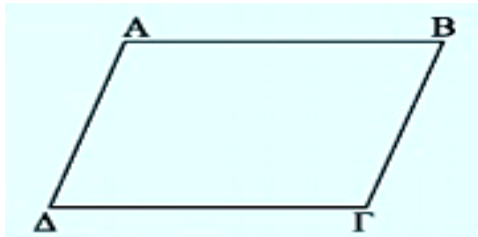


ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

Παραλληλόγραμμο

Ορισμός

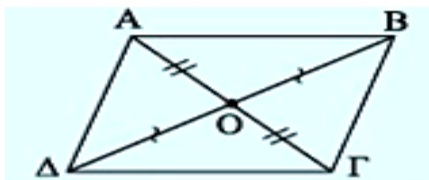
Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



- **Ιδιότητες παραλληλογράμμων**

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- (i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
- (iii) Οι διαγωνιοί του διχοτομούνται.

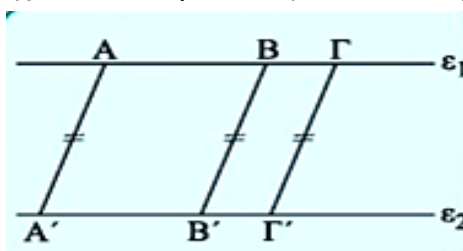


ΠΟΡΙΣΜΑ I

Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.

ΠΟΡΙΣΜΑ II

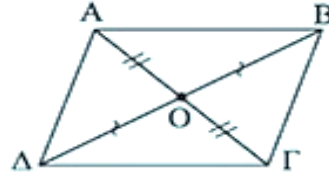
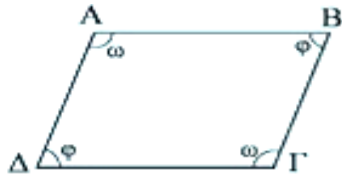
Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δυο παράλληλες ευθείες είναι ίσα



- Κριτήρια για παραλληλόγραμμα

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Οι απέναντι πλευρές ανά δυο είναι ίσες.
- (ii) Δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
- (iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δυο είναι ίσες.
- (iv) Οι διαγωνιοί του διχοτομούνται



Ασκήσεις (Εμπέδωσης Σχολικού βιβλίου)

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Η διχοτόμος της A τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο E . Να αποδείξετε ότι $\Delta E = B\Gamma$.
2. Έστω O το κέντρο παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Αν E και Z σημεία των OA και OG αντίστοιχα, ώστε $OE = OZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BE\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο.
3. Έστω E και Z , τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
Να αποδείξετε ότι:
 - i) το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.
 - ii) οι $A\Gamma$, $B\Delta$ και EZ συντρέχουν.

ΕΙΔΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

Ορθογώνιο

Ορισμός

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.



Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, ενώ δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), προκύπτει ότι όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές.

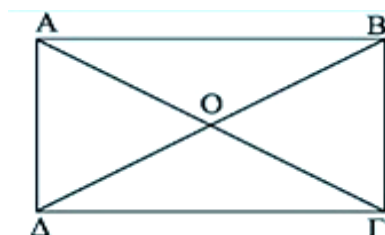
- **Ιδιότητες ορθογωνίου**

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

- **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο**

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

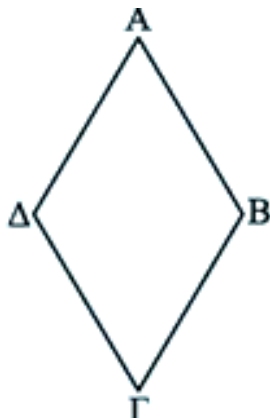
- (i) Είναι **παραλληλόγραμμο** και έχει **μία ορθή** γωνία.
- (ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες**.
- (iii) Έχει **τρεις γωνίες ορθές**.
- (iv) **Όλες** οι γωνίες του είναι **ίσες**.



Ρόμβος

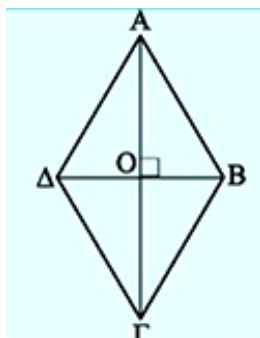
Ορισμός

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.



Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες.

- **Ιδιότητες του ρόμβου**
 - (i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
 - (ii) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.



- **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος**

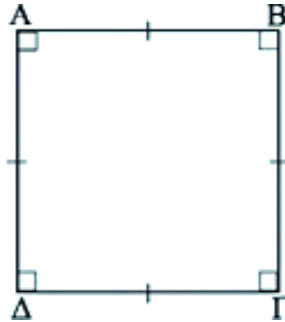
Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Έχει όλες τις πλευρές του ίσες.
- (ii) Είναι παραλληλόγραμμο και δυο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (iii) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
- (iv) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.

Τετράγωνο

Ορισμός

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.



• Ιδιότητες τετραγώνου

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:

- (i) Οι **απέναντι** πλευρές του είναι **παράλληλες**.
- (ii) **Όλες** οι πλευρές του είναι **ίσες**.
- (iii) **Όλες** οι γωνίες του είναι **ορθές**.
- (iv) Οι διαγώνιοί του είναι **ίσες**, τέμνονται **κάθετα**, **διχοτομούνται** και **διχοτομούν** τις γωνίες του.

• Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο

Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Αποδεικνύεται ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
- (iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
- (iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- (v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
- (vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

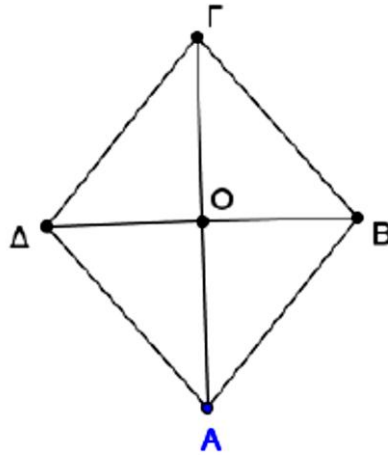
1.

Δίνεται ο παρακάτω ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με διαγωνίους $A\Gamma$ και $B\Delta$. Επίσης δίνεται ότι η γωνία $\hat{\Gamma}$ του ρόμβου είναι $\hat{\Gamma} = 80^\circ$.

Να απαντήσετε τις επόμενες ερωτήσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε τη γωνία $\hat{A}$ του ρόμβου.

β) Να αποδείξετε ότι η $\angle O\hat{A}B = 40^\circ$.



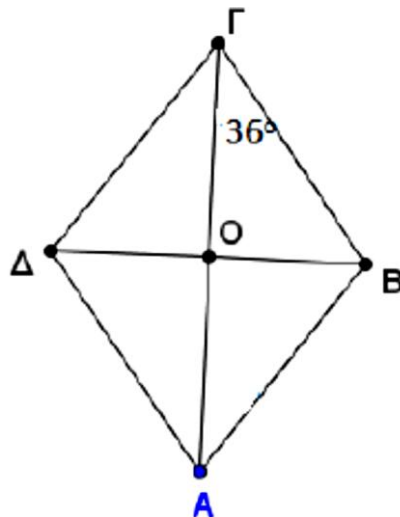
2.

Δίνεται ο παρακάτω ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με διαγωνίους $A\Gamma$ και $B\Delta$. Επίσης δίνεται ότι $\angle O\hat{\Gamma}B = 36^\circ$.

Να απαντήσετε τις επόμενες ερωτήσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία του ρόμβου $\hat{\Gamma} = 72^\circ$.

β) Να αποδείξετε ότι το $\angle BO\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\angle BO\Gamma = 90^\circ$.



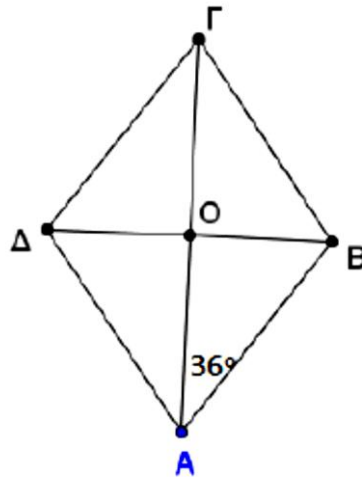
3.

Δίνεται ο παρακάτω ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με διαγωνίους $A\Gamma$ και $B\Delta$. Επίσης δίνεται ότι $\widehat{BAO} = 36^\circ$.

Να απαντήσετε τις επόμενες ερωτήσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ του ρόμβου είναι $\hat{A} = 72^\circ$.

β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{AOB} = 90^\circ$.



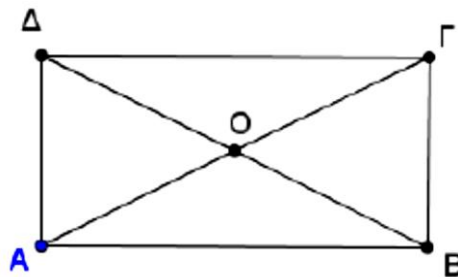
4.

Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαγωνίους $A\Gamma$ και $B\Delta$. Επίσης δίνεται ότι $\Delta B = 5 \text{ cm}$.

Να απαντήσετε τις επόμενες ερωτήσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε το μήκος της $A\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AO\Delta$ είναι ισοσκελές.



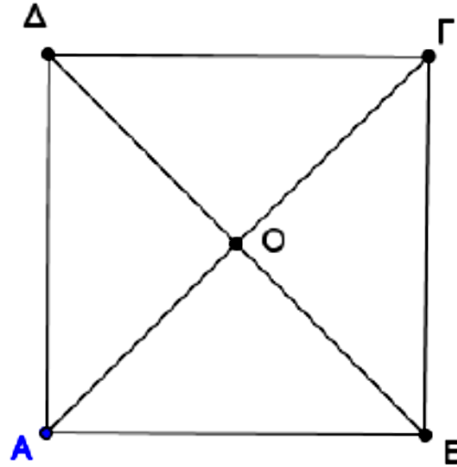
5.

Δίνεται το παρακάτω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με διαγωνίους $A\Gamma$ και $B\Delta$. Επίσης δίνεται $\Gamma\Delta=6\text{ cm}$.

Να απαντήσετε τις επόμενες ερωτήσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε το μήκος των $A\Delta$, $B\Gamma$ και AB .

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AOB είναι ορθογώνιο με $\hat{A}OB$ ορθή.



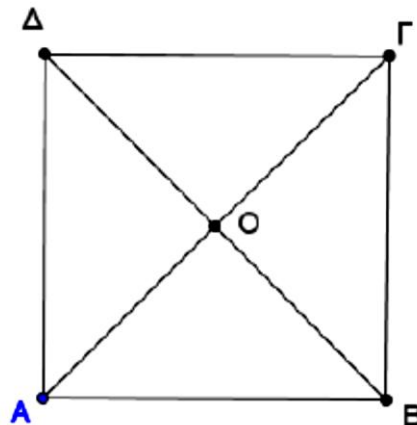
6.

Δίνεται το παρακάτω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με διαγωνίους $A\Gamma$ και $B\Delta$. Επίσης δίνεται $A\Gamma=8\text{ cm}$.

Να απαντήσετε τις επόμενες ερωτήσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε το μήκος της $B\Delta$.

β) Να βρείτε τα μήκη των AO και OB και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.



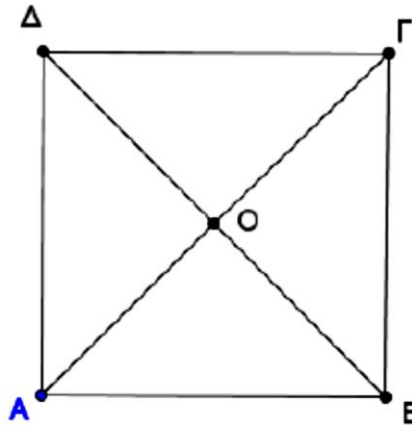
7.

Δίνεται το παρακάτω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με διαγωνίους $A\Gamma$ και $B\Delta$. Επίσης δίνονται ότι $A\Delta=4$ cm και $A\Gamma=5,66$ cm.

Να απαντήσετε τις επόμενες ερωτήσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς AB .

β) Να βρείτε τα μήκη των AO και OB και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.



8.

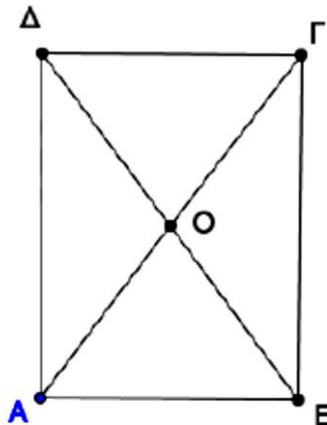
Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαγωνίους $A\Gamma$ και $B\Delta$. Επίσης δίνονται ότι $\Delta\Gamma=3$ cm και $A\Gamma=5$ cm.

Να απαντήσετε τις επόμενες ερωτήσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε το μήκος της AB .

β) Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου $B\Delta$.

γ) Να βρείτε τις OA και OB και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.



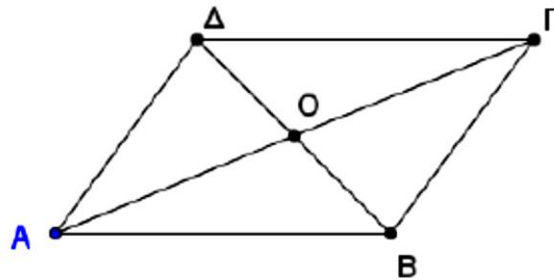
9.

Δίνεται το παρακάτω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με διαγωνίους $A\Gamma$ και ΔB . Επίσης δίνονται ότι $\Gamma\Delta=3,9$ cm, $A\Gamma=6$ cm και $\Delta B=3,2$ cm.

Να απαντήσετε τις επόμενες ερωτήσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε το μήκος της AB .

β) Να βρείτε το μήκος των AO και OB .



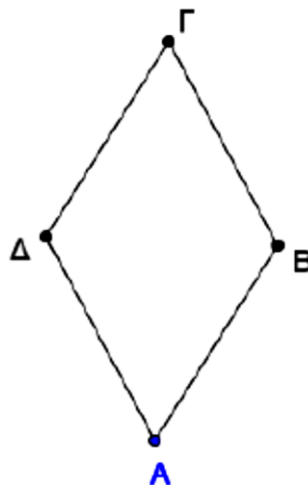
10.

Δίνεται ο παρακάτω ρόμβος $AB\Gamma\Delta$. Επίσης δίνονται ότι η περίμετρος του ρόμβου είναι ίση με 16 cm δηλαδή $AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A=16$ cm και $\hat{A}=60^\circ$.

Να απαντήσετε τις επόμενες ερωτήσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε το μήκος της κάθε πλευράς του ρόμβου.

β) Να βρείτε σε μοίρες τη γωνία $\hat{\Gamma}$.



11.

Δίνεται το παρακάτω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Επίσης $AB=4$ cm και για τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ ισχύει ότι $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 160^\circ$. Αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας, να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις:

α) Να βρείτε το μήκος της $\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 80^\circ$ και να βρείτε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.

