

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Περιοδική λέγεται κάθε κίνηση που επαναλαμβάνεται η ίδια ανά τακτά χρονικά διαστήματα.

Περίοδος (T) είναι ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη επανάληψη ενός φαινομένου.

$$\begin{aligned} \text{Πχ: } T_{\text{λεπτοδείκτη}} &= 1 \text{ ώρα ή } 60\text{min ή } 3600\text{sec} \\ T_{\text{ωροδείκτη}} &= 12 \text{ ώρες} \end{aligned}$$

$$T = \frac{\Delta t \rightarrow \text{χρονικό διάστημα}}{N \rightarrow \text{αριθμός επαναλήψεων}}$$

Συχνότητα (f): εκφράζει το πλήθος των επαναλήψεων N προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt .

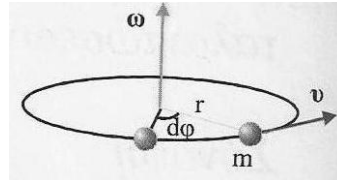
$$f = \frac{N}{\Delta t} \text{ (μονάδα μέτρησης στο SI: } \frac{1}{\text{sec}} \text{ ή } \text{sec}^{-1} \text{ ή Hz)}$$

Σχέση συχνότητας – περιόδου:

$$f = \frac{N}{\Delta t} \xrightarrow[N=\Delta t]{N=1} f = \frac{1}{T} \text{ ή } T = \frac{1}{f} .$$

Γωνιακή ταχύτητα ή γωνιακή συχνότητα (ω):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ ή } \omega = 2\pi f \quad (\text{rad/s})$$



ΑΜΕΙΩΤΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Ταλάντωση είναι κάθε περιοδική κίνηση στην οποία ένα σώμα κινείται παλινδρομικά (πήγαινε – έλα) μεταξύ δύο ακραίων θέσεων στην ίδια τροχιά.

Αν η τροχιά είναι ευθύγραμμη, η ταλάντωση λέγεται γραμμική(απλή).

Θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) λέγεται εκείνη η θέση του σώματος όπου $\Sigma F = 0$.

Απομάκρυνση (x) είναι το διάνυσμα θέσης του σώματος από τη Θ.Ι. και παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές (έχει πάντα φορά προς τις ακραίες θέσεις).

Πλάτος (A) είναι η μέγιστη απομάκρυνση ($A > 0$) του σώματος από τη Θ.Ι..

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Είναι η γραμμική ταλάντωση ενός σώματος όταν η απομάκρυνση από τη Θ.Ι. μεταβάλλεται αρμονικά (ημιτονοειδής συνάρτηση) με το χρόνο. Δηλαδή:

$$x = A\eta\mu(\omega t)$$

- Ο τύπος ισχύει όταν για $t = 0$ το σώμα περνά από τη Θ.Ι. ($x = 0$) κινούμενο προς τα θετικά ($u = +u_{\max}$).

➤ (ωt) : γωνία που μεταβάλλεται με το χρόνο και λέγεται φάση της ταλάντωσης.

Για $t = 0$: $x = A\eta\mu(\omega \cdot 0) = A\eta\mu 0 = 0$

Για $t = \frac{T}{4}$: $x = A\eta\mu\left(\omega \frac{T}{4}\right) = A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = A\eta\mu \frac{\pi}{2} = A.$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

$$v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\omega t$$

όπου $v_{\max} = \omega A$ (μέγιστη ταχύτητα)

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

$$a = -a_{\max} \eta\mu\omega t$$

όπου $a_{\max} = \omega^2 A$ (μέγιστη επιτάχυνση)

Σχέση a, x

$$a = -a_{\max} \eta\mu(\omega t) \Leftrightarrow a = -\omega^2 \underbrace{A\eta\mu(\omega t)}_x$$

$$\Leftrightarrow a = -\omega^2 x, \text{ a, x ετερόσημα}$$

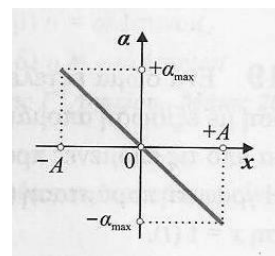
Για $x = 0$: $a = 0$

Για $x = A$: $a = -\omega^2 A = -a_{\max}$

Για $x = -A$: $a = -\omega^2 (-A) = a_{\max}$

Η επιτάχυνση έχει πάντα φορά προς τη θέση ισορροπίας.

Γραφική παράσταση $a-x \Leftrightarrow a = -\omega^2 x$



Το πηλίκο της επιτάχυνσης προς τη θέση είναι σταθερό.

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{a}{x} = -\omega^2 = \text{σταθ.}$$

Σχέση στιγμιαίας θέσης (x) – ταχύτητας (v)

$$x = A\eta\mu(\omega t) \Rightarrow \eta\mu(\omega t) = \frac{x}{A} \Rightarrow \eta\mu^2 \omega t = \frac{x^2}{A^2} \quad (1)$$

$$v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega t = \frac{v}{v_{\max}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2 \omega t = \frac{v^2}{v_{\max}^2} \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 1 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{v_{\max}^2} \Rightarrow 1 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} \Rightarrow \omega^2 A^2 = \omega^2 x^2 + v^2 \Rightarrow \omega^2 (A^2 - x^2) = v^2 \Rightarrow$$

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

Για κάθε τιμή του x έχουμε δύο τιμές ταχύτητας με το ίδιο μέτρο αλλά με διαφορετικό πρόσημο.

Σχέση ταχύτητας (v) – επιτάχυνσης (a)

$$a = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t) \Rightarrow \eta\mu^2(\omega t) = \frac{a^2}{(\omega^2 A)^2} \Rightarrow \eta\mu^2 \omega t = \frac{a^2}{\omega^4 A^2} \quad (1)$$

$$v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu \omega t = \frac{v}{v_{\max}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2 \omega t = \frac{v^2}{v_{\max}^2} \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 1 = \frac{a^2}{\omega^4 A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} \Rightarrow \omega^4 A^2 = a^2 + \omega^2 v^2 \Rightarrow \omega^4 A^2 - \omega^2 v^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$\omega^2 (\omega^2 A^2 - v^2) = a^2 \Rightarrow a^2 = \omega^2 (v_{\max}^2 - v^2) \Rightarrow a = \pm \omega \sqrt{v_{\max}^2 - v^2}$$

ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΓΕΘΩΝ x , v

$$x = A \eta\mu \omega t$$

$$v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu \omega t = v_{\max} \eta\mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Άρα διαφορά φάσης

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

(η v προηγείται του x κατά $\pi/2$)

ΔΙΑΦΟΡΑ ΦΑΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΓΕΘΩΝ x , a

$$x = A \eta\mu \omega t$$

$$a = -a_{\max} \eta\mu \omega t \Rightarrow a = a_{\max} \eta\mu(\omega t + \pi)$$

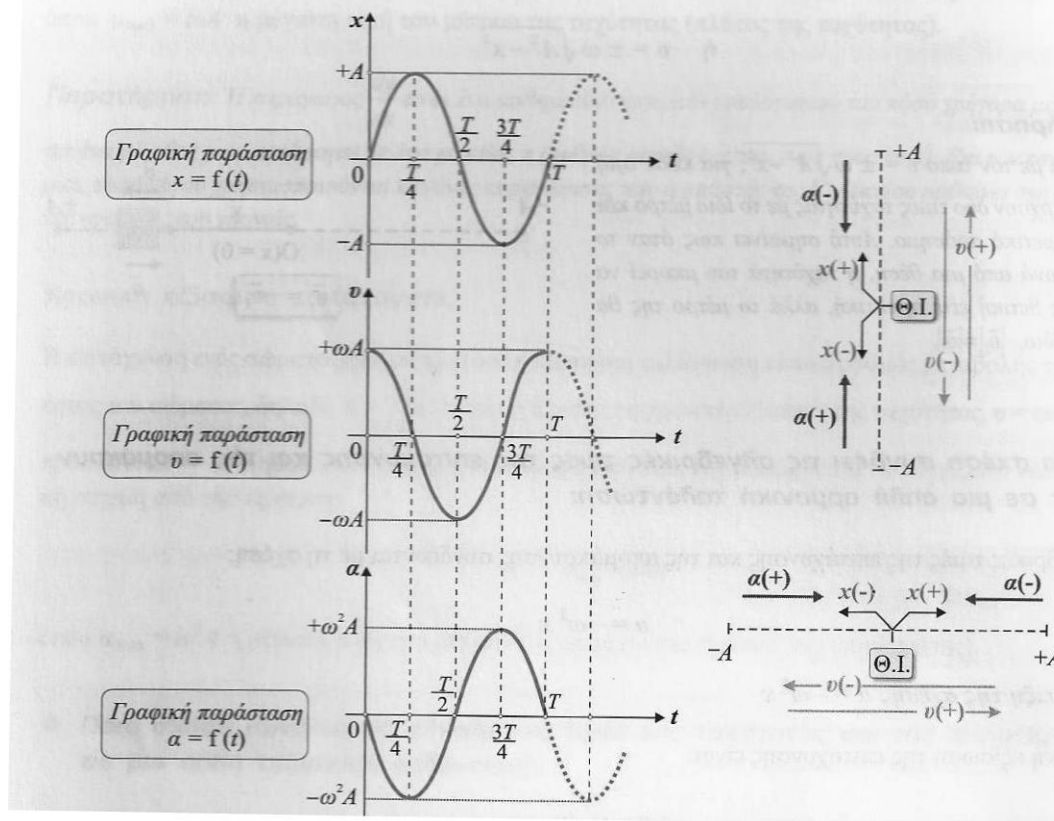
Άρα διαφορά φάσης

$$\Delta\varphi = \pi \text{ rad}$$

(η a προηγείται του x κατά π)

(Συνεπώς η a προηγείται του v κατά $\pi/2$)

- ♦ Ποιες είναι οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων $x = f(t)$, $v = f(t)$, $a = f(t)$ στην απλή αρμονική ταλάντωση;



Η αναπαράσταση της ταλάντωσης με τη μέθοδο του περιστρεφόμενου διανύσματος

Ένα διάνυσμα μήκους A περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Η προβολή του στον κατακόρυφο άξονα εκτελεί ΑΑΤ.

Από τον τριγωνομετρικό κύκλο

$$\eta\mu\varphi = \frac{x}{A}$$

Με τη βοήθεια του γνωστού ημιτόνου υπολογίζω τη γωνία φ

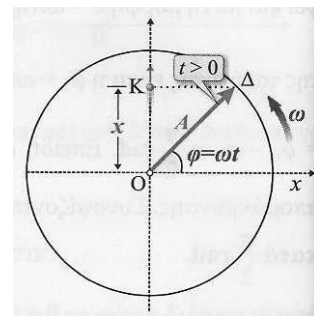
Από τον ορισμό της γωνιακής ταχύτητας:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\varphi = \omega\Delta t \text{ ή } \varphi = \omega t \text{ ή } t = \frac{\varphi}{\omega}.$$

Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε τη χρονική διάρκεια κίνησης του σώματος που κάνει ταλάντωση.

Παράδειγμα υπολογισμού χρονικής διάρκειας κίνησης.

Πόσο χρονικό διάστημα απαιτείται για κίνηση:



i) Από τη θέση $x=0$ στη θέση $x = \frac{A}{2}$ για 1^η φορά και για 2^η φορά.

ii) Για πόσο χρόνο $x \geq \frac{A}{2}$.

ΛΥΣΗ

$$i) x = A\eta\mu\omega t \Leftrightarrow \eta\mu\omega t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega t = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega t = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \omega t = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{1η φορά}]{\kappa=0} \left\{ \begin{array}{l} \omega t = \frac{\pi}{6} \\ \omega t = \frac{5\pi}{6} \end{array} \right. \text{ άρα έχουμε } \frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t_1 = \frac{T}{12} \text{ (1η φορά)}$$

$$\frac{2\pi}{T}t = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow t_2 = \frac{5T}{12} \text{ (2η φορά)}$$

$$ii) \Delta t = \frac{5T}{12} - \frac{T}{12} = \frac{4T}{12} = \frac{T}{3}$$

$$x = A\eta\mu\omega t$$

ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΑ: $v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\omega t$, ισχύουν χωρίς ϕ_0 .

$$a = -a_{\max} \eta\mu\omega t$$

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0)$$

Αν έχω **αρχική φάση**: $0 \leq \phi_0 < 2\pi$ και έχω $v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)$

$$a = -a_{\max} \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0)$$

•Για $t=0$, $x=0$, $v > 0 \Leftrightarrow$ ποια η ϕ_0 ;

Α' τρόπος

$$x = A\eta\mu(\omega t + \phi_0) \Leftrightarrow 0 = A\eta\mu(\omega \cdot 0 + \phi_0)$$

$$\Leftrightarrow 0 = A\eta\mu\phi_0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\phi_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \phi_0 = 0 \quad \acute{\eta} \quad \phi_0 = \pi$$

Από $v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \frac{\phi_0=0}{t=0} v = v_{\max}$ δεκτή.

Για $\phi_0 = \pi$ έχω $v = -v_{\max}$ απορρίπτεται.

Β' τρόπος

$$v = v_{\max} (\omega t + \varphi_0) \xRightarrow[t=0]{v=v_{\max}} v_{\max} = v_{\max} \sin \varphi_0$$

$$\sin \varphi_0 = 1 \Leftrightarrow \varphi_0 = 0$$

Δηλαδή αν $t = 0, x = 0, v = +v_{\max} \Rightarrow \varphi_0 = 0$ (τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του έχοντας θετική ταχύτητα).

Παράδειγμα υπολογισμού φ_0

1) Έστω για $t = 0, x = +A, v = 0$

$$x = A (\omega t + \varphi_0) \xRightarrow[t=0]{x=A} A = A \eta \mu \varphi_0 \Leftrightarrow \eta \mu \varphi_0 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow k \in \mathbb{Z} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \\ \varphi_0 = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \end{array} \right. \quad (\text{Μια διπλή λύση όταν βρισκόμαστε σε ακραία θέση}).$$

2) Έστω για $t = 0, x = -\frac{A\sqrt{2}}{2}, v > 0$

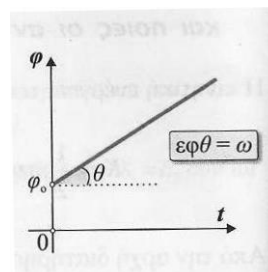
$$x = A \eta \mu (\omega t + \varphi_0) \xRightarrow[t=0]{x=-\frac{A\sqrt{2}}{2}} -\frac{A\sqrt{2}}{2} = A \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow k \in \mathbb{Z} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \quad \text{απορ. (} v < 0 \text{)} \\ \varphi_0 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \quad \text{δεκτή για } v > 0 \end{array} \right.$$

Γενικά για τη φάση φ της ταλάντωσης: $\varphi = \omega t + \varphi_0$

$$\text{κλίση: } \omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0}$$

(ρυθμός μεταβολής φάσης ή γωνιακή ταχύτητα)



Δύναμη στην Α.Α.Τ

Έστω Α.Α.Τ. με εξίσωση $x = A\eta\mu\omega t$

Από το 2^ο νόμο Newton για τη συνισταμένη δύναμη έχουμε:

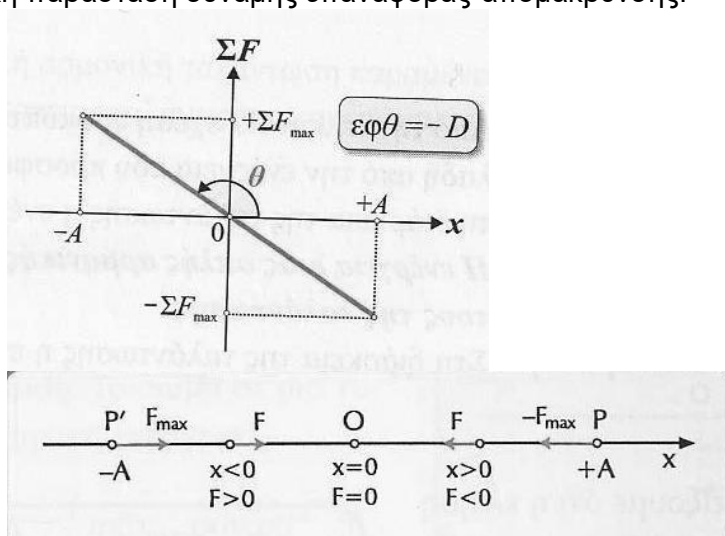
$$\Sigma F = m \cdot a = m(-a_{\max} \cdot \eta\mu\omega t) \Leftrightarrow$$

$$\Sigma F = -m \cdot \omega^2 A\eta\mu\omega t \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\Sigma F = -m \cdot \omega^2 x} \rightarrow \text{δύναμη επαναφοράς και έχει φορά **πάντα** προς τη Θ.Ι.}$$

$$\text{Θέτω } D = m \cdot \omega^2 \text{ (σταθερά επαναφοράς } \left(\frac{N}{m}\right)) \text{ άρα } \boxed{\Sigma F = -D \cdot x}$$

Γραφική παράσταση δύναμης επαναφοράς-απομάκρυνσης.



Περίοδος στην Α.Α.Τ.

$$D = m \cdot \omega^2 \Leftrightarrow D = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \Leftrightarrow D = m \frac{(2\pi)^2}{T^2} \Leftrightarrow T = m \frac{(2\pi)^2}{D}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{T^2} = \sqrt{(2\pi)^2 \frac{m}{D}} \Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Η σχέση $\Sigma F = -Dx$ αποτελεί **ικανή και αναγκαία συνθήκη** έτσι ώστε ένα σώμα να εκτελεί ΑΑΤ.

Βασικές γνώσεις για το ελατήριο.

Ιδανικό ελατήριο $\rightarrow$ αμελητέα μάζα

απολύτως ελαστικές δυνάμεις παραμόρφωσης
χωρίς εσωτερικές τριβές

Το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου υπολογίζεται από τον τύπο:

$F_{\text{ελ}} = k\Delta l$ (νόμος του Hooke), όπου Δl η συσπίρωση ή η επιμήκυνσή του. (Στο παρακάτω σχήμα $F_{\text{ελ}(1)} = k\Delta l_1$ και $F_{\text{ελ}(2)} = k\Delta l_2$).

Η σταθερά k εκφράζει τη σκληρότητα του ελατηρίου.

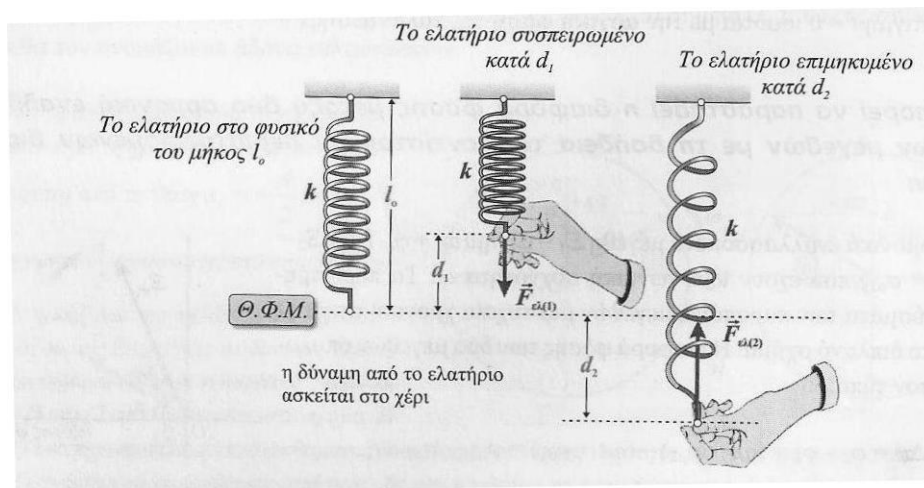
Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$U_{ελ} = 1/2 k d^2.$$

Η $F_{ελ}$ και η $U_{ελ}$ υπολογίζονται **ως προς το φυσικό μήκος** του ελατηρίου.

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου (συντηρητική δύναμη) είναι:

$$W_{F_{ελ}} = U_{αρχ(ελ)} - U_{τελ(ελ)} = 1/2 k d_1^2 - 1/2 k d_2^2.$$



Απόδειξη απλής αρμονικής ταλάντωσης

Για να **αποδείξω την Α.Α.Τ.** πρέπει να δείξω ότι σε μια τυχαία θέση x της ταλάντωσης ισχύει $\Sigma F = -Dx$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Οριζόντιο ελατήριο – σώμα

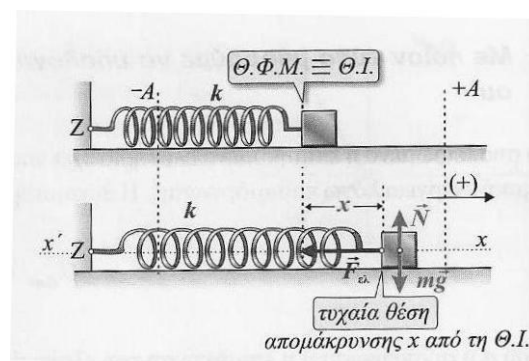
Υπολογίζω την $\Sigma \vec{F}$ στην τυχαία θέση

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_{ελ} \Rightarrow \Sigma F = -F_{ελ} = -k \cdot x$$

Άρα της μορφής $\Sigma F = -k \cdot x$ με $D = k$.

Δηλαδή έχω Α.Α.Τ.

$$\text{Οπότε } k = m \cdot \omega^2 \text{ και } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



Κατακόρυφο ελατήριο – σώμα

Δουλεύουμε πρώτα στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

$$\Theta I: \Sigma \vec{F} = 0 \Leftrightarrow F_{ελ} = W \Leftrightarrow k \cdot \Delta l = m \cdot g \quad (1)$$

Στην τυχαία θέση της ταλάντωσης:

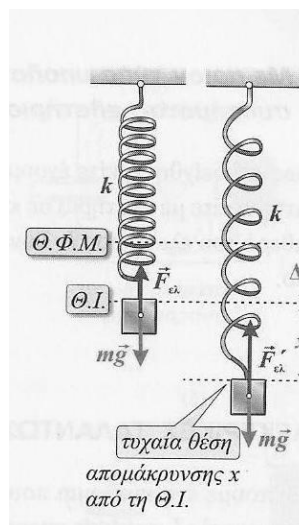
$$\Sigma \vec{F} = \vec{W} + \vec{F}_{ελ} \Rightarrow$$

$$\Sigma F = W - F_{ελ} = mg - k(\Delta l + x) = mg - k \cdot \Delta l - k \cdot x$$

$$\text{Λόγω της (1)} \quad \Sigma F = -kx$$

$$\text{Δηλαδή της μορφής } \Sigma F = -Dx$$

$$\text{Άρα Α.Α.Τ. με } D = k.$$



Ελατήριο σε κεκλιμένο επίπεδο

Ισχύει:

$$W_x = mg_x = mg \sin \varphi$$

$$W_y = mg_y = mg \cos \varphi$$

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N = W_y$$

$$\text{Στη } \Theta I \text{ στον άξονα } x: \Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow$$

$$F_{ελ} = W_x \Rightarrow k \cdot \Delta l = m \cdot g \cdot \sin \varphi \quad (1)$$

Στην τυχαία θέση έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \Sigma F_x = \vec{W} + \vec{F}_{ελ}$$

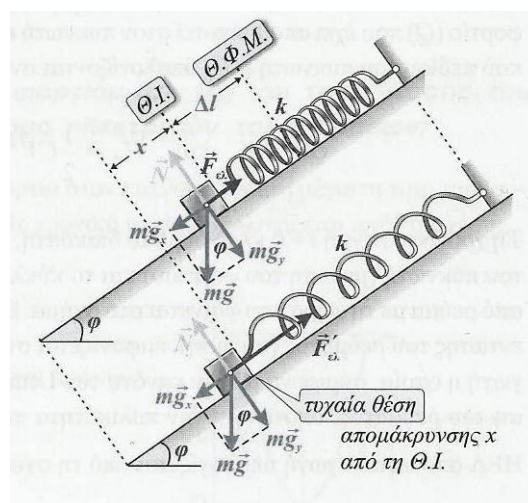
$$\Sigma F = m \cdot g \cdot \sin \varphi - k(\Delta l + x)$$

$$\Sigma F = m \cdot g \sin \varphi - k\Delta l + kx$$

$$\text{Οπότε λόγω της (1) έχουμε: } \Sigma F = -kx.$$

$$\text{Δηλαδή της μορφής } \Sigma F = -Dx.$$

$$\text{Άρα Α.Α.Τ. με } D = k.$$



1 σώμα – 2 ελατήρια

Στον άξονα x ισχύει:

Για τη ΘΙ:

$$F_{ελ(1)} - F_{ελ(2)} = 0 \Rightarrow F_{ελ(1)} = F_{ελ(2)} \Rightarrow$$

$$k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2 (1)$$

Στην τυχαία θέση:

$$\Sigma F = F'_{ελ(1)} + F'_{ελ(2)} \Rightarrow$$

$$\Sigma F = F'_{ελ(1)} - F'_{ελ(2)} \Rightarrow$$

$$\Sigma F = k_1(\Delta l_1 - x) - k_2(\Delta l_2 + x) \Rightarrow$$

$$\Sigma F = k_1 \Delta l_1 - k_1 x - k_2 \Delta l_2 - k_2 x$$

$$\text{Λόγω της (1)} \quad \Sigma F = -(k_1 + k_2)x .$$

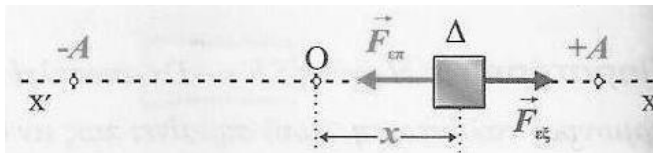
Δηλαδή της μορφής $\Sigma F = -Dx$

Άρα το σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με $D = k_1 + k_2$

Ενέργεια στην Α.Α.Τ.

Είναι ίση με την αρχική ενέργεια που προσφέρουμε στο σύστημα μέσω του έργου της εξωτερικής δύναμης που ασκήθηκε έτσι ώστε να μεταφερθεί το σώμα από τη ΘΙ σε μια ακραία θέση.

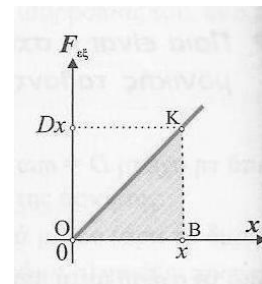
$$E_{\text{προσφ}} = E_{\text{ταλ}}$$



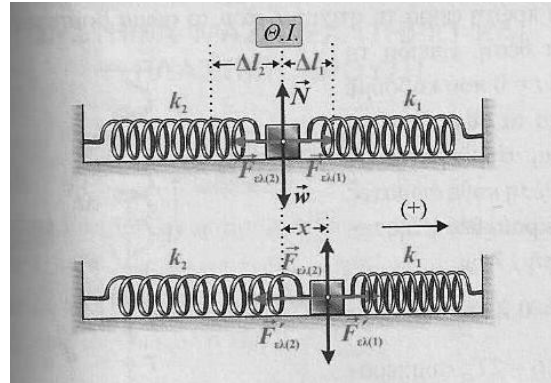
Δύναμη επαναφοράς $\Sigma F = -Dx$ ή $F_{επ} = -Dx$.

Αλλά $F_{εζ} = -F_{επ}$ άρα $F_{εζ} = Dx$

$$E_{\text{ταλ}} = W_{F(εζ)} = E\mu\beta(\text{τριγ} OKB) = \frac{A \cdot DA}{2} = \frac{DA^2}{2} = \frac{1}{2} DA^2$$



- ✓ Στις αμείωτες ταλαντώσεις η **ολική ενέργεια** παραμένει **σταθερή**.
- ✓ Το πλάτος A εξαρτάται **μόνο** από την ενέργεια της ταλάντωσης.



Μορφές ενέργειας:

Α) ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Στη ΘΙ: $K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$.

Στις ακραίες θέσεις: $K = 0$.

Β) ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ταλάντωσης: $U = \frac{1}{2}Dx^2$

Στη ΘΙ: $U = 0$ γιατί $x = 0$

Στις ακραίες θέσεις: $U_{\max} = \frac{1}{2}DA^2$

ΙΣΧΥΕΙ: $E = K + U = \text{σταθ.}$

$$E = K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

$$E = U_{\max} = \frac{1}{2}DA^2$$

Γραφικές παραστάσεις

α) Ενέργειας – χρόνου

Έστω Α.Α.Τ. με $x = A\eta\mu\omega t$

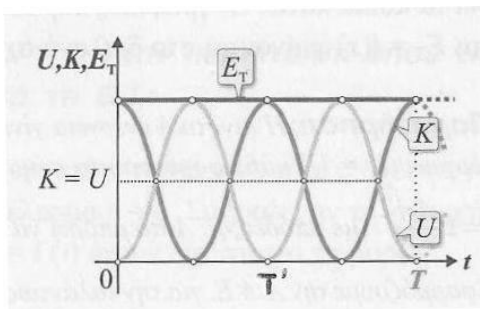
και $E = \frac{1}{2}DA^2 = \text{σταθερή}$

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}D(A\eta\mu\omega t)^2 = \frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2\omega t = E \cdot \eta\mu^2\omega t$$

$$\text{άρα } U = E \cdot \eta\mu^2\omega t$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_{\max}\sigma\nu\omega t)^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2\sigma\nu^2\omega t = E \cdot \sigma\nu^2\omega t$$

$$\text{άρα } K = E \cdot \sigma\nu^2\omega t$$



Η περίοδος των ενεργειών K, U είναι $T' = T/2$ άρα $f' = 2f$

Πότε γίνονται ίσες ($K=U$);

$$K=U \Leftrightarrow E \sin^2 \omega t = E \mu^2 \omega t \Leftrightarrow \frac{\eta \mu^2 \omega t}{\sin^2 \omega t} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon \varphi^2 \omega t = 1 \Leftrightarrow \varepsilon \varphi \omega t = \pm 1$$

$$\text{άρα } \omega t = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} t = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow t = \frac{\kappa T}{2} \pm \frac{T}{8}$$

$$\text{για } \kappa = 0: t = \frac{T}{8} \text{ (1η φορά)}$$

$$\text{για } \kappa = 1: t = \frac{T}{2} - \frac{T}{8} = \frac{3T}{8} \text{ (2η φορά) και } t = \frac{T}{2} + \frac{T}{8} = \frac{5T}{8} \text{ (3η φορά)}$$

$$\text{για } \kappa = 2: t = T - \frac{T}{8} = \frac{7T}{8} \text{ (4η φορά) στην } \underline{1\text{η} \text{ περίοδο}}$$

Που είναι ίσες:

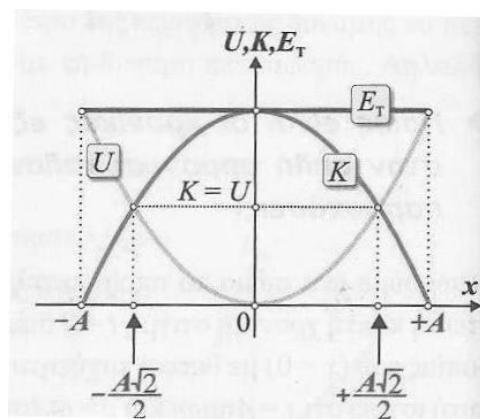
$$E = K + U \Rightarrow E = 2U \Rightarrow \frac{1}{2} D A^2 = 2 \left(\frac{1}{2} D x^2 \right) \Rightarrow x^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2}$$

β) Ενέργειας – απομάκρυνσης

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \text{σταθερή}$$

$$U = \frac{1}{2} D x^2$$

$$E = K + U \Leftrightarrow K = E - U \Leftrightarrow K = E - \frac{1}{2} D x^2$$



γ) Ενέργειας - ταχύτητας

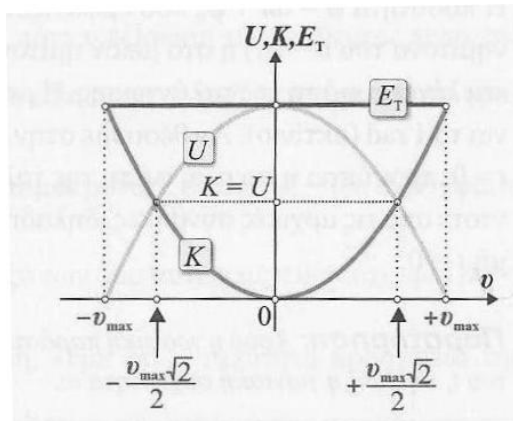
$$E = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \text{σταθ.}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E = K + U \Leftrightarrow$$

$$U = E - K \Leftrightarrow U = E - \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{Όταν } K = U \Rightarrow v = \pm \frac{v_{\max} \sqrt{2}}{2}.$$



Απόδειξη τύπου $v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$ με τη βοήθεια της ενέργειας (Α.Δ.Ε.)

$$\begin{aligned}
 E = K + U &\Leftrightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \\
 &\Leftrightarrow m\omega^2 A^2 = mv^2 + m\omega^2 x^2 \\
 &\Leftrightarrow \omega^2 (A^2 - x^2) = v^2 \\
 &\Leftrightarrow v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}
 \end{aligned}$$

Ρυθμοί μεταβολής

α) Ρυθμός μεταβολής απομάκρυνσης : $\frac{dx}{dt} = v = \dots\dots (\text{m/s})$

β) Ρυθμός μεταβολής ταχύτητας : $\frac{dv}{dt} = a = \dots\dots (\text{m/s}^2)$

γ) Ρυθμός μεταβολής ορμής : $\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -D \cdot x \quad (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \text{ ή } \text{N})$

$$\left(\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{m \cdot dv}{dt} = m \cdot a = \Sigma F = -D \cdot x \right)$$

δ) Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας: $\frac{dK}{dt} = \frac{W_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} = \Sigma F \cdot v = -D \cdot x \cdot v$
(J/s ή W)

ε) Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης:

Αφού $E = \text{σταθ.}$ άρα $dE = 0$

$$E = K + U \Leftrightarrow dE = dK + dU \Leftrightarrow dU = -dK \Leftrightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt}.$$

στ) Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας ενός ελατηρίου:

$$\frac{dU_{ελ}}{dt} = \pm F_{ελ} v \quad (+ \text{ αν δύναμη και ταχύτητα αντίρροπες και } - \text{ αν δύναμη και ταχύτητα ομόρροπες})$$

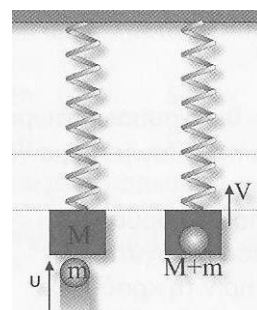
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Στις κρούσεις ισχύει Α.Δ.Ο. (Αρχή Διατήρησης Ορμής)

$$P_{\text{πριν}} = P_{\text{μετά}}$$

Πχ. Πλαστική κρούση (συσσωμάτωμα)

$$\begin{aligned}
 P_{\text{πριν}} &= P_{\text{μετά}} \Leftrightarrow mv = (m + M)V \\
 &\Leftrightarrow V = \frac{m \cdot v}{m + M}
 \end{aligned}$$



(Η μεταβολή της ορμής ενός σώματος εξαιτίας της κρούσης μπορεί να υπολογιστεί από τον αλγεβρικό τύπο $\Delta p = p_{\text{τελ}} - p_{\text{αρχ}} = mu_{\text{τελ}} - mu_{\text{αρχ}}$)

2) ΠΡΟΣΟΧΗ

Οριζόντιο ελατήριο : **ΔΕΝ ΑΛΛΑΖΕΙ ΘΙ.**

Κατακόρυφο ή κεκλιμένο ελατήριο: **ΑΛΛΑΖΕΙ Η ΘΙ.**

3) Το έργο της δύναμης επαναφοράς (συνισταμένη) υπολογίζεται εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση του σώματος:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{\Sigma F}$$

4) $E_{\text{προσφ}} = E_{\text{ταλ}}$

5) $W_{F_{\varepsilon\lambda}} = U_{\alpha\rho\chi(\varepsilon\lambda)} - U_{\tau\epsilon\lambda(\varepsilon\lambda)}$

6) Για τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι: $U = \frac{1}{2} Dx^2$ όπου x η απομάκρυνση

από τη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) της ταλάντωσης, ενώ για τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι: $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} kd^2$ όπου d η επιμήκυνση ή η συσπίερωση του ελατηρίου από το φυσικό μήκος (Φ.Μ.)

Όμοια για τη δύναμη επαναφοράς $\Sigma F = -Dx$ όπου x η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) της ταλάντωσης και για την $F_{\varepsilon\lambda} = kd$ όπου d η επιμήκυνση ή η συσπίερωση του ελατηρίου από το φυσικό μήκος (Φ.Μ.)

7) Χρήσιμες τριγωνομετρικές σχέσεις:

Α) $\eta\mu(\pi/2 + \varphi) = \sigma\upsilon\nu\varphi$ β) $\sigma\upsilon\nu(\pi/2 + \varphi) = -\eta\mu\varphi$

γ) $\eta\mu(\pi + \varphi) = -\eta\mu\varphi$

δ) $\sigma\upsilon\nu(\pi + \varphi) = -\sigma\upsilon\nu\varphi$ ε) $\eta\mu(3\pi/2 + \varphi) = -\sigma\upsilon\nu\varphi$

στ) $\sigma\upsilon\nu(3\pi/2 + \varphi) = \eta\mu\varphi$

Πλαστική κρούση σε κατακόρυφο ελατήριο

1° ΒΗΜΑ

Χρησιμοποιούμε Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση και βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος (V) η οποία θα είναι και η ταχύτητα με την οποία θα ξεκινήσει την ταλάντωσή του το συσσωμάτωμα.

2° ΒΗΜΑ

Κάνουμε σχήμα στο οποίο θα φαίνονται οι εξής θέσεις η μία δίπλα στην άλλη: **ΘΦΜ**, **ΘΙ₁**, **ΘΙ₂**.

Πάνω στο σχήμα θέτουμε x_1 και x_2 τις αποστάσεις **ΘΦΜ** με **ΘΙ₁** και **ΘΦΜ** με **ΘΙ₂**.

ΠΡΟΣΟΧΗ

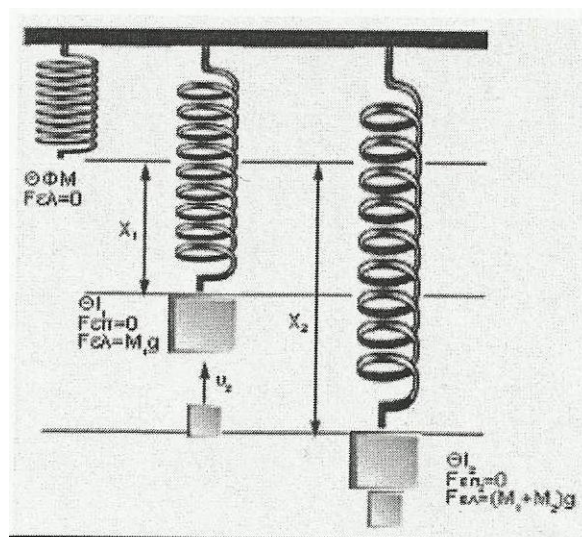
Η **ΘΙ₂** (όπου ισορροπεί το συσσωμάτωμα) θα είναι η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που θα προκύψει μετά την πλαστική κρούση.

3° ΒΗΜΑ

Παίρνουμε $\Sigma F = 0$ για κάθε θέση ισορροπίας ώστε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις x_1 και x_2 :

ΘΙ₁ $\rightarrow \Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = m_1 g \Rightarrow kx_1 = m_1 g \Rightarrow x_1 = m_1 g / k$

ΘΙ₂ $\rightarrow \Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = (m_1 + m_2) g \Rightarrow kx_2 = (m_1 + m_2) g \Rightarrow x_2 = (m_1 + m_2) g / k$



4° ΒΗΜΑ

Κατανοούμε από την εκφώνηση σε ποιο σημείο γίνεται η κρούση ώστε να βρούμε την απόσταση x του σημείου της κρούσης από την ΘI_2 .

ΠΡΟΣΟΧΗ

Αν η κρούση γίνει στη ΘI_1 τότε οι αρχικές συνθήκες είναι:

Για $t = 0 \Rightarrow x = x_2 - x_1$ και $v = V$

5° ΒΗΜΑ

Χρησιμοποιούμε Α.Δ.Ε. για τη χρονική στιγμή $t=0$ ώστε να βρούμε το πλάτος της ταλάντωσης A .

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

6° ΒΗΜΑ

Από τις αρχικές συνθήκες βλέπουμε αν έχουμε αρχική φάση ϕ_0 στην ταλάντωση.

Αν ζητηθεί να αποδείξουμε ότι το σώμα θα εκτελέσει Α.Α.Τ. παίρνουμε τυχαία θέση που απέχει x απόσταση από την ΘI_2 όπου

$$\Sigma F = (m_1 + m_2) g - F_{ελ} = (m_1 + m_2) g - k(x_2 + x) = (m_1 + m_2) g - kx_2 - kx = - kx$$

Άρα Α.Α.Τ. με $D = k$.

$$\text{ΣΗΜΕΙΩΣΗ: } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$$

Απώλεια μηχανικής ενέργειας του συστήματος εξαιτίας της κρούσης:

$$E_{\text{απ}} = K_{\text{ολ(αρχ)}} - K_{\text{ολ(τελ)}}$$

(Αν έχω **κεκλιμένο επίπεδο** λύνουμε την άσκηση ακριβώς με τον ίδιο τρόπο με την μόνη διαφορά ότι εδώ αντί για το βάρος **mg** θα έχουμε τη συνιστώσα του βάρους **$mg \sin \theta$** στον υπολογισμό των αποστάσεων x_1 και x_2).

Απώλεια επαφής σωμάτων σε οριζόντιο ελατήριο

Έστω σώμα 1 που είναι δεμένο στο ελατήριο και ισορροπεί στην $\Theta \Phi M$ και σώμα 2 το οποίο εφάπτεται στο σώμα 1.



Αν συσπειρώσω και τα δύο σώματα κατά d και τα αφήσω ελεύθερα να κινηθούν παρατηρούμε τα εξής:

Το σώμα 1 επιταχύνεται λόγω της $F_{ελ}$ και αυτό με την σειρά του επιταχύνει το σώμα 2. Στην $\Theta \Phi M$ η $F_{ελ}$ μηδενίζεται και στην συνέχεια επιβραδύνει το σώμα 1 (διότι αυτό είναι δεμένο στο ελατήριο).

Άρα η επαφή των σωμάτων χάνεται στη $\Theta \Phi M$ και εκεί το σώμα 2 φεύγει με ταχύτητα $u_{\text{max}} = \omega A$.

$$\text{Για τα δύο σώματα } \omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}} \text{ και } A = d.$$

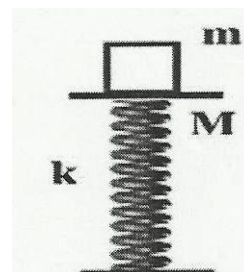
Το σώμα 1 θα εκτελέσει ταλάντωση με διαφορετικό πλάτος A_1 εφόσον αλλάξει το ω

$$(\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}).$$

Το υπολογίζουμε εξισώνοντας τις μέγιστες ταχύτητες των δύο ταλαντώσεων:
 $u_{\max} = u_{\max(1)}$ ή $\omega A = \omega_1 A_1$.

Απώλεια επαφής σωμάτων σε κατακόρυφο ελατήριο

Στην περίπτωση αυτή η αντιμετώπιση της άσκησης έχει να κάνει με τη δύναμη της αντίδρασης (N) του σώματος M προς το σώμα m.
 (Η Θ.Ι. της ταλάντωσης είναι η θέση που ισορροπεί η μάζα M+m)



1° ΒΗΜΑ

Από την εκφώνηση πρέπει να καταλάβουμε το σημείο εκκίνησης της ταλάντωσης και με τι ταχύτητα.

Αν για παράδειγμα μας πουν ότι συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά d και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί τότε οι αρχικές συνθήκες είναι: για $t=0$ έχω $x=d$ και $u=0$.

Στη συνέχεια παίρνουμε Α.Δ.Ε. για τη στιγμή $t=0$ ώστε να βρούμε το πλάτος της ταλάντωσης A (εδώ $A=d$).

2° ΒΗΜΑ

Και τα δύο σώματα εκτελούν Α.Α.Τ. με $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$.

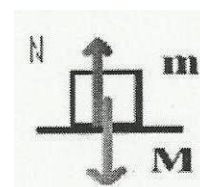
Το πάνω σώμα που έχει μάζα m εκτελεί Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $D_1 = m\omega^2$.

Το κάτω σώμα που έχει μάζα M εκτελεί Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $D_2 = M\omega^2$.

Άρα η συνισταμένη στο m είναι $\Sigma F_1 = -D_1 x = -m \frac{k}{m+M} x$ (1) (όπου x η απόσταση των δύο σωμάτων από τη Θ.Ι.).

3° ΒΗΜΑ

Αν σχεδιάσουμε όμως τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα μάζας m βλέπουμε ότι $\Sigma F_1 = N - mg$ (2)



4° ΒΗΜΑ

Εξισώνουμε τις σχέσεις (1) και (2) και λύνουμε ως προς N:

$$N - mg = -m \frac{k}{m+M} x \Rightarrow N = mg - \frac{k}{m+M} x$$

Προσοχή!!! Για να μην χαθεί η επαφή θα πρέπει $N \geq 0$.

$$\text{Άρα } mg - \frac{k}{m+M} x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{(m+M)g}{k}$$

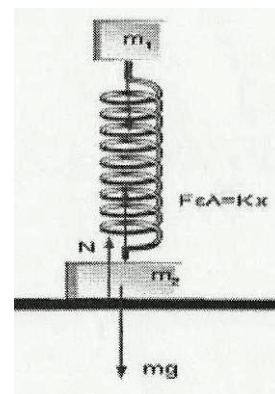
Δηλαδή για να μην χαθεί η επαφή θα πρέπει κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης να μην ξεπερνούν τα σώματα την **ΘΦΜ** διότι η επαφή **ΧΑΝΕΤΑΙ** στην **ΘΦΜ**.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Στο ελατήριο σε κεκλιμένο επίπεδο η μεθοδολογία είναι η ίδια και η μόνη διαφορά είναι ότι αντί για το βάρος $(m+M)g$ θα έχουμε την συνιστώσα του **$(m+M)g \sin \theta$** . Επίσης σαν αντίδραση N θα πάρουμε τη δύναμη που ασκεί το κάτω σώμα στο πάνω σώμα που του εφάπτεται.

ΜΗΝ μπερδευτείτε με την αντίδραση του δαπέδου. Δεν μας ενδιαφέρει αυτή η δύναμη.

Απώλεια επαφής σωμάτων σε κατακόρυφο ελατήριο με το ένα σώμα να εφάπτεται στο πάτωμα

Σε αυτή την περίπτωση ταλάντωση εκτελεί μόνο το σώμα μάζας m_1 ενώ το σώμα μάζας m_2 είναι ακίνητο και εφάπτεται στο δάπεδο.



1° ΒΗΜΑ

Από την εκφώνηση πρέπει να καταλάβουμε το σημείο εκκίνησης της ταλάντωσης και με τι ταχύτητα. Αν για παράδειγμα μας πουν ότι συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά d και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί τότε οι αρχικές συνθήκες είναι: για $t=0$ έχω $x=d$ και $v=0$.

Στη συνέχεια παίρνουμε Α.Δ.Ε. για τη στιγμή $t=0$ ώστε να βρούμε το πλάτος της ταλάντωσης A (εδώ $A=d$).

2° ΒΗΜΑ

Στο σώμα μάζας m_2 θα πρέπει να ισχύει $\Sigma F=0$ εφόσον είναι ακίνητο στο πάτωμα. Οι δυνάμεις που του ασκούνται είναι οι εξής: βάρος, αντίδραση δαπέδου και η δύναμη ελατηρίου η οποία ασκείται και στο σώμα m_1 (όπως φαίνεται στο σχήμα).

Προσοχή!!! Παίρνουμε ΣF για το m_2 όταν το σώμα μάζας m_1 βρίσκεται ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΤΗ ΘΦΜ σε απόσταση x από αυτή.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N + F_{ελ} - m_2 g = 0 \Rightarrow N = m_2 g - F_{ελ} \Rightarrow N = m_2 g - kx$$

(τονίζω ότι μιλάμε για την $F_{ελ} = kx$, όπου x η απόσταση του σώματος m_1 από την ΘΦΜ).

3° ΒΗΜΑ

Για να μην χαθεί η επαφή του m_2 με το δάπεδο θα πρέπει να ισχύει

$$N \geq 0 \Rightarrow m_2 g - kx \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{m_2 g}{k}.$$

Δηλαδή θα πρέπει το m_1 κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του να μην ανεβαίνει

περισσότερο από $\frac{m_2 g}{k}$ πάνω από την ΘΦΜ.

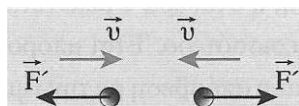
Άρα η επαφή χάνεται όταν το σώμα φτάσει σε απόσταση $x = \frac{m_2 g}{k}$ πάνω από τη ΘΦΜ.

ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Η ταλάντωση στην οποία το πλάτος, μειώνεται συνέχεια γιατί στο σύστημα που εκτελεί ταλάντωση ασκούνται μη συντηρητικές δυνάμεις (τριβές – αντιστάσεις) που του αφαιρούν ενέργεια, λέγεται **φθίνουσα ταλάντωση**.

Οι δυνάμεις που μας ενδιαφέρουν είναι της μορφής

$$F' = -b \cdot v$$



Άρα η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση του σώματος :

- Έχει μέτρο που είναι ανάλογο του μέτρου της ταχύτητας.
- Κάθε στιγμή έχει αντίθετη κατεύθυνση με την ταχύτητα.

Το **b** είναι μια σταθερά που λέγεται **σταθερά απόσβεσης** ($\frac{kg}{s}$).

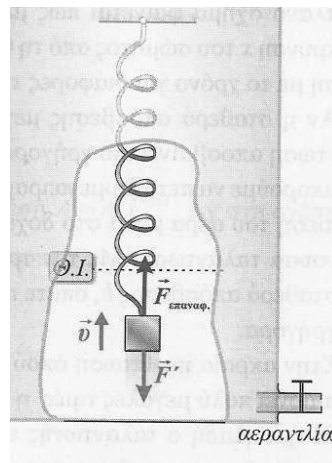
Η σταθερά **b** **εξαρτάται**:

- 1) Τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο γίνεται η ταλάντωση.
- 2) Το σχήμα και το μέγεθος του σώματος που ταλαντώνεται.

Όσο το **b** μεγαλώνει, τόσο το μέτρο της F' μεγαλώνει άρα τόσο πιο γρήγορα μειώνεται το πλάτος (ο ρυθμός μείωσης του πλάτους αυξάνει).

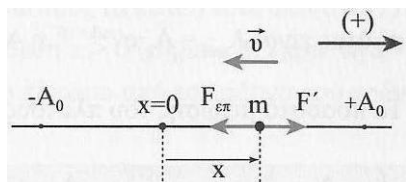
Στο παράδειγμα του σχήματος με μια αεραντλία μπορούμε να μεταβάλλουμε την πίεση του αέρα στο δοχείο.

Έτσι μπορούμε να δούμε πως εξαρτάται η απόσβεση του πλάτους με την τιμή της σταθεράς **b** (αυξάνοντας την πίεση αυξάνεται η σταθερά **b**).



Στο σώμα που κάνει ταλάντωση ασκούνται:

- Η δύναμη επαναφοράς $F_{επαν} = -D \cdot x$.
- Η δύναμη $F' = -b \cdot v$ που αντιτίθεται στην κίνηση.



Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{F}_{επαν} + \vec{F}' = m \cdot \vec{\alpha} \Rightarrow$$

$$-D \cdot x - b \cdot v = m \cdot \alpha \Rightarrow$$

$$m \cdot \alpha + b \cdot v + D \cdot x = 0$$

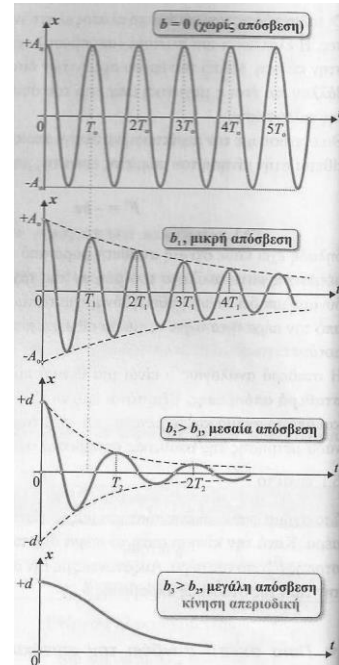
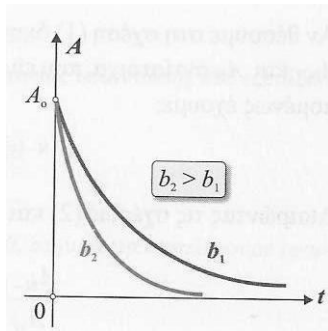
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται πως μεταβάλλεται η απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο για διάφορες τιμές της σταθεράς b .

Ισχύουν τα παρακάτω:

Α) Στην ιδανική περίπτωση όπου $b=0$, η ταλάντωση είναι αμείωτη.

Β) Η περίοδος, για ορισμένη τιμή του b , διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη από το πλάτος, παρ' όλο που το πλάτος μειώνεται.

Γ) Όσο η τιμή του b μεγαλώνει το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα.



Δ) Σε ακραίες περιπτώσεις στις οποίες η σταθερά b παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, η κίνηση γίνεται αperiοδική, δηλαδή, ο ταλαντωτής, επιστρέφει στη θέση ισορροπίας χωρίς ποτέ να την υπερβεί (ταλάντωση σε παχύρρευστο υγρό).

Ε) Όταν η σταθερά b μεγαλώνει, παρατηρείται μικρή αύξηση της περιόδου (δηλ. αν $b_2 > b_1$ τότε $T_2 > T_1$) άρα μικρή μείωση της συχνότητας.

Στ) Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Ισχύει δηλαδή η σχέση:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \text{ με } t = k \cdot T, (k=0,1,2,\dots)$$

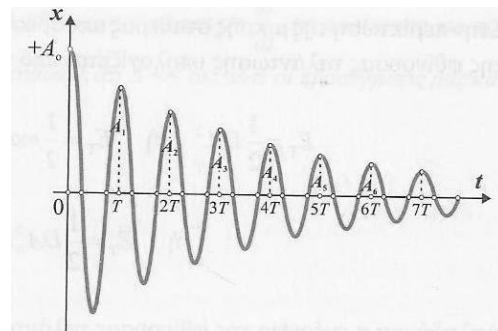
Το A_0 είναι το πλάτος τη στιγμή $t_0=0$ (αρχικό πλάτος).

Το Λ (s^{-1}) είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης b και τη μάζα του ταλαντούμενου σώματος ($\Lambda = \frac{b}{2m}$).

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο λόγος δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση διατηρείται σταθερός, δηλαδή

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \text{σταθ}.$$

όπου A_0 το αρχικό πλάτος, A_1 το πλάτος στο τέλος της 1ης περιόδου, A_2 το πλάτος



στο τέλος της 2ης περιόδου, A_3 το πλάτος στο τέλος της 3ης περιόδου κ.ο.κ.

Απόδειξη:

Το πλάτος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \quad (1).$$

Αν θέσουμε στη σχέση (1) όπου

$t = (N-1)T$ και $t = NT$, προκύπτουν οι διαδοχικές τιμές του πλάτους

$$A_{N-1} = A_0 e^{-\Lambda(N-1)T} \text{ και } A_N = A_0 e^{-\Lambda NT}.$$

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{A_{N-1}}{A_N} = \frac{A_0 e^{-\Lambda(N-1)T}}{A_0 e^{-\Lambda NT}} = e^{-\Lambda(N-1)T + \Lambda NT} = e^{\Lambda T} = \text{σταθ. για κάθε } N=1,2,\dots$$

Δηλαδή το **πηλίκο δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων** προς την ίδια κατεύθυνση είναι σταθερό και ίσο με $e^{\Lambda T}$. Δηλαδή:

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \dots = \frac{A_{N-1}}{A_N} = e^{\Lambda T} = \text{σταθ.}$$

Αν $E_0 = \frac{1}{2} D A_0^2$ η αρχική ενέργεια μιας φθίνουσας ταλάντωσης, η ενέργεια που έχει απομείνει στο σύστημα τη στιγμή t θα είναι:

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D (A_0 e^{-\Lambda t})^2 = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t} \text{ με } t=k \cdot T, (k=0,1,2,\dots)$$

Ισχύει:

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{E_1}{E_2} = \dots = \frac{E_{N-1}}{E_N} = e^{2\Lambda T} = \text{σταθ.}$$

όπου E_0 η αρχική ενέργεια, E_1 η ενέργεια στο τέλος της 1ης περιόδου, E_2 η ενέργεια στο τέλος της 2ης περιόδου, E_3 η ενέργεια στο τέλος της 3ης περιόδου κ.ο.κ.

Απόδειξη:

Για $t = (N-1)T$ και $t = NT$, έχουμε:

$$\frac{E_{N-1}}{E_N} = \frac{E_0 e^{-2\Lambda(N-1)T}}{E_0 e^{-2\Lambda NT}} = e^{-2\Lambda(N-1)T + 2\Lambda NT} = e^{2\Lambda T} = \text{σταθ}$$

Σε κάθε φθίνουσα ταλάντωση η απώλεια ενέργειας οφείλεται στο έργο της δύναμης αντίστασης στην κίνηση $\vec{F}'$ δηλαδή ισχύει:

$$\mathbf{W}_{F'} = \mathbf{E}_{\text{τελ}} - \mathbf{E}_{\text{αρχ}} < 0$$

Η απώλεια ενέργειας είναι $E_{\text{απωλ}} = E_{\text{αρχ}} - E_{\text{τελ}} > 0$.

Ο ρυθμός μεταβολής (απώλειας) ενέργειας της φθίνουσας ταλάντωσης ισούται με:

$$\frac{dE}{dt} = P_{F'} = F' v \Rightarrow \frac{dE}{dt} = (-bv)v \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -bv^2.$$

- Το ποσό της ενέργειας που χάνεται ανά περίοδο ΔE_N είναι σταθερό.
- Το ποσοστό της ενέργειας που χάνεται ανά περίοδο είναι σταθερό.

- **Ποσοστό** μείωσης πλάτους (ή της ενέργειας).

Για αρχικό πλάτος A_0 έχουμε μείωση $A_0 - A$
 $\gg \quad \quad \quad 100 \quad \quad \quad x \ ;$

$$x = \frac{A_0 - A}{A_0} \cdot 100 \ %.$$

- Χρόνος ημιζωής ($t_{1/2}$) του πλάτους είναι ο χρόνος στον οποίο το πλάτος της ταλάντωσης υποδιπλασιάζεται, δηλαδή γίνεται $A = \frac{A_0}{2}$.

Από τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ για $A = \frac{A_0}{2}$ έχουμε:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_{1/2}} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\Lambda t_{1/2}}$$

$$\ln 1 - \ln 2 = -\Lambda t_{1/2} \ln e \Rightarrow 0 - \ln 2 = -\Lambda t_{1/2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ φθίνουσας ταλάντωσης είναι το **αμορτισέρ του αυτοκινήτου**. Όταν το αυτοκίνητο περνάει από μια ανωμαλία του δρόμου, αρχίζει να ταλαντώνεται. Οι αναρτήσεις πρέπει να έχουν την κατάλληλη σταθερά απόσβεσης b , ώστε το πλάτος της ταλάντωσης να μειώνεται γρήγορα. Καθώς τα αμορτισέρ παλιώνουν και φθείρονται, η τιμή του b μειώνεται και η ταλάντωση διαρκεί περισσότερο. Η φθορά αυτή μειώνει την ασφάλεια, επειδή οι ρόδες έχουν λιγότερη επαφή με το έδαφος.

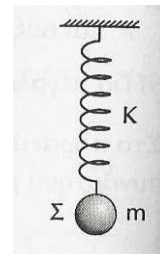
ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Αν το σφαιρίδιο του σχήματος εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του και αφεθεί ελεύθερο θα εκτελέσει κατακόρυφη ταλάντωση. Αν δεν υπάρχουν αντιστάσεις η ταλάντωση θα είναι αμείωτη, με συχνότητα

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Στην πραγματικότητα η ταλάντωση θα είναι φθίνουσα. Η συχνότητά της θα είναι λίγο μικρότερη, στην πράξη όμως μπορούμε να τη θεωρήσουμε ίση με την f_0 .

Μια τέτοια ταλάντωση λέγεται **ελεύθερη ταλάντωση** και η συχνότητα με την οποία πραγματοποιείται λέγεται **ιδιοσυχνότητα** (f_0) της ταλάντωσης.

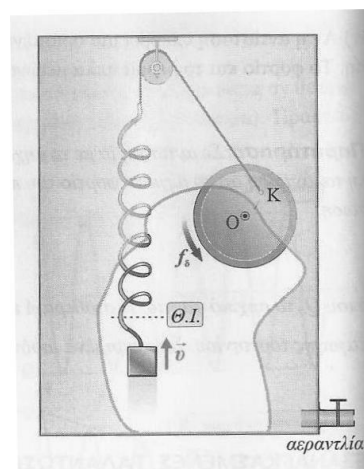


Αν θέλουμε να διατηρείται σταθερό το πλάτος της ταλάντωσης πρέπει να ασκήσουμε στο σύστημα μια περιοδική δύναμη, μια **διεγείρουσα δύναμη**. Δηλαδή διατηρείται σταθερή η μηχανική ενέργεια της ταλάντωσης αφού αναπληρώνονται οι ενεργειακές απώλειες.

Οι παραπάνω ταλαντώσεις ονομάζονται **εξαναγκασμένες**.

Η διεγείρουσα δύναμη είναι της μορφής:

$$F_\delta = F_0 \eta \mu(\omega_\delta t).$$



Όταν ένα σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση, τότε ασκούνται πάνω του τρεις δυνάμεις.

A) Η δύναμη επαναφοράς $F_{\epsilon\pi} = -Dx$.

B) Η δύναμη απόσβεσης $F_{\alpha\pi} = -bv$.

Γ) Η διεγείρουσα δύναμη F_δ , η οποία ασκείται στο σώμα από το διεγέρτη με μια συχνότητα που λέγεται συχνότητα διέγερσης f_δ .

Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για μια εξαναγκασμένη ταλάντωση έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{\epsilon\pi\alpha\nu} + \vec{F}_{\alpha\pi} + \vec{F}_\delta = m \cdot \vec{a} \Rightarrow$$

$$-D \cdot x - b \cdot v + F_\delta = m \cdot a$$

Παράδειγμα εξαναγκασμένης ταλάντωσης έχουμε στη διάταξη του σχήματος όπου ο τροχός (διεγέρτης) περιστρέφεται με σταθερή συχνότητα (συχνότητα του διεγέρτη) και το σύστημα μάζα – ελατήριο ταλαντώνεται μέσα σε δοχείο με αέριο.

Χαρακτηριστικά μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

A) Η συχνότητα της μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι πάντα ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη.

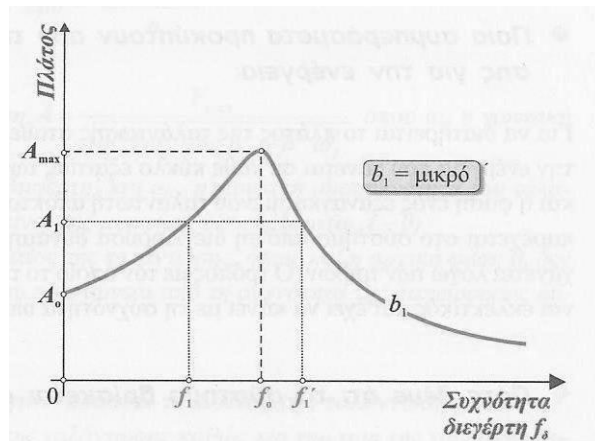
B) Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης εξαρτάται από τη συχνότητα του διεγέρτη και γίνεται μέγιστο, όταν η συχνότητα του διεγέρτη γίνεται ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 .

Γ) Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι σταθερό όσο η συχνότητα του δε μεταβάλλεται.

Δ) **Συντονισμό** έχουμε όταν η f_δ γίνεται ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του ταλαντωτή, με συνέπεια το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης να γίνεται μέγιστο.

Ε) Κατά το συντονισμό, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης γίνεται μέγιστο, γιατί ο ταλαντωτής απορροφά ενέργεια από το διεγέρτη κατά το βέλτιστο τρόπο.

Η γραφική παράσταση δείχνει την εξάρτηση του πλάτους μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης από τη συχνότητα του διεγέρτη. Παρατηρήστε ότι το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης γίνεται μέγιστο όταν η f_δ γίνεται ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 του ταλαντωτή.



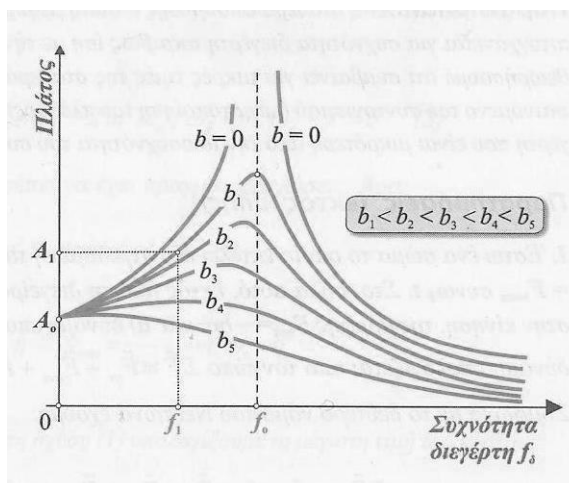
Αν αυξηθεί η σταθερά απόσβεσης, μειώνεται το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης για οποιαδήποτε συχνότητα του διεγέρτη.

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του πλάτους σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη για διάφορες τιμές του b .

Αν η σταθερά απόσβεσης είναι 0, το πλάτος στο συντονισμό γίνεται άπειρο. Για μικρές τιμές του b το πλάτος της ταλάντωσης μεγιστοποιείται όταν η συχνότητα του διεγέρτη (άρα και η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος) γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα f_0 .

Για πολύ μεγάλες σταθερές απόσβεσης δεν παρατηρείται το φαινόμενο της μεγιστοποίησης του πλάτους για κάποια συχνότητα.

Για μεγάλες τιμές του b το φαινόμενο συντονισμού επιτυγχάνεται για κάποια τιμή της συχνότητας του διεγέρτη που είναι μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα του συστήματος.



Το πλάτος A_0 είναι το πλάτος της αμείωτης ταλάντωσης που θα εκτελούσε το σύστημα αν η συχνότητα του διεγέρτη και η σταθερά απόσβεσης είναι 0. Στην περίπτωση του τροχού $A_0 = (OK)$.

Σε **μόνιμη κατάσταση** η ενέργεια ανά περίοδο που παρέχεται από το διεγέρτη (μέση ισχύς) είναι ίση με αυτήν που χάνεται λόγω τριβών.

Ο ρυθμός μεταβολής (απώλειας) ενέργειας ισούται με:

$$\frac{dE}{dt} = P_F = F'v \Rightarrow \frac{dE}{dt} = (-bv)v \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -bv^2.$$

Άρα ο ρυθμός προσφοράς ενέργειας είναι:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{προσφοράς}} = -(-bv^2) = bv^2$$

Παρατήρηση: Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση η ισότητα $K_{\max} = U_{\max}$ ισχύει μόνο στην περίπτωση που το σώμα βρίσκεται στον συντονισμό ($f_{\delta} = f_0$).

Πράγματι:

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}m\omega_{\delta}^2 A^2 \text{ και } U_{\max} = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2.$$

Είναι φανερό πως όταν $\omega_{\delta} \neq \omega_0$ (άρα και $f_{\delta} \neq f_0$), είναι και $K_{\max} \neq U_{\max}$