

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ – ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η έννοια του πολυωνύμου

Έστω x μια **μεταβλητή** που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

- Καλούμε **μονώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής ax^v , όπου a είναι ένας πραγματικός αριθμός και v ένας θετικός ακέραιος.

Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.

Για παράδειγμα, οι παραστάσεις: $2x^3$, $-34x^5$, $0x^4$, $2x$ και οι αριθμοί 2 , -3 , 0 είναι μονώνυμα του x .

- Καλούμε **πολυώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής:

$$a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

όπου v είναι ένας φυσικός αριθμός και $a_0, a_1, \dots, a_v$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τα μονώνυμα $a_v x^v, a_{v-1} x^{v-1}, \dots, a_1 x, a_0$ λέγονται **όροι** του πολυωνύμου και οι αριθμοί $a_v, a_{v-1}, \dots, a_1, a_0$ **συντελεστές** αυτού. Ειδικότερα ο a_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.

Τα πολυώνυμα της μορφής a_0 , δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται **σταθερά πολυώνυμα**. Ειδικά το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**.

Έτσι για παράδειγμα, οι παραστάσεις $3x^3 + 2x^2 - x + 2$, $0x^2 - 5x + 1$, $5x^3 - 23x^2 + 0x + 13$ και οι αριθμοί 2 , 0 κτλ. είναι πολυώνυμα του x .

Άσκηση

Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι πολυώνυμα;

α) $4x^3 - 5x^2 + 2x - \frac{1}{x}$

β) $3x^4 - 7x^2 - 12$

γ) $\sqrt{2}x^2y - 5xy + y^2 + \frac{1}{3}$

δ) $x^3 + 2x^2y - \sqrt{x}y^2 + 3y^3$

Ισότητα Πολυωνύμων

Δύο πολυώνυμα είναι **ίσα**, όταν έχουν όρους ίσα μονώνυμα.

Τα πολυώνυμα $3x^2 - 5x + 1$ και $ax^2 + bx + 1$ είναι ίσα, αν $a = 3$ και $b = -5$.

Τα πολυώνυμα τα συμβολίζουμε συνήθως με $P(x)$, $Q(x)$, κτλ.

Παράδειγμα

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = kx^3 + (2\lambda - 3\mu)x^2 + (\lambda + 2\mu)x + 4$ και $Q(x) = 8x^2 - 3x + 4$ όπου $k, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των αριθμών k, λ και μ , ώστε $P(x) = Q(x)$.

Λύση:

Για να είναι ίσα τα πολυώνυμα θα πρέπει οι συντελεστές των ομοβαθμίων όρων να είναι ίσοι, δηλαδή πρέπει $k=0$, $2\lambda - 3\mu = 8$ και $\lambda + 2\mu = -3$. Από το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων προκύπτει ότι $\lambda = 1$ και $\mu = -2$.

Βαθμός Πολυωνύμων

Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

Είναι φανερό ότι κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

Έτσι για παράδειγμα το πολυώνυμο $P(x) = -4x^3 + 3x - 7$ είναι 3ου βαθμού, ενώ το $Q(x) = 7$ είναι μηδενικού βαθμού.

Παράδειγμα

α) Να γραφεί το πολυώνυμο $P(x) = 4x^2 - 8x + ax^3 - 5$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και να βρεθεί ο βαθμός του.

β) Αν το $P(x)$ είναι ίσο με το πολυώνυμο $Q(x) = bx^2 + \gamma x + \delta$, ποιες είναι οι τιμές των a, b, γ, δ ;

Λύση

α) Το πολυώνυμο $P(x) = 4x^2 - 8x + ax^3 - 5$, κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x γράφεται $P(x) = ax^3 + 4x^2 - 8x - 5$. Το $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού, αν $a \neq 0$ και δευτέρου βαθμού, αν $a = 0$.

β) Τα πολυώνυμα $P(x) = ax^3 + 4x^2 - 8x - 5$ και $Q(x) = \beta x^2 + \gamma x + \delta$ είναι ίσα, αν $\alpha = 0$, $\beta = 4$, $\gamma = -8$ και $\delta = -5$.

Άσκηση

Ποια από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι $2^{\text{ου}}$ βαθμού ως προς x ;

1. $7 - 3x - 2x^2$
2. $3x^2 - 5x - 3x^2 + 10$
3. $4x^3 + x^2 - 3x^3 + 2x - x^3 + 6$
4. $2xy - 3y + 9$

Αριθμητική τιμή ή απλά **τιμή** ενός πολυωνύμου για $x = \rho$, όπου ρ ένας πραγματικός αριθμός, καλείται ο αριθμός που προκύπτει αν θέσουμε όπου x τον αριθμό ρ και εκτελέσουμε τις πράξεις. Η τιμή αυτή συμβολίζεται ως **$P(\rho)$** . Δηλαδή:

$$P(\rho) = a_n \rho^n + a_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + a_1 \rho + a_0$$

Ρίζα

ενός πολυωνύμου θα λέγεται ένας πραγματικός αριθμός ρ , εάν ισχύει:

$$P(\rho) = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1^ο i) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο

$$P(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + \lambda - 1$$
 είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ii) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα

$$Q(x) = \lambda^2 x^3 + (\lambda - 2)x^2 + 3$$
 και

$$R(x) = (5\lambda - 6)x^3 + (\lambda^2 - 4)x^2 + \lambda + 1$$

είναι ίσα.

ΛΥΣΗ

i) Το $P(x)$ θα είναι το μηδενικό πολυώνυμο, για εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες συναληθεύουν οι εξισώσεις:

$$\lambda^2 - 1 = 0, \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \text{ και } \lambda - 1 = 0$$

Η κοινή λύση των εξισώσεων αυτών είναι η $\lambda = 1$. Επομένως για $\lambda = 1$ το πολυώνυμο $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ii) Τα $Q(x)$ και $R(x)$ θα είναι ίσα για εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες συναληθεύουν οι εξισώσεις:

$$\lambda^2 = 5\lambda - 6, \quad \lambda - 2 = \lambda^2 - 4 \quad \text{και} \quad 3 = \lambda + 1$$

Η κοινή λύση των εξισώσεων αυτών είναι η $\lambda = 2$. Επομένως για $\lambda = 2$ τα πολυώνυμα $Q(x)$ και $R(x)$ είναι ίσα.

2° Αν $P(x) = x^2 + 3x + \alpha^2 - 1$, να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $P(-1) = 1$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε} \quad P(-1) = 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (-1)^2 + 3(-1) + \alpha^2 - 1 = 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha = -2 \quad \text{ή} \quad \alpha = 2 & \end{aligned}$$

Επομένως οι ζητούμενες τιμές είναι οι: $-2, 2$.

Ασκήσεις

1.

Αν $P(x) = 2x^2 + 2x - 9$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) P(-3) = P(2) \quad \beta) 3P(1) + P(3) = 0$$

2.

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, το πολυώνυμο

$$P(x) = (4\mu^3 - \mu)x^3 + 4(\mu^2 - \frac{1}{4})x - 2\mu + 1$$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

3.

Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς, που δίνονται με τα παρακάτω πολυώνυμα, είναι ρίζες τους.

i) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 7$

$$x = -1, \quad x=1$$

ii) $Q(x) = -x^4 + 1$

$$x = -1, \quad x=1, \quad x=3.$$

4.

Αν $P(x) = (-5x^2 + 4x - 3) - (x^2 - 2x + 1) + (3x^2 + x)$ και

$$Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

να βρείτε τις τιμές των α , β , γ , ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

5.

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α , β , γ και δ ώστε τα πολυώνυμα

$$P(x) = 4x^3 + (\alpha - 4)x^2 - (\beta + 1)x + 4\beta \text{ και}$$

$$Q(x) = \gamma x^3 + 5x + \delta$$

να είναι ίσα.

Πράξεις με πολυώνυμα

Μπορούμε να προσθέσουμε, να αφαιρέσουμε, ή να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα:

$$\begin{aligned} 1. \text{ i) } & (x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3) \\ &= x^3 + 2x^2 - 5x + 7 + 4x^3 - 5x^2 + 3 \\ &= (1 + 4)x^3 + (2 - 5)x^2 - 5x + (7 + 3) \\ &= 5x^3 - 3x^2 - 5x + 10 \quad [\text{Πολυώνυμο } 3^{\text{ου}} \text{ βαθμού}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } & (2x^3 - x^2 + 1) + (-2x^3 + 2x - 3) \\ &= 2x^3 - x^2 + 1 - 2x^3 + 2x - 3 \\ &= -x^2 + 2x - 2 \quad [\text{Πολυώνυμο } 2^{\text{ου}} \text{ βαθμού}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } & (x^3 - 3x^2 - 1) + (-x^3 + 3x^2 + 1) = x^3 - 3x^2 - 1 - x^3 + 3x^2 + 1 = 0 \\ & [\text{Μηδενικό πολυώνυμο}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. & (x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 5x^2 + 3) \\ &= x^3 + 2x^2 - 5x + 7 - 4x^3 + 5x^2 - 3 \\ &= -3x^3 + 7x^2 - 5x + 4 \quad [\text{Πολυώνυμο } 3^{\text{ου}} \text{ βαθμού}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. & (x^2 + 5x)(2x^3 + 3x - 1) \\ &= x^2(2x^3 + 3x - 1) + 5x(2x^3 + 3x - 1) \\ &= 2x^5 + 3x^3 - x^2 + 10x^4 + 15x^2 - 5x \\ &= 2x^5 + 10x^4 + 3x^3 + 14x^2 - 5x \quad [\text{Πολυώνυμο } 5^{\text{ου}} \text{ βαθμού}] \end{aligned}$$

Για το βαθμό του αθροίσματος και του γινομένου δυο πολυωνύμων αποδεικνύεται ότι:

- Αν το άθροισμα δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο των βαθμών των δυο πολυωνύμων.
- Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Άσκηση

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = x^2 - 5x + 2$$

και

$$Q(x) = x^3 + 3x + 1.$$

Να βρεθούν τα πολυώνυμα:

i) $P(x) + Q(x)$

ii) $2P(x) - 3Q(x)$

iii) $P(x) \cdot Q(x)$

iv) $[P(x)]^2$

Διαίρεση πολυωνύμων

Ξέρουμε ότι, αν έχουμε δύο φυσικούς αριθμούς Δ (διαιρετέος) και δ (διαιρέτης) με $\delta \neq 0$ και κάνουμε τη διαίρεση $\Delta : \delta$, τότε βρίσκουμε δύο μοναδικούς φυσικούς αριθμούς π (πηλίκο) και u (υπόλοιπο), για τους οποίους ισχύει:

$$\Delta = \delta\pi + u \text{ με } u < \delta$$

Αν $u = 0$, είναι $\Delta = \delta \cdot \pi$ και τότε λέμε ότι έχουμε **τέλεια διαίρεση**. Στην περίπτωση αυτή λέμε ακόμα ότι ο δ **διαίρει** το Δ ή ότι ο δ είναι **παράγοντας** του Δ .

Για παράδειγμα, αν $\Delta = 325$ και $\delta = 19$, τότε με τη διαίρεση $325 : 19$, βρίσκουμε τους αριθμούς $\pi = 17$ και $u = 2$, για τους οποίους ισχύει

$$325 = 19 \cdot 17 + 2 \text{ με } 2 < 19$$

325	19
-19	17
135	
-133	
2	

Ομοίως, αν έχουμε δύο πολυώνυμα $\Delta(x)$ (διαιρετέος) και $\delta(x)$ (διαιρέτης) με $\delta(x) \neq 0$ και κάνουμε τη διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$, τότε βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $\pi(x)$ (πηλίκο) και $u(x)$ (υπόλοιπο), για τα οποία ισχύει:

$$\Delta = \delta\pi + u \text{ με } u < \delta \text{ (Ταυτότητα Ευκλείδειας διαίρεσης)}$$

όπου το $u(x)$ ή είναι ίσο με μηδέν ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, περιγράφεται η διαδικασία της διαίρεσης του πολυωνύμου $\Delta(x) = 2x^2 - 5x^3 + 2x^4 - 4 + 8x$ με το πολυώνυμο $\delta(x) = x^2 - x$.

Γράφουμε τα πολυώνυμα του διαιρετέου και του διαιρέτη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής του x .

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 4 & x^2 - x \\ \hline \end{array}$$

Διαιρούμε τον πρώτο όρο $2x^4$ του διαιρετέου με τον πρώτο όρο x^2 του διαιρέτη ($\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$). Το αποτέλεσμα $2x^2$ είναι ο πρώτος όρος του πηλίκου.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 4 & x^2 - x \\ \hline & 2x^2 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε το $2x^2$, που είναι ο πρώτος όρος του πηλίκου, με το διαιρέτη $x^2 - x$ και το γινόμενο $2x^2(x^2 - x) = 2x^4 - 2x^3$ το αφαιρούμε από το διαιρετέο. Για να γίνουν ευκολότερα οι πράξεις, αλλάζουμε τα πρόσημα και αντί για αφαίρεση κάνουμε πρόσθεση και έτσι βρίσκουμε το **πρώτο μερικό υπόλοιπο**

$$u_1 = -3x^3 + 2x^2 + 8x - 4.$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 4 & x^2 - x \\ -2x^4 + 2x^3 & \\ \hline & -3x^3 + 2x^2 + 8x - 4 \end{array}$$

Στη συνέχεια διαιρούμε τον πρώτο όρο $-3x^3$ του υπολοίπου u_1 με τον πρώτο όρο x^2 του διαιρέτη ($-\frac{3x^3}{x^2} = -3x$). Το αποτέλεσμα $-3x$ είναι ο δεύτερος όρος του πηλίκου.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 4 & x^2 - x \\ -2x^4 + 2x^3 & \\ \hline & -3x^3 + 2x^2 + 8x - 4 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε το $-3x$, που είναι ο δεύτερος όρος του πηλίκου, με το διαιρέτη $x^2 - x$ και το γινόμενο $-3x(x^2 - x) = -3x^3 + 3x^2$ το αφαιρούμε από το υπόλοιπο u_1 και βρίσκουμε το **δεύτερο μερικό υπόλοιπο** $u_2 = -x^2 + 8x - 4$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 4 & x^2 - x \\ -2x^4 + 2x^3 & \\ \hline & -3x^3 + 2x^2 + 8x - 4 \\ & 3x^3 - 3x^2 & \\ \hline & -x^2 + 8x - 4 \end{array}$$

Συνεχίζουμε τη διαίρεση με τον ίδιο τρόπο μέχρι να καταλήξουμε σε υπόλοιπο που να είναι ίσο με μηδέν (**τέλεια διαίρεση**) ή να έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του διαιρέτη $x^2 - x$ (**ατελής διαίρεση**), οπότε η διαίρεση δεν μπορεί να συνεχιστεί.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 4 & x^2 - x \\ -2x^4 + 2x^3 & \\ \hline & -3x^3 + 2x^2 + 8x - 4 \\ & 3x^3 - 3x^2 & \\ \hline & -x^2 + 8x - 4 \\ & x^2 - x & \\ \hline & 7x - 4 \end{array}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα, η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$\begin{aligned} 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x - 4 &= (x^2 - x) \cdot (2x^2 - 3x - 1) + (7x - 4) \\ (\text{Διαιρετέος}) &= (\text{Διαιρέτης}) \cdot (\text{πηλίκος}) + (\text{υπόλοιπο}) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των βαθμών διαιρέτη και πηλίκου είναι ίσο με το βαθμό του διαιρετέου.

Ομοίως η διαίρεση $(8x^4 + 8x^3 + 17x - 5) : (2x^2 + 3x - 1)$, γίνεται ως εξής:

Από το διαιρετέο λείπει ο όρος 2ου βαθμού, οπότε, όταν τον γράφουμε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής του, συνήθως τον συμπληρώνουμε με το μηδενικό μονώνυμο ή αφήνουμε τη θέση του κενή για να γίνει ευκολότερα η αναγωγή ομοίων όρων.

$$\begin{array}{r|l}
 8x^4 + 8x^3 & + 17x - 5 \\
 -8x^4 - 12x^3 + 4x^2 & \\
 \hline
 & -4x^3 + 4x^2 + 17x - 5 \\
 & + 4x^3 + 6x^2 - 2x \\
 \hline
 & 10x^2 + 15x - 5 \\
 & -10x^2 - 15x + 5 \\
 \hline
 & 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 2x^2 + 3x - 1 \\
 4x^2 - 2x + 5
 \end{array}$$

Στην τελευταία διαίρεση, όπου το υπόλοιπο είναι μηδέν, η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι:

$$\begin{array}{ccc}
 8x^4 + 8x^3 + 17x - 5 = (2x^2 + 3x - 1) \cdot (4x^2 - 2x + 5) \\
 \text{(Διαιρετέος)} & = & \text{(Διαιρέτης)} \cdot \text{(Πηλίκο)}
 \end{array}$$

Τα πολυώνυμα $\delta = 2x^2 + 3x - 1$ και $\pi = 4x^2 - 2x + 5$ λέγονται **παράγοντες** ή **διαιρέτες** του πολυωνύμου $\Delta = 8x^4 + 8x^3 + 17x - 5$.

Ασκήσεις

Να κάνετε τις διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης σε κάθε περίπτωση.

- α) $(2x^3 + x^2 - 3x + 6) : (x + 2)$
- β) $(6x^3 - x^2 - 10x + 5) : (3x + 1)$
- γ) $(6x^4 - x^2 + 2x - 7) : (x - 1)$
- δ) $(4x^3 + 5x - 8) : (2x - 1)$
- ε) $(x^5 - x^4 + 3x^2 + 2) : (x^2 - x + 2)$

Λύσεις

α) $\pi(x) = 2x^2 - 3x + 3, u(x) = 0,$

β) $\pi(x) = 2x^2 - x - 3, u(x) = 8,$

γ) $\pi(x) = 6x^3 + 6x^2 + 5x + 7, u(x) = 0,$

δ) $\pi(x) = 2x^2 + x + 3, u(x) = -5,$

ε) $\pi(x) = x^3 - 2x + 1, u(x) = 5x,$

Διαίρεση πολυωνύμου με $x - \rho$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή

$$u = P(\rho)$$

Για παράδειγμα, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ με το $x - 2$ είναι $u = P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 13 \cdot 2 - 15 = -21$,

ενώ με το $x + 1$ που γράφεται $x - (-1)$, είναι $u = P(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 13 \cdot (-1) - 15 = 0$.

Παρατηρούμε ότι:

- $P(-1) = 0$, δηλαδή ότι το -1 είναι **ρίζα** του $P(x)$ και
- $P(x) = (x + 1)\pi(x) + 0 = (x + 1)\pi(x)$, δηλαδή ότι το $x + 1$ είναι **παράγοντας** του $P(x)$.

Γενικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

Παράδειγμα

Να εξεταστεί αν τα πολυώνυμα $x + 2$ και $x - 1$ είναι παράγοντες του πολυωνύμου $P(x) = x^3 + x^2 - x + 2$.

Λύση

Το $x + 2$ γράφεται $x - (-2)$. Επειδή $P(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - (-2) + 2 = 0$, το -2 είναι ρίζα του $P(x)$.

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, το $x + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

Επειδή $P(1) = 1^3 + 1^2 - 1 + 2 = 3 \neq 0$, το 1 δεν είναι ρίζα του $P(x)$.

Επομένως το $x - 1$ δεν είναι παράγοντας του $P(x)$.

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα της μορφής $x - \rho$ που δίνονται σε κάθε περίπτωση, είναι παράγοντες του $P(x)$.

i) $P(x) = x^4 - 25x^2 + 144$, $x+3$

ii) $P(x) = 16x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 14x - 4$, $x - \frac{1}{4}$

Σχήμα Horner (Χόρνερ)

i) $(3x^3 + 6x^2 - 17x + 20) : (x + 3)$

$P(x)$ $x - \rho$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 6x^2 - 17x + 20 & x+3 \\ -3x^3 - 9x^2 & \\ \hline -3x^2 - 17x + 20 & \\ 3x^2 + 9x & \\ \hline -8x + 20 & \\ 8x + 24 & \\ \hline 44 & \end{array}$$

ΣΧΗΜΑ HORNER (Χόρνερ)

$\Delta(x)$ σελ. 136

3	6	-17	20	-3
3	-9	9	24	
	-3	-8	44	

$\eta(x)$

Αντίγραφο

$\cdot 2$

$\downarrow +$

Παράδειγμα

$$3x^5 + 3x^4 + 6x - 13 : x - 2$$

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner και έχουμε:

3	3	0	0	6	-13	$\rho = 2$
	6	18	36	72	156	
3	9	18	36	78	143	

Επομένως το πηλίκο της διαίρεσης είναι:

$$\pi(x) = 3x^4 + 9x^3 + 18x^2 + 36x + 78$$

και το υπόλοιπο

$$u = P(2) = 143.$$

Ασκήσεις

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των παρακάτω διαιρέσεων:

$$\begin{array}{ll} \alpha) (5x^3 - 7x^2 + 8x + 1) : (x - 3) & \beta) (x^4 - x^3 + x - 9) : (x - 5) \\ \gamma) (x^5 + 2x^4 - x + 1) : (x + 3) & \delta) (x^3 - x + 5) : (x + 6) \end{array}$$

ΠΩΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Επίλυση πολυωνυμικής εξίσωσης:

Βήμα 1: Αν η εξίσωση $P(x) = 0$, έχει ρητούς συντελεστές, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και καταλήγουμε σε εξίσωση με ακέραιους συντελεστές.

Βήμα 2: Βρίσκουμε τις **πιθανές ακέραιες ρίζες ρ_i** , που είναι οι ακέραιοι διαιρέτες του σταθερού όρου.

Βήμα 3: Βρίσκουμε ποια από τις πιθανές ακέραιες ρίζες μηδενίζει το πολυώνυμο $P(x)$.

Βήμα 4: Εφαρμόζουμε το σχήμα **Horner**, για τη ρίζα ρ_1 που βρήκαμε και γράφουμε το πολυώνυμο στη μορφή: $P(x) = (x - \rho_1) \cdot \Pi_1(x)$, όπως προκύπτει απ' το σχήμα Horner.

Βήμα 5: Κάνουμε την εργασία απο το βήμα 2 έως το βήμα 4 για το πολυώνυμο $\Pi_1(x)$ και συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία έως ότου το αρχικό πολυώνυμο $P(x)$ να γίνει γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων πολυωνύμων.

Βήμα 6: Βρίσκουμε τις ρίζες του δευτεροβάθμιου $\Pi_i(x)$, αν υπάρχουν, με τη μέθοδο της διακρίνουσας. Γράφουμε το $P(x)$ σε μορφή γινομένου παραγόντων, οπότε έχουμε μία προς μία τις ρίζες.

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η εξίσωση $x^4 - x^2 - 4x - 4 = 0$.

Λύση

Η εξίσωση έχει ακέραιους συντελεστές με σταθερό όρο $a_0 = -4$. Έτσι οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Διαπιστώνουμε: $P(1) = 1^4 - 1^2 - 4 \cdot 1 - 4 = -8 \neq 0$ (άρα ο αριθμός 1 δεν είναι ρίζα του $P(x)$)

$$P(-1) = (-1)^4 - (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 4 = 0 \text{ (άρα ο αριθμός } -1 \text{ είναι ρίζα του } P(x))$$

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για $\rho_1 = -1$

$$\text{Οπότε } P(x) = (x+1)(x^3 - x^2 - 4)$$

Για το $\Pi_1(x) = x^3 - x^2 - 4$, έχουμε:

1	0	-1	-4	-4	-1
	-1	1	0	4	
1	-1	0	-4	0	

Πιθανές ακέραιες ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ και $\Pi_1(1) = -4 \neq 0$

(Σχόλιο: Εφ' όσον ο αριθμός 1 δεν είναι ρίζα του $P(x)$, δεν μπορεί να είναι ρίζα ούτε του $\Pi_1(x)$, και επομένως δεν ήταν απαραίτητη η δοκιμή.)

$$\Pi_1(-1) = -6 \neq 0 \text{ (άρα ο αριθμός } -1 \text{ δεν είναι ρίζα του } \Pi_1(x))$$

$$\Pi_1(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 0 \text{ (άρα ο αριθμός } 2 \text{ είναι ρίζα του } \Pi_1(x))$$

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner για $\rho_2 = 2$

1	-1	0	-4	2
	2	2	4	
1	1	2	0	

$$\text{Έτσι έχουμε: } P(x) = (x+1)(x-2)(x^2 + x + 2)$$

$$\text{Για το } \Pi_2(x) = x^2 + x + 2, \text{ επειδή } \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$$

το $\Pi_2(x)$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Έτσι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 2$.

Άσκηση 1

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x - \frac{1}{6} = 0$

Λύση

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών: $\frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$

Ονομάζουμε: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

Πιθανές ακέραιες ρίζες: ± 1 και $P(1) = 2 - 3 + 2 - 1 = 0$. Άρα $\rho_1 = 1$ είναι ρίζα του $P(x)$.

Σχήμα Horner:

2	-3	2	-1	1
	2	-1	1	
2	-1	1	0	

Έτσι: $P(x) = (x-1) \cdot (2x^2 - x + 1)$ Για το $\Pi(x) = 2x^2 - x + 1$ έχουμε: $\Delta = -7 < 0$, άρα δεν έχει ρίζες. Έτσι μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x = 1$.

Άσκηση 2

Να λυθεί η εξίσωση: $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x = 0$ (1)

Λύση: Έχουμε διαδοχικά: $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 4x^2 + x + 6) = 0$

Τότε: $x=0$ ή $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ (2)

Λύνουμε την εξίσωση (2)

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του 6 δηλαδή οι: $\pm 1, \pm 2, \pm 3$

Με το σχήμα Horner εξετάζουμε αν κάποια από αυτές είναι ρίζα

1	-4	1	6	2
↓	2	-4	-6	
1	-2	-3	0	

Έτσι η (2) γράφεται: $(x-2)(x^2 - 2x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x=2$ ή $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$ ή $x=3$

Άρα οι ρίζες της (1) είναι:

$x=-1$ ή $x=0$ ή $x=2$ ή $x=3$

Ασκήσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

ii) $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$

iii) $x^3 + x^2 - 2 = 0$

iv) $x^3 - 7x + 6 = 0$

Λύσεις

i) $-2, 3, -3$

ii) $0, 1, -1, -\frac{5}{3}$

- iii) 1
iv) 1,2,-3

2. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης καθεμιάς από τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 5x - 2$

ii) $g(x) = 4x^3 - 3x - 1$

Λύσεις

- i) (2,0) ii) $(1,0), (-\frac{1}{2}, 0)$

ΠΩΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Λύση πολυωνυμικής ανισότητας

Βήμα 1: Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο $P(x)$ του πρώτου μέλους με τον τρόπο που αναφέρεται στη μέθοδο λύσης πολυωνυμικής εξίσωσης.

Βήμα 2: Απο την παραγοντοποιημένη τελική μορφή του $P(x)$ προσπαθούμε να βρούμε το πρόσημο του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του x . Έτσι βάζουμε τις ρίζες σ' ένα πίνακα προσήμων και γράφουμε αναλυτικά το πρόσημο του κάθε παράγοντα.

Βήμα 3: Συμπεραίνουμε τελικά το πρόσημο του γινομένου των παραγόντων $P(x)$ και παίρνουμε ως λύσεις τα διαστήματα τα οποία μας υποδεικνύει η φορά της ανίσωσης.

Παράδειγμα 1

Να λυθεί η ανίσωση: $-x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x \leq 0$.

Λύση

Ονομάζουμε $P(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x$ το πολυώνυμο του πρώτου μέλους το οποίο θα παραγοντοποιήσουμε.

Το $P(x)$ έχει προφανώς παράγοντα τον x . ($\rho_1 = 0$)

$$\text{Έτσι } P(x) = x \cdot \underbrace{(-x^3 + 4x^2 - 4x + 3)}_{\Pi_1(x)}$$

Πιθανές ακέραιες ρίζες για το $\Pi_1(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x + 3$: $\pm 1, \pm 3$.

$\Pi_1(1) = 2 \neq 0$, $\Pi_1(-1) = 12 \neq 0$, $\Pi_1(3) = 0$, άρα ο $\rho_2 = 3$ είναι ρίζα.

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στο $\Pi_1(x)$ για $\rho_2 = 3$.

-1	4	-4	3	3
	-3	3	-3	
-1	1	-1	0	

Έτσι $P(x) = x \cdot (x-3) \cdot (-x^2 + x - 1)$

Για το $\Pi_2(x) = -x^2 + x - 1$ είναι $\Delta = 1^2 - 4(-1) \cdot (-1) = -3 < 0$ άρα δεν έχει ρίζες.

Κάνουμε πίνακα προσήμων για τους παράγοντες του γινομένου :

$$P(x) = x \cdot (x-3) \cdot (-x^2 + x - 1)$$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
x	-	0	+	+	
x-3	-	-	0	+	
$-x^2+x-1$	-	-	-	-	
P(x)	-	0	+	0	-

Επειδή ζητείται $P(x) \leq 0$ ως σύνολο λύσεων παίρνουμε τα διαστήματα όπου το $P(x)$ δεν είναι θετικό. Επομένως $x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$.

Παράδειγμα 2

Να λυθεί η ανίσωση: $(x-1)(2-x)(x-3) > 0$

Λύση:

Είναι $(x-1)(2-x)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x-1=0$ ή $2-x=0$ ή $x-3=0$. Δηλαδή $x=1$ ή $x=2$ ή $x=3$

x	1	2	3	
x-1	-	+	+	+
2-x	+	+	-	-
x-3	-	-	-	+
(x-1)(2-x)(x-3)	+	-	+	-

Άρα $x < 1$ ή $2 < x < 3$ Ή με άλλον τρόπο $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3)$

Ασκήσεις

1.

Να λυθεί η ανίσωση: $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$

2.

Να λυθεί η ανίσωση: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0$

3.

Να λυθεί η ανίσωση: $3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 > 0$

Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Μία ανίσωση της μορφής $A(x) / B(x) \geq 0$ αληθεύει για εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως

$$A(x) \cdot B(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad B(x) \neq 0.$$

Έστω για παράδειγμα η ανίσωση $(x^2 - 4x + 3) / (x^2 + 3x - 4) \geq 0$. Έχουμε:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3x - 4} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 3x - 4) \geq 0 \quad \text{και} \quad x^2 + 3x - 4 \neq 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$ είναι οι 1 και 3, ενώ του τριωνύμου $x^2 + 3x - 4$ είναι οι 1 και -4.

Συντάσσουμε τον πίνακα προσήμου του γινομένου :

$$P(x) = (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 3x - 4)$$

x	$-\infty$	-4	1	3	$+\infty$		
$x^2- 4x + 3$	+		+	0	-	0	+
$x^2 + 3x-4$	+	0	-	0	+		+
P(x)	+	0	-	0	-	0	+

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in (-\infty, 4) \cup [3, +\infty)$.