

ΚΡΟΥΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Έργο σταθερής δύναμης.

Όταν το σημείο εφαρμογής μιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$ μετατοπίζεται κατά s η δύναμη $\vec{F}$ παράγει έργο W που δίνεται από τη σχέση:

$$W = Fs \cos \varphi$$

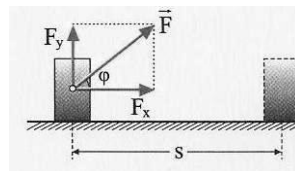
όπου φ η γωνία που σχηματίζει η κατεύθυνση της δύναμης με την κατεύθυνση της μετατόπισης.

Α) Όταν $\varphi = 0^\circ$ ή $\cos \varphi = 1$, τότε έχουμε: $W = Fs > 0$.

Β) Όταν $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, τότε έχουμε: $W = Fs \cos \varphi > 0$ (παραγόμενο έργο).

Γ) Όταν $\varphi = 90^\circ$ ή $\cos \varphi = 0$, τότε έχουμε: $W = 0$.

Η δύναμη που είναι κάθετη στη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δεν παράγει έργο.

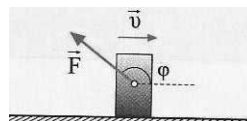
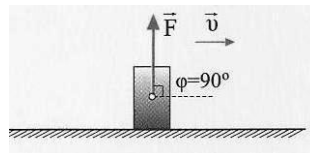


Δ) Όταν $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ ή $\cos \varphi < 0$, τότε έχουμε:

$W = Fs \cos \varphi < 0$ (καταναλισκόμενο έργο).

Ε) Όταν $\varphi = 180^\circ$ ή $\cos \varphi = -1$, τότε έχουμε:

$W = -Fs < 0$.



Το έργο της **τριβής ολίσθησης** αφαιρεί πάντα ενέργεια από το σώμα και τη μεταβιβάζει σε σώματα του περιβάλλοντος, όπου μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια Q (θερμότητα). Δηλ.

$$Q = |W_T| = |-T \cdot x| = T \cdot x.$$

Το **έργο του βάρους** είναι ίσο με το γινόμενο του βάρους επί την κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος. Δηλαδή:

$$W_B = \pm m \cdot g \cdot h$$

όπου h η υψομετρική διαφορά της αρχικής και της τελικής θέσης του σώματος.

Το (+) όταν το σώμα κατεβαίνει και το (-) όταν ανεβαίνει.

Θεώρημα Έργου - Ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) που γράφεται ως εξής:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W$$

Η **Α.Δ.Μ.Ε.** εφαρμόζεται όταν οι δυνάμεις που ασκούνται και παράγουν έργο είναι **συντηρητικές δυνάμεις** (π.χ. βάρος, δύναμη ελατηρίου).

$$E_{\text{μηχ(αρχ)}} = E_{\text{μηχ(τελ)}} \Rightarrow K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}}$$

Βέβαια πριν την εφαρμογή της παραπάνω σχέσης, πρέπει να επιλέξουμε ένα οριζόντιο επίπεδο ως επίπεδο αναφοράς ($U = 0$).

Ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας ενός σώματος.

$$\frac{dU}{dt} = \pm mgv$$

(+ όταν η κίνηση του σώματος είναι προς τα πάνω, - όταν η κίνηση του σώματος είναι προς τα κάτω).

Ρυθμός παραγωγής θερμότητας λόγω τριβής.

$$\frac{dQ}{dt} = T v \text{ (είναι πάντοτε θετικός).}$$

Ορμή

Η ορμή ενός σώματος μάζας m , το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$, ορίζεται από τη σχέση: $\vec{p} = m\vec{v}$ ($kg \cdot m/s$).

Σχέση κινητικής ενέργειας με ορμή

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow K = \frac{m^2v^2}{2m} \Rightarrow K = \frac{p^2}{2m}.$$

Ορμή συστήματος σωμάτων.

Αν δύο σώματα έχουν ορμές $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ η ολική ορμή τους είναι $\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.

A	
B	
Γ	
Δ	

$$A) \vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow p_{ολ} = p_1 + p_2.$$

$$B) \vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow p_{ολ} = p_1 - p_2 \text{ αν } p_1 > p_2.$$

$$Γ) \vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow p_{ολ} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

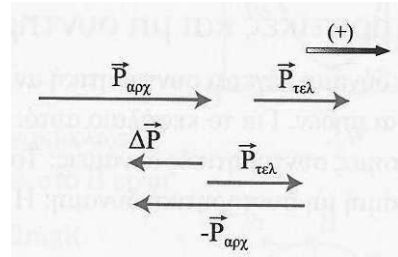
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{p_2}{p_1} \text{ (διεύθυνση της } \vec{p}_{ολ} \text{).}$$

$$Δ) \vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow p_{ολ} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{p_2 \eta \mu \theta}{p_1 + p_2 \sigma \nu \theta} \quad (\text{διεύθυνση της } \dot{p}_{ολ}).$$

Η **μεταβολή της ορμής ενός σώματος** εξαιτίας της κρούσης μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\Delta \dot{p} = \dot{p}_{τελ} - \dot{p}_{αρχ} \Rightarrow \Delta \dot{p} = \dot{p}_{τελ} + (-\dot{p}_{αρχ}).$$



Ρυθμός μεταβολής ορμής : $\frac{d\dot{p}}{dt} = \Sigma \vec{F}$ (kg·m/s² ή N).

Εξωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωμάτων λέγονται οι δυνάμεις που ασκούνται σε σώματα του συστήματος από σώματα που δεν ανήκουν στο σύστημα. Αν ένα σύστημα είναι **μονωμένο** (δηλ. δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις ή αν ασκούνται έχουν συνισταμένη μηδέν), τότε ισχύει η **Α.Δ.Ο.**

(Αρχή Διατήρησης Ορμής) : $p_{ολ(πριν)} = p_{ολ(μετά)}$

ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Όταν δύο σώματα πλησιάζουν το ένα το άλλο και αλληλεπιδρούν, η κινητική κατάστασή τους ή τουλάχιστον του ενός από αυτά μεταβάλλεται απότομα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε **κρούση**.

Κρούση λέμε τη σύγκρουση δύο σωμάτων που κινούνται το ένα σχετικά με το άλλο. Για την κρούση δεχόμαστε:

Α) Διάρκει αμελητέο χρόνο ($\Delta t = 0$)

Β) Ολοκληρώνεται στο ίδιο σημείο.

Γ) Αναπτύσσονται μεταξύ των σωμάτων πολύ ισχυρές δυνάμεις που έχουν σχέση **δράσης – αντίδρασης**. Οι δυνάμεις αυτές είναι πολύ πιο ισχυρές από τυχόν εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα κατά τη διάρκεια της κρούσης (π.χ. βάρος).

Στο μικρόκοσμο (ατομική και πυρηνική φυσική) η έννοια της κρούσης έχει επεκταθεί, ώστε να περιλαμβάνει αλληλεπιδράσεις φορτισμένων σωματιδίων χωρίς τα σωματίδια αυτά να έρχονται σε επαφή μεταξύ τους.

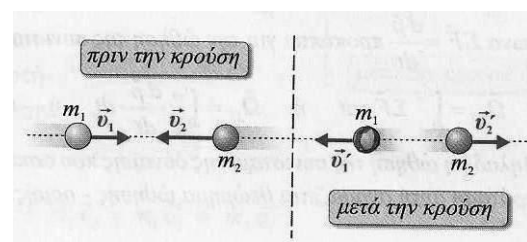
Για παράδειγμα, όταν ένα σωματίο α (πυρήνας He) κινείται προς έναν αρχικά ακίνητο πυρήνα, η δύναμη αλληλεπίδρασης γίνεται πολύ ισχυρή όταν τα δύο σώματα πλησιάσουν σε μικρή απόσταση μεταξύ τους, με αποτέλεσμα την απότομη αλλαγή της κινητικής τους κατάστασης. Το φαινόμενο αυτό στη σύγχρονη φυσική ονομάζεται **σκέδαση**.

Διάκριση των κρούσεων ανάλογα με τη διεύθυνση στην οποία κινούνται τα σώματα πριν την κρούση τους.

Α) Κεντρική (ή μετωπική) κρούση.

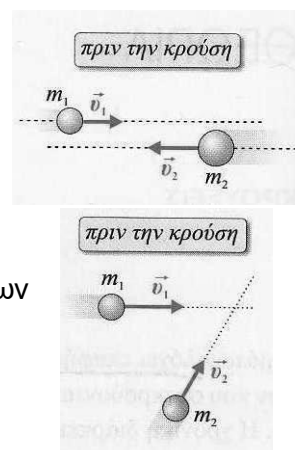
Είναι η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

Στην περίπτωση της κεντρικής κρούσης



δύο σφαιρών, τα διανύσματα των ταχυτήτων των σφαιρών πριν και μετά την κρούση βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

Β) Έκκεντρη ονομάζεται η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται έχουν ίδια διεύθυνση, χωρίς όμως να βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.



Γ) Πλάγια ονομάζεται η κρούση κατά την οποία οι ταχύτητες των σωμάτων πριν την κρούση έχουν τυχαίες διευθύνσεις.

Κατά τη σύγκρουση δύο σωμάτων, επειδή η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κατά τη διάρκειά της η θέση των σωμάτων στο χώρο και επομένως **η δυναμική τους ενέργεια δε μεταβάλλεται.**

Κατά συνέπεια, η οποιαδήποτε μεταβολή στη μηχανική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται οφείλεται σε **μεταβολή της κινητικής τους ενέργειας.** Έτσι έχουμε:

Διάκριση των κρούσεων ανάλογα με το αν διατηρείται ή όχι η κινητική ενέργεια του συστήματος.

Α) **Ελαστική κρούση** ονομάζεται η κρούση στην οποία η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται παραμένει σταθερή.

$$K_{ολ(αρχ)} = K_{ολ(τελ)}$$

Στο μακρόκοσμο η ελαστική κρούση αποτελεί μια εξιδανίκευση (όπως η κρούση ανάμεσα σε δύο μπάλες του μπιλιάρδου).

Στο μικρόκοσμο έχουμε απολύτως ελαστικές κρούσεις.

Β) **Ανελαστική κρούση** ονομάζεται η κρούση στην οποία ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται αποδίδεται τελικά στο περιβάλλον με τη μορφή θερμότητας.

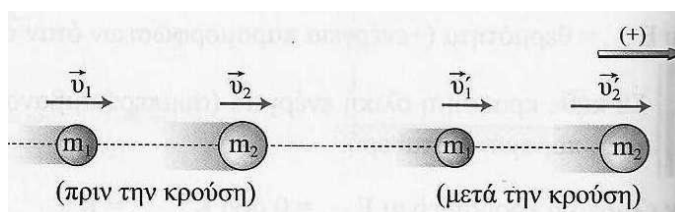
$$K_{ολ(αρχ)} = K_{ολ(τελ)} + E_{απωλ}$$

όπου $E_{απωλ}$ είναι η απώλεια κινητικής ενέργειας του συστήματος.

Μια ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης είναι εκείνη οδηγεί στη δημιουργία συσσωματώματος, δηλ. έχουμε πλαστική κρούση.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΚΡΟΥΣΗΣ ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ

Δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 και ταχύτητες $\dot{v}_1$ και $\dot{v}_2$ αντίστοιχα κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Θα υπολογίσουμε τις ταχύτητες $\dot{v}'_1$ και $\dot{v}'_2$ των σφαιρών αμέσως μετά την κρούση.



Από την **A.Δ.Ο.** έχουμε:

$$P_{ολ(πριν)} = P_{ολ(μετά)} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (1)$$

Έχουμε ελαστική κρούση άρα η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται:

$$K_{ολ(αρχ)} = K_{ολ(τελ)} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (2)$$

Από την (1) έχουμε:

$$m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_2' - m_2 v_2 \Rightarrow m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \quad (3)$$

Από την (2) έχουμε:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \Rightarrow m_1 v_1^2 - m_1 v_1'^2 = m_2 v_2'^2 - m_2 v_2^2 \Rightarrow m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

και τελικά:

$$m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \quad (4)$$

Διαιρούμε (4) : (3) οπότε: $v_1 + v_1' = v_2' + v_2$ (5)

Η σχέση (5) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για να αποδείξουμε ότι η κρούση δύο σφαιρών είναι **ελαστική**.

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (5) ως προς v_1' και v_2' και βρίσκουμε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (6) \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \quad (7)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στους παραπάνω τύπους αντικαθιστούμε πάντα τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων.

Για παράδειγμα, αν πριν την κρούση η σφαίρα Σ_2 κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου $10m/s$, στους τύπους αντικαθιστούμε όπου $v_2 = -10m/s$.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Α) Όταν $m_1 = m_2$ από τους τύπους (6) και (7) έχουμε:

$$v_1' = v_2 \quad (8) \quad \text{και} \quad v_2' = v_1 \quad (9)$$

Κατά την κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών με ίσες μάζες, οι σφαίρες **ανταλλάσσουν** ταχύτητες.

Β) Όταν η σφαίρα Σ_2 είναι ακίνητη ($v_2 = 0$) τότε:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (10) \quad \text{και} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (11)$$

Γ) Η σφαίρα Σ_1 με μάζα m_1 κινείται με ταχύτητα v_1 και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 που έχει μάζα $m_2 \gg m_1$ (η μάζα του m_2 είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα του m_1).

Διαιρούμε τους αριθμητές και τους παρονομαστές των κλασμάτων (10) και (11) με τη μάζα m_2 :

$$v'_1 = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_1 \quad \text{και} \quad v'_2 = \frac{2 \frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_1.$$

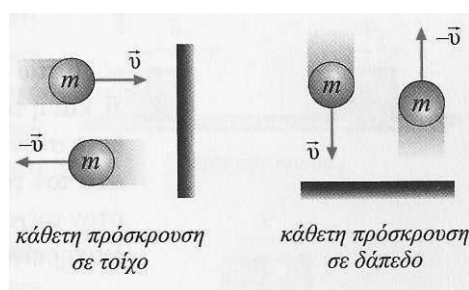
Αφού $m_2 \gg m_1$ το κλάσμα $\frac{m_1}{m_2}$ τείνει προς το μηδέν.

Επομένως: $v'_1 = -v_1$ (12) και $v'_2 = 0$ (13)

Δηλαδή μετά την κρούση η αρχικά ακίνητη σφαίρα παραμένει ακίνητη, ενώ η άλλη σφαίρα γυρίζει προς τα πίσω με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα.

Αν μια σφαίρα συγκρουστεί κάθετα και ελαστικά με λείο τοίχο ή δάπεδο, ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτή που είχε πριν την κρούση.

Δηλαδή: $\vec{v}' = -\vec{v}$



Δ) Η σφαίρα Σ_1 με μάζα m_1 κινείται με ταχύτητα v_1 και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 που έχει μάζα $m_2 \ll m_1$ (η μάζα του m_1 είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα του m_2).

Διαιρούμε τους αριθμητές και τους παρονομαστές των κλασμάτων (10) και (11) με τη μάζα m_1 :

$$v'_1 = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_1 \quad \text{και} \quad v'_2 = \frac{2 \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_1.$$

Αφού $m_1 \gg m_2$ το κλάσμα $\frac{m_2}{m_1}$ τείνει προς το μηδέν.

Επομένως: $v'_1 = v_1$ (14) και $v'_2 = 2v_1$ (15)

Δηλαδή μετά την κρούση η κινούμενη σφαίρα μεγάλης μάζας συνεχίζει να κινείται με την ίδια ταχύτητα, ενώ η αρχικά ακίνητη σφαίρα μικρής μάζας αποκτά ταχύτητα που έχει διπλάσιο μέτρο από την ταχύτητα του σώματος μεγάλης μάζας.

Ε) ΣΦΑΙΡΑ ΠΡΟΣΚΡΟΥΕΙ ΠΛΑΓΙΑ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΣΕ ΛΕΙΟ ΤΟΙΧΟ

Στην περίπτωση αυτή η σφαίρα ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.

Η μικρή σφαίρα κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ και προσκρούει ελαστικά και πλάγια σε κατακόρυφο τοίχο. Για να μελετήσουμε την κρούση, αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{v}$ σε συνιστώσες $\vec{v}_x$ και $\vec{v}_y$. Η συνιστώσα $\vec{v}_x$ είναι κάθετη στον τοίχο και επομένως θα αλλάξει φορά χωρίς να μεταβληθεί το μέτρο της. Δηλαδή $\vec{v}_x' = -\vec{v}_x$.

Η σφαίρα δέχεται από τον τοίχο δύναμη $\vec{F}$ που είναι κάθετη σε αυτόν. Επομένως η συνιστώσα $\vec{v}_y$ δε μεταβάλλεται, αφού δεν ασκείται δύναμη στη διεύθυνσή της. Δηλαδή $\vec{v}_y' = \vec{v}_y$.

Για το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας μετά την κρούση ισχύει:

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} \quad \text{ή} \quad v' = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{και τελικά} \quad v' = v.$$

Αν θ_π και θ_α οι γωνίες που σχηματίζουν οι ταχύτητες $\vec{v}$ και $\vec{v}'$ αντίστοιχα με την κάθετη στον τοίχο, ισχύει:

$$\eta \mu \theta_\pi = \frac{v_y}{v} \quad \text{και} \quad \eta \mu \theta_\alpha = \frac{v_y'}{v'}.$$

Όμως $v_y = v_y'$ και $v = v'$.

Επομένως $\eta \mu \theta_\pi = \eta \mu \theta_\alpha$ και τελικά: $\theta_\pi = \theta_\alpha$.

Όταν το σώμα προσκρούει **κάθετα** στον τοίχο, η μεταβολή της ορμής του είναι:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta p = m\vec{v}' - m\vec{v} \Rightarrow \Delta p = -mv - mv \Rightarrow \Delta p = -2mv.$$

Όταν το σώμα προσκρούει **πλάγια** σε κατακόρυφο τοίχο, η μεταβολή της ορμής του είναι:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{p}'_x - \vec{p}_x \Rightarrow \Delta \vec{p} = m\vec{v}'_x - m\vec{v}_x \Rightarrow$$

$$\Delta p = -mv_x - mv_x \Rightarrow \Delta p = -2mv_x$$

Υπολογισμός της απώλειας μηχανικής ενέργειας σε μια ανελαστική κρούση

Η απώλεια μηχανικής ενέργειας σε μια ανελαστική κρούση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_{\text{απωλ}} = E_{\text{μηχ,αρχ}} - E_{\text{μηχ,τελ}} \Rightarrow E_{\text{απωλ}} = K_{\text{συστ,αρχ}} - K_{\text{συστ,τελ}}.$$

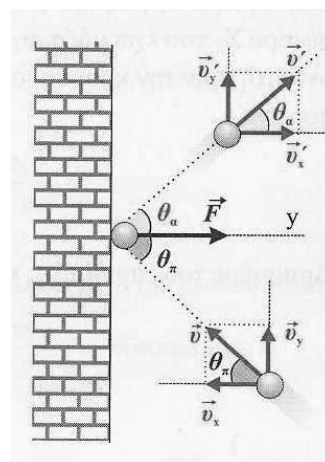
Το ποσοστό απώλειας υπολογίζεται:

$$\pi\% = \frac{E_{\text{απωλ}}}{K_{\text{συστ,αρχ}}} \cdot 100\% \Rightarrow \pi\% = \left(1 - \frac{K_{\text{συστ,τελ}}}{K_{\text{συστ,αρχ}}} \right) \cdot 100\%.$$

Παρατηρήσεις

Α) Σε **κάθε κρούση** δύο σωμάτων κατά την οποία ισχύει $\vec{p}_{\text{συστ,αρχ}} = \vec{p}_{\text{συστ,τελ}}$ η μεταβολή της ορμής του ενός σώματος είναι αντίθετη της μεταβολής της ορμής του άλλου. Δηλαδή:

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2.$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Από την **Α.Δ.Ο.** έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{συστ,αρχ}} &= \vec{p}_{\text{συστ,τελ}} \Rightarrow \vec{p}_{1,\alpha\rho\chi} + \vec{p}_{2,\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{1,\tau\epsilon\lambda} + \vec{p}_{2,\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \\ p_{1,\alpha\rho\chi} - p_{1,\tau\epsilon\lambda} &= p_{2,\tau\epsilon\lambda} - p_{2,\alpha\rho\chi} \Rightarrow -\Delta \vec{p}_1 = \Delta \vec{p}_2 \Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \end{aligned}$$

Β) Αφού η κρούση των σφαιρών είναι **ελαστική**, ισχύει η διατήρηση της κινητικής ενέργειας. Δηλαδή:

$$K_{\text{συστ,αρχ}} = K_{\text{συστ,τελ}} \Rightarrow K_{1,\alpha\rho\chi} + K_{2,\alpha\rho\chi} = K_{1,\tau\epsilon\lambda} + K_{2,\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\Delta K_1 = -\Delta K_2$$

Επομένως, σε κάθε **ελαστική** κρούση δύο σφαιρών, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της μιας σφαίρας είναι αντίθετη με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας της άλλης σφαίρας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΡΟΥΣΕΩΝ

Παράδειγμα 1

Το μικρό σώμα Σ μάζας m_1 κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα $\vec{v}_1$ και συγκρούεται μετωπικά και **ελαστικά** με το ακίνητο σφαιρίδιο ενός απλού εκκρεμούς, το οποίο έχει μάζα m_2 και μήκος ℓ .

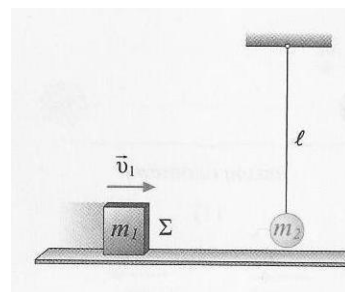
Μετά την κρούση το σφαιρίδιο του εκκρεμούς εκτρέπεται και η μέγιστη γωνία που σχηματίζει το νήμα με την αρχική κατακόρυφη θέση του είναι φ .

Να υπολογίσετε:

Α) Το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου του εκκρεμούς αμέσως μετά την κρούση.

Β) Το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}_1$ του σώματος Σ.

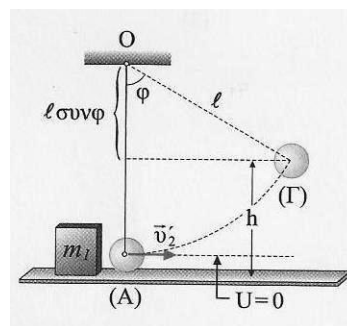
Γ) Το μέτρο της τάσης του νήματος του εκκρεμούς αμέσως μετά την κρούση.



Λύση

Α) Έστω $\vec{v}_2$ η ταχύτητα του σφαιριδίου αμέσως μετά την κρούση.

Κατά τη μετατόπιση του σφαιριδίου του εκκρεμούς από τη θέση Α στη θέση Γ, η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η συντηρητική δύναμη του βάρους του.



Από την **Α.Δ.Μ.Ε.** έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi(A)} = E_{\mu\eta\chi(\Gamma)} \Rightarrow K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = m_2 g h \Rightarrow$$

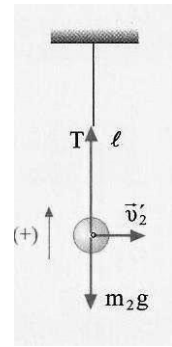
$$v_2'^2 = 2gh \Rightarrow v_2'^2 = 2g(l - l \cos \varphi) \Rightarrow v_2' = \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi)}$$

Β) Επειδή πριν από την κρούση το σφαιρίδιο του εκκρεμούς είναι ακίνητο ($v_2 = 0$) και η κρούση είναι μετωπική και ελαστική, ισχύει η σχέση:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{m_1 + m_2}{2m_1} v'_2$$

Γ) Έστω $\dot{T}$ η τάση του νήματος. Η συνισταμένη των $\dot{T}$ και $m_2 \dot{g}$ είναι η αναγκαία κεντρομόλος δύναμη που ασκείται στο σφαιρίδιο αμέσως μετά την κρούση, ώστε να διαγράψει κυκλική τροχιά. Άρα:

$$T - m_2 g = m_2 \frac{v_2'^2}{l} \Rightarrow T = m_2 \left(g + \frac{v_2'^2}{l} \right).$$



Παράδειγμα 2

Ξύλινος κύβος μάζας M , είναι ακίνητος πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής μ . Ένα βλήμα, μάζας m , κινείται οριζόντια και σφηνώνεται ακαριαία στο κέντρο μάζας του κύβου. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο δάπεδο και σταματάει, αφού διανύσει διάστημα s . Να υπολογίσετε:

- A) Το μέτρο της ταχύτητας V του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
 B) Το μέτρο της ταχύτητας v του βλήματος τη στιγμή που προσκρούει στον κύβο μάζας M .
 Γ) Το επί τοις εκατό ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας που έχασε το σύστημα κατά την κρούση.

Λύση

A) Μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα ολισθαίνει από τη θέση (Γ) στη θέση (Α), όπου τελικά σταματάει. Κατά τη διαδρομή ΓΑ οι δυνάμεις που ασκούνται στο συσσωμάτωμα είναι: το βάρος του $(M + m)\dot{g}$ και η αντίδραση $\dot{A}$ του επιπέδου με συνιστώσες την τριβή ολίσθησης $\dot{T}$ και την κάθετη αντίδραση $\dot{N}$.

Από την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - (M + m)g = 0 \Rightarrow N = (M + m)g.$$

Από το νόμο της τριβής έχουμε:

$$T = \mu N = \mu(M + m)g.$$

Από το θεώρημα έργου – ενέργειας για τις θέσεις (Γ) και (Α) του συσσωματώματος έχουμε:

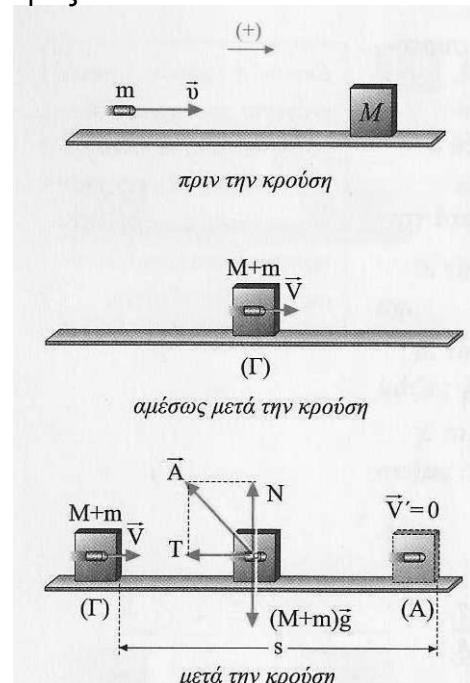
$$K_A - K_\Gamma = W_T \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}(M + m)V^2 = -Ts \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = \mu(M + m)gs \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{2\mu gs}$$

B) Από την **A.Δ.Ο.** για την κρούση του βλήματος με τον κύβο έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ,αρχ} = \vec{p}_{ολ,τελ} \Rightarrow mv + 0 = (M + m)V \Rightarrow v = \frac{(M + m)V}{m}.$$



Γ) Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν από την κρούση είναι:

$$K_{\pi\rho\nu} = \frac{1}{2}mv^2 + 0.$$

Η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση είναι:

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = K_{\pi\rho\nu} - K_{\mu\epsilon\tau} \Rightarrow E_{\alpha\pi\omega\lambda} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(M+m)V^2.$$

Το επί τοις εκατό ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας που έχασε το σύστημα κατά την κρούση είναι:

$$\pi\% = \frac{E_{\alpha\pi\omega\lambda}}{K_{\pi\rho\nu}} \cdot 100\%.$$

Παράδειγμα 3

Δύο σφαίρες Α και Β, που έχουν την ίδια μάζα m , κινούνται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες που είναι κάθετες μεταξύ τους και έχουν μέτρα v_1 και v_2 , αντίστοιχα. Οι σφαίρες συγκρούονται πλαστικά. Να βρείτε:

Α) Το μέτρο της ταχύτητας V του συσσωματώματος.

Β) Τη διεύθυνση της ταχύτητας V του συσσωματώματος.

Γ) Την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος.

Λύση

Α) Από την **Α.Δ.Ο.** για το σύστημα των δύο σωμάτων κατά άξονες έχουμε:

Στον άξονα x :

$$\overset{r}{p}_{x, \alpha\rho\chi} = \overset{r}{p}_{x, \tau\epsilon\lambda} \Rightarrow mv_1 = 2mV_x \Rightarrow V_x = \frac{v_1}{2}$$

Στον άξονα y :

$$\overset{r}{p}_{y, \alpha\rho\chi} = \overset{r}{p}_{y, \tau\epsilon\lambda} \Rightarrow mv_2 = 2mV_y \Rightarrow V_y = \frac{v_2}{2}$$

Από το σχήμα παίρνουμε:

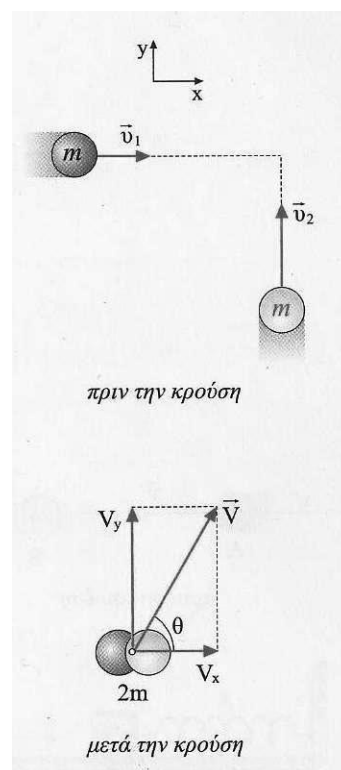
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}{2}.$$

Β) Από το σχήμα παίρνουμε επίσης:

$$\epsilon\phi\theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{v_2}{v_1}$$

Γ) Η απώλεια μηχανικής ενέργειας του συστήματος είναι:

$$E_{\alpha\pi\omega\lambda} = E_{\mu\eta\chi, \pi\rho\nu} - E_{\mu\eta\chi, \mu\epsilon\tau} \Rightarrow E_{\alpha\pi\omega\lambda} = \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \right) - \frac{1}{2}2mV^2.$$



Παράδειγμα 4

Σφαίρα μάζας m συγκρούεται μη κεντρικά με ακίνητη σφαίρα ίσης μάζας m . Η γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση ισούται με 90° . Η κρούση των δύο σφαιρών είναι:

α) ελαστική. β) ανελαστική.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

Λύση

Από την **Α.Δ.Ο.** έχουμε:

$$\vec{p}_{ολ,αρχ} = \vec{p}_{ολ,τελ} \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow mv = \sqrt{m^2 v_1^2 + m^2 v_2^2} \Rightarrow v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Επίσης είναι $K_{αρχ} = \frac{1}{2}mv^2$ και

$$K_{τελ} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow K_{τελ} = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) \Rightarrow K_{τελ} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Επειδή $K_{αρχ} = K_{τελ}$, η κρούση είναι ελαστική.