

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

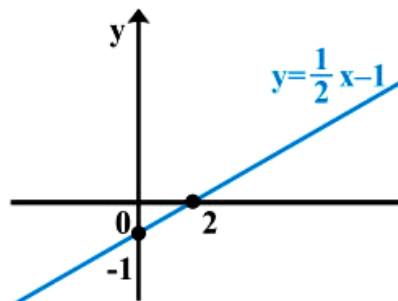
Στο Γυμνάσιο διαπιστώσαμε με τη βοήθεια παραδειγμάτων ότι η εξίσωση

$$ax + by = \gamma, \text{ με } a \neq 0 \text{ ή } b \neq 0,$$

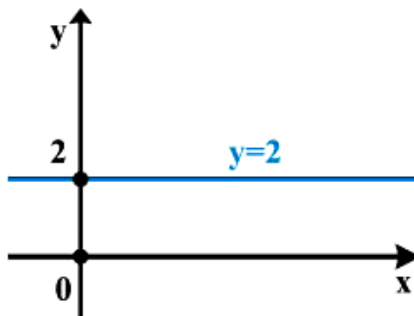
που λέγεται γραμμική εξίσωση, παριστάνει ευθεία γραμμή.

Για παράδειγμα :

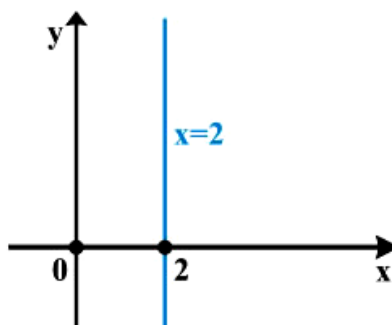
✓ Η εξίσωση $x - 2y = 2$ παίρνει τη μορφή $y = \frac{1}{2}x - 1$ η οποία παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1/2$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο -1 .



✓ Η εξίσωση $y=2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο 2 .



✓ Η εξίσωση $x=2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο 2 .



Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση λέγεται **λύση της γραμμικής εξίσωσης**.

Για παράδειγμα, το ζεύγος $(4, -1)$ είναι λύση της εξίσωσης $x - 2y = 6$, αφού $4 - 2(-1) = 4 + 2 = 6$.

Γραμμικό σύστημα 2 x 2

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις $ax + by = \gamma$ και $a'x + b'y = \gamma'$ και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους** ή, πιο σύντομα, ένα **γραμμικό σύστημα 2 x 2** και γράφουμε

$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$

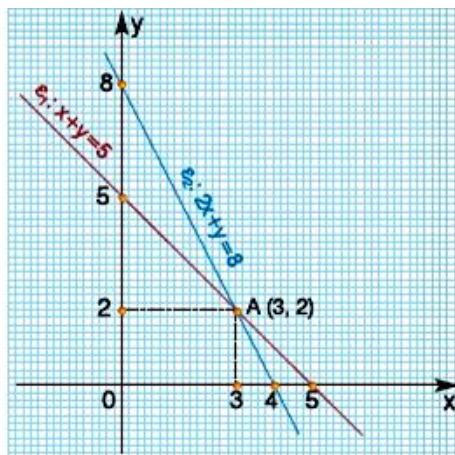
Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται **λύση του συστήματος**.

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος 2 x 2

Σύστημα με μοναδική λύση

Για τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος έχουμε:

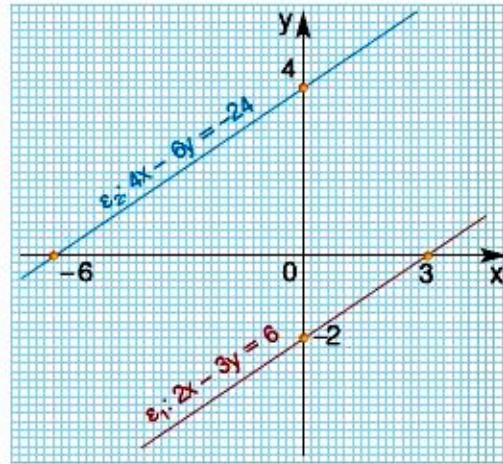
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$



Αυτό σημαίνει ότι το ζεύγος $(3, 2)$ είναι η **μοναδική λύση** του συστήματος.

Αδύνατο σύστημα

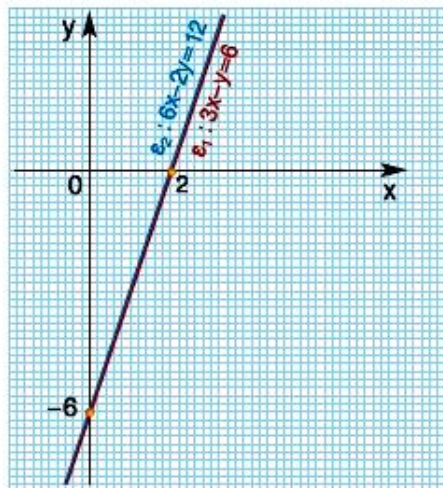
Για να επιλύσουμε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = -24 \end{cases}$$
 έχουμε:



Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.

Άπειρες λύσεις

Για να επιλύσουμε το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases}$$
 έχουμε:



Άρα έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ 2Χ2

Μέθοδος της αντικατάστασης

1. Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} x - 2y = 6 & (1) \\ 3x + 4y = 8 & (2) \end{cases}.$$

Λύση

Λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς ένα άγνωστο, π.χ. την (1) ως προς x . Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση το x με την παράσταση που βρήκαμε και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει

$$\begin{aligned} 3(2y + 6) + 4y &= 8 \Leftrightarrow 6y + 18 + 4y = 8 \\ &\Leftrightarrow 10y = -10 \\ &\Leftrightarrow y = -1 \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του y στην πρώτη εξίσωση και υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο :

$$x = 2(-1) + 6 = 4$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(4, -1)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Αν κάνουμε επαλήθευση του συστήματος έχουμε:

Για $x = 4$ και $y = -1$:

1η εξίσωση: $4 - 2(-1) = 6$

2η εξίσωση: $3 \cdot 4 + 4(-1) = 12 - 4 = 8$

2. Να λυθεί το σύστημα
$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 7 \\ -4x + 6y = -4 \end{array} \right\}$$

Λύση

Επιλύουμε την πρώτη ως προς x. Έχουμε :

$$2x - 3y = 7 \quad \text{ή} \quad 2x = 3y + 7 \quad \text{ή} \quad x = \frac{3y+7}{2} \quad (1)$$

Αντικαθιστούμε την (1) στη δεύτερη εξίσωση και έχουμε διαδοχικά :

$$-4x + 6y = -4 \quad \text{ή} \quad -4 \frac{3y+7}{2} + 6y = -4 \quad \text{ή} \quad -2(3y+7) + 6y = -4 \quad \text{ή} \quad -6y - 14 + 6y = -4$$

$$\text{ή} \quad -6y + 6y = 14 - 4 \quad \text{ή} \quad 0 \cdot y = 10$$

Η τελευταία εξίσωση που προέκυψε είναι προφανώς αδύνατη. Άρα και το σύστημα θα είναι **αδύνατο**.

3. Να λυθεί το σύστημα
$$\left. \begin{array}{l} -5x + 2y = 3 \\ 10x - 4y = -6 \end{array} \right\}$$

Λύση

Επιλύουμε την εξίσωση ως προς y , και έχουμε :

$$-5x + 2y = 3 \quad \text{ή} \quad 2y = 5x + 3 \quad \text{ή} \quad y = \frac{5x+3}{2} \quad (1)$$

Αντικαθιστούμε την (1) στη δεύτερη και έχουμε διαδοχικά :

$$10x - 4y = -6 \quad \text{ή} \quad 10x - 4 \frac{5x+3}{2} = -6 \quad \text{ή} \quad 10x - 2(5x+3) = -6 \quad \text{ή} \quad 10x - 10x - 6 = -6$$

$$\text{ή} \quad 0 \cdot x = 0$$

Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται για κάθε τιμή του x , είναι δηλαδή αόριστη.

(Άπειρες λύσεις)

Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών (ή της απαλοιφής)

$$\begin{cases} x - 2y = 6 & (1) \\ 3x + 4y = 8 & (2) \end{cases}$$

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι αντίθετοι :

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \cdot 1 \end{array} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{cases} -3x + 6y = -18 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις που βρήκαμε, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και επιλύουμε :

$$-3x + 6y + 3x + 4y = -18 + 8 \Leftrightarrow 10y = -10 \Leftrightarrow y = -1.$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μια από τις αρχικές εξισώσεις και βρίσκουμε την τιμή του άλλου :

$$x - 2(-1) = 6 \Leftrightarrow x + 2 = 6 \Leftrightarrow x = 4.$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(4, -1)$ (η ίδια φυσικά που βρέθηκε και με την προηγούμενη μέθοδο).

Μέθοδος των οριζουσών

Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

- Αν $D \neq 0$, έχει μοναδική λύση, την (x, y) με $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$
- Αν $D = 0$, είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} x - 2y = 6 & (1) \\ 3x + 4y = 8 & (2) \end{cases}$$

Λύση

Το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$ έχει

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3(-2) = 4 + 6 = 10 \neq 0,$$

οπότε έχει **μοναδική λύση**. Επειδή

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 16 = 40 \quad \text{και} \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10$$

Άρα, η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (4, -1)$.

Άπειρες λύσεις με τη μέθοδο των οριζουσών:

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:
$$\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases}$$

Λύση

Το σύστημα
$$\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases}$$
 έχει

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 2(-6) - 4(-3) = -12 + 12 = 0$$

και επομένως το σύστημα αναμένεται ή να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της δεύτερης εξίσωσης με το 2, τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 2x - 3y = 40 \end{cases},$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων

Αδύνατο σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα:
$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 9x + 3y = 6 \end{cases}$$

Λύση

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0$$

και επομένως το σύστημα αναμένεται ή να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Το σύστημα αυτό γράφεται

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \text{ που είναι προφανώς αδύνατο.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

①. Να λύσετε με τη μέθοδο της αντικατάστασης τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} x-3y=2 \\ 2x+4y=14 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 3x-2y=3 \\ 9x-y=4 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} 3x-2y=5 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$$

Λύσεις: i) $x=5$ και $y=1$, ii) $x=\frac{1}{3}$ και $y=-1$

iii) $x=1$ και $y=-1$

②. Να λύσετε με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} 3x+2y=-1 \\ -3x+5y=-6 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 2x-3y=7 \\ 4x+2y=-2 \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} 3x-5y=-2 \\ 4x-7y=-3 \end{cases}$$

Λύσεις: i) $x=\frac{1}{3}$ και $y=-1$

ii) $x=\frac{1}{2}$ και $y=-2$

iii) $x=1$ και $y=1$

3. Να λύσετε με τη μέθοδο των ορίσμων τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 = \frac{\psi}{4} \\ \frac{x-1}{2} - \frac{x-2\psi}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} x - 2(x - \psi) = 3 - (2x - \psi) \\ \psi - x(1 - 2\psi) = 1 + 2\psi(x - 1) \end{cases}$$

Λύσεις: i) $x=3$ και $\psi=2$ ii) $x=2$ και $\psi=1$

4. Να λύσετε τα γραμμικά συστήματα:

$$i) \begin{cases} x - 2\psi = 4 \\ x - 2\psi = 6 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 2x - \psi = 1 \\ -4x + 2\psi = -2 \end{cases}$$

Λύσεις: i) Αδύνατο ii) Έχει άπειρες λύσεις.

5.

Δίνεται η εξίσωση $x - 3y = 7$.

α) Να επαληθεύσετε ότι το ζεύγος αριθμών $(x, y) = (4, -1)$ είναι μια λύση της εξίσωσης,

β) Να αποδείξετε ότι το $(4, -1)$ δεν είναι λύση του συστήματος
$$\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$$

6.

Δίνονται οι εξισώσεις $3x + y = 5$ (1) και $x + 4y = 9$ (2).

α) Ποια από τα ζεύγη $(1, 2)$, $(2, -1)$, $(0, 5)$ και $(9, 0)$ είναι λύσεις της εξίσωσης (1) και ποια της (2);

β) Να βρείτε μια λύση του συστήματος
$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + 4y = 9 \end{cases}$$

7.

Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο με βάση μήκους x cm, ενώ η κάθε μια από τις ίσες πλευρές του έχει μήκος y cm. Η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με 19 cm. Αν διπλασιάσουμε τα μήκη κάθε μιας από τις ίσες πλευρές του και διατηρήσουμε το μήκος της βάσης του τότε προκύπτει νέο τρίγωνο που έχει περίμετρο ίση με 33 cm.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

β) Να βρείτε τις τιμές των μηκών x , y του αρχικού τριγώνου.