(\sigma\upsilon\nu x)' = ...$ η. $(\varepsilon\varphi x)' = ...$

30. α. $(cf(x))' = ...$ β. $(f(x)+g(x))' = ...$

γ. $(f(x)\cdot g(x))' = ...$

δ. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = ...$

ε. $(f(g(x)))' = ...$