

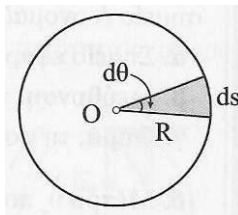
4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Επανάληψη

Επίκεντρη γωνία

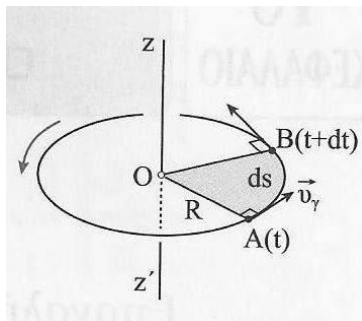
Αν $d\theta$ η επίκεντρη γωνία σε κύκλο ακτίνας R και ds το μήκος του αντίστοιχου τόξου τότε: $d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow ds = R \cdot d\theta$.



Γραμμική ταχύτητα

Η γραμμική ταχύτητα είναι εφαπτόμενη στον κύκλο και φορά τη φορά περιστροφής.

Μέτρο: $v_\gamma = \frac{ds}{dt}$



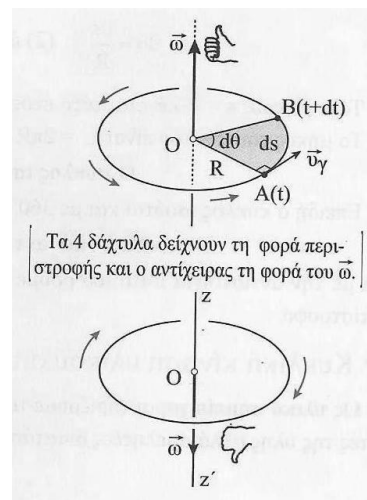
Γωνιακή ταχύτητα

Η γωνιακή ταχύτητα εφαρμόζεται στο κέντρο της κυκλικής τροχιάς και η φορά της καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Μέτρο: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ (rad/s)

Σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας

Έχουμε: $v_\gamma = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v_\gamma = \frac{R \cdot d\theta}{dt} \Rightarrow v_\gamma = \omega \cdot R$



Η επιτάχυνση στην κυκλική κίνηση

Επειδή στην κυκλική κίνηση η γραμμική ταχύτητα μεταβάλλεται έστω και αν το μέτρο της μένει σταθερό (γιατί αλλάζει η διεύθυνσή της), υπάρχει επιτάχυνση $\vec{a}$ που λέγεται **γραμμική επιτάχυνση**, η οποία έχει σημείο εφαρμογής το υλικό σημείο και κατεύθυνση προς το κοίλο της τροχιάς.

Η επιτάχυνση $\vec{a}$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες:

A) Την επιτρόχιο επιτάχυνση $\vec{a}_\epsilon$ που είναι κάθετη στη διεύθυνση της επιβατικής ακτίνας, εφαπτόμενη στον κύκλο και μεταβάλλει (αυξάνει ή μειώνει) το μέτρο της v_γ αλλά δεν αλλάζει τη διεύθυνση της κίνησης.

Έχει μέτρο: $\alpha_\epsilon = \frac{dv_\gamma}{dt}$ (m/s²)

B) Την κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{a}_\kappa$ που είναι πάνω στην επιβατική ακτίνα με φορά προς το κέντρο, αλλάζει τη διεύθυνση της κίνησης, αλλά δεν μπορεί να αλλάξει το μέτρο της v_γ .

Έχει μέτρο: $\alpha_\kappa = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$ (m/s²)

Όπως προκύπτει και από τα προηγούμενα σχήματα είναι:

$$\vec{a} = \vec{a}_\epsilon + \vec{a}_\kappa \Rightarrow \alpha = \sqrt{\alpha_\epsilon^2 + \alpha_\kappa^2}$$

Προφανώς στην **ομαλή κυκλική κίνηση** ($u = \text{σταθ.}$) είναι $\alpha_\epsilon = 0$ και

$$\alpha_\kappa = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R.$$

ΟΙ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Σε όλες τις κινήσεις που μελετούσαμε μέχρι τώρα, προκειμένου να απλοποιηθεί η μελέτη τους, θεωρούσαμε τα σώματα ως υλικά σημεία.

Το υλικό σημείο ορίζεται ως σώμα που έχει όλες τις άλλες ιδιότητες της ύλης εκτός από διαστάσεις.

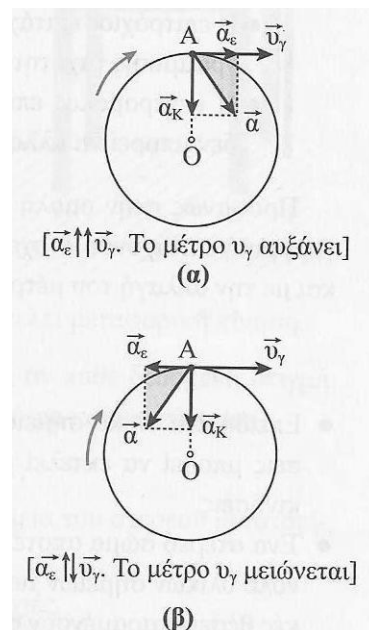
Ένα υλικό σημείο, μη έχοντας διαστάσεις, έχει τη δυνατότητα να εκτελεί **μόνο** μεταφορικές κινήσεις.

Στην πραγματικότητα όμως υλικά σημεία δεν υπάρχουν, αφού όλα τα σώματα όσο μικρά και αν είναι, έχουν διαστάσεις.

Αν σε κάποιο στερεό σώμα ασκηθούν δυνάμεις το σώμα παραμορφώνεται, λίγο ή πολύ, μόνιμα ή προσωρινά.

Τα υποθετικά στερεά που **δεν** παραμορφώνονται όταν τους ασκούνται δυνάμεις λέγονται **μηχανικά στερεά**.

Ένα στερεό σώμα μπορεί να κάνει μεταφορική, στροφική ή σύνθετη κίνηση.



ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Στη μεταφορική κίνηση κάθε στιγμή όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα.

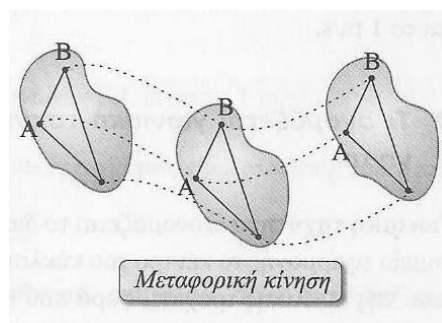
Μεταφορική μπορεί να είναι και μια καμπυλόγραμμη κίνηση.

Όταν ένα στερεό κάνει μεταφορική κίνηση, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του.

Οι τροχιές όλων των σημείων του σώματος είναι παράλληλες.

Στη μεταφορική κίνηση των στερεών σωμάτων ισχύουν οι νόμοι που διέπουν την κίνηση υλικών σημείων.

Παράδειγμα μεταφορικής κίνησης είναι η κίνηση που εκτελεί ένα κιβώτιο που ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο.



ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

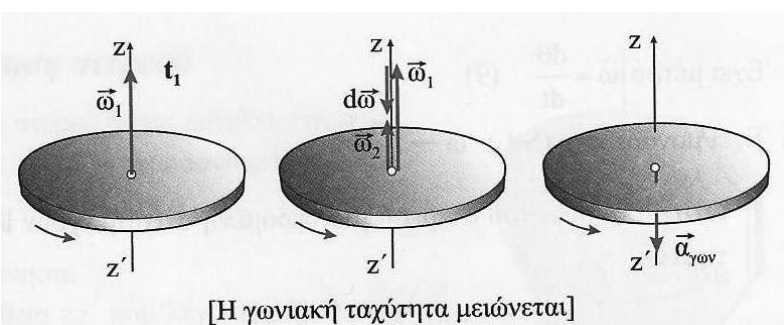
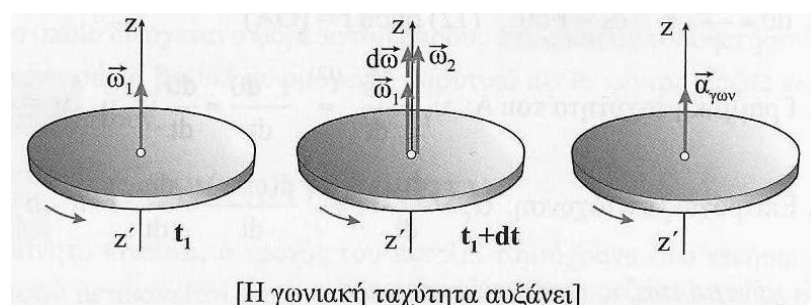
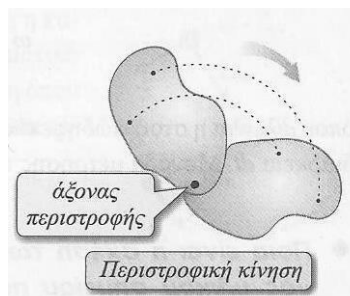
Στη στροφική κίνηση το σώμα αλλάζει προσανατολισμό.

Στη στροφική κίνηση υπάρχει μια ευθεία - ο **άξονας περιστροφής** - που όλα της τα σημεία παραμένουν ακίνητα ενώ τα υπόλοιπα σημεία του σώματος κάνουν κυκλική κίνηση, με διαφορετική ακτίνα περιστροφής.

Αν σε μια κυκλική κίνηση μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα ω , θα λέμε ότι έχουμε μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση. Έτσι έχουμε γωνιακή επιτάχυνση με

μέτρο $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt}$ (rad/s²) και φορά που καθορίζεται από τη φορά του

διανύσματος $d\vec{\omega}$ όπως φαίνεται και στα παρακάτω σχήματα.

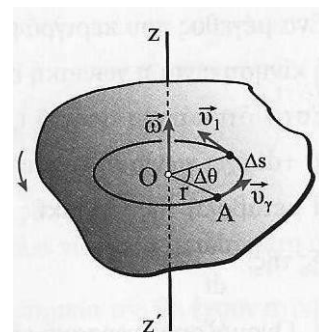


Σχέση γραμμικών και γωνιακών μεγεθών

A) $ds = R \cdot d\theta$

B) $v_\gamma = \omega \cdot R$

Γ) $\alpha_\varepsilon = \frac{dv_\gamma}{dt} \Rightarrow \alpha_\varepsilon = \frac{d(\omega \cdot r)}{dt} \Rightarrow \alpha_\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \cdot r \Rightarrow \alpha_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega v} \cdot r$



Το κέντρο μάζας.

Μια έννοια που απλοποιεί τη μελέτη του στερεού σώματος είναι η έννοια του κέντρου μάζας του σώματος.

Κέντρο μάζας (cm) ενός στερεού σώματος ονομάζεται το σημείο εκείνο του σώματος που κινείται όπως ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος, αν σε αυτό ασκούνταν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. (Το κέντρο μάζας ομογενών και συμμετρικών σωμάτων συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας τους)

Το κέντρο μάζας ενός σώματος μπορεί να βρίσκεται και έξω από το σώμα. (Τέτοια είναι η περίπτωση ισοπαχούς ομογενούς δακτυλίου)

ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ

Όταν ένα σώμα μετακινείται στο χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει ο προσανατολισμός του λέμε ότι κάνει σύνθετη κίνηση.

Για παράδειγμα σύνθετη κίνηση κάνει ο τροχός του αυτοκινήτου, όταν αυτό είναι σε κίνηση. Ο τροχός στρέφεται γύρω από τον άξονά του και ταυτόχρονα συμμετέχει στην μεταφορική κίνηση του αυτοκινήτου.

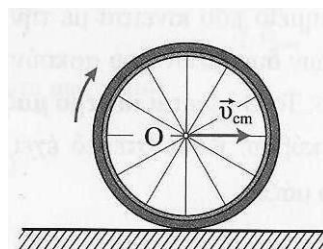
Η σύνθετη κίνηση μπορεί να περιγραφεί ως το αποτέλεσμα της επαλληλίας μιας μεταφορικής και μιας στροφικής κίνησης.

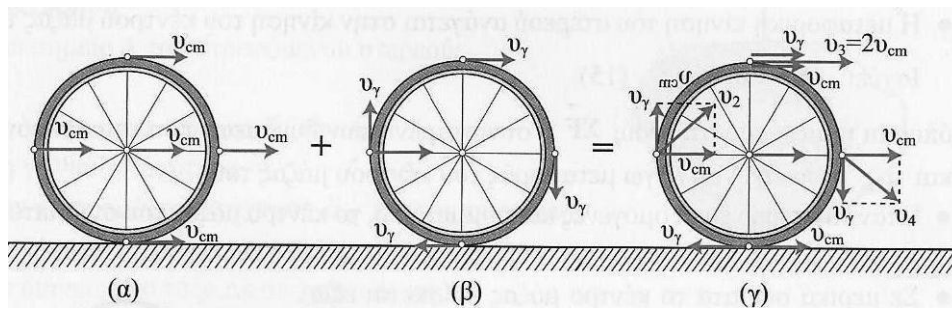
Το παράδειγμα της κύλισης του τροχού

Ο τροχός του σχήματος **κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει**. Ο τροχός εκτελεί μεταφορική κίνηση όπου όλα τα σημεία του έχουν κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα και ίση με την ταχύτητα v_{cm} του κέντρου μάζας (σχ. α).

Λόγω στροφικής κίνησης του τροχού γύρω από τον άξονα που περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος σε αυτόν, όλα τα σημεία που απέχουν το ίδιο από τον άξονα περιστροφής έχουν γραμμικές ταχύτητες εφαπτόμενες στην κυκλική τους τροχιά και ίσου μέτρου v_γ (σχ. β).

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας των κινήσεων κάθε σημείο του τροχού έχει κάθε στιγμή ταχύτητα ίση με το διανυσματικό άθροισμα $\vec{v}_{cm} + \vec{v}_\gamma$ των δύο ταχυτήτων (σχ. γ).





Συνθήκες κύλισης τροχού

Ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Το κέντρο του Κ εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση με ταχύτητα $\vec{v}_{cm}$. Έστω ότι σε χρόνο dt το Κ μετατοπίζεται κατά dx . Αφού ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, όσο είναι η μετατόπισή dx του κέντρου μάζας, τόσο είναι το μήκος ds του τόξου που διαγράφει ένα σημείο Α της περιφέρειας του τροχού στον ίδιο χρόνο dt , δηλ.

$dx = ds$ (αν $dx \neq ds$ ο τροχός κυλίεται με ολίσθηση).

Αν στο τόξο ds αντιστοιχεί επίκεντρη γωνία $d\theta$

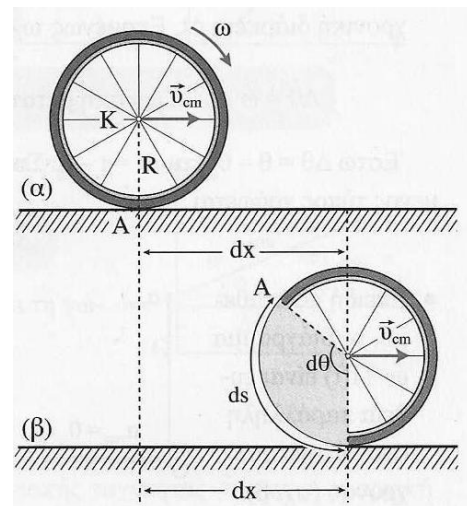
τότε: $d\theta = \frac{ds}{R}$ άρα:

$ds = R \cdot d\theta = dx$ (**1^η συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση**).

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:

$$v_{cm} = \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \Rightarrow v_{cm} = \frac{R \cdot d\theta}{dt} \Rightarrow v_{cm} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R$$

ή $v_{cm} = \omega \cdot R$ (**2^η συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση**).



Η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου Α της περιφέρειας του τροχού λόγω

περιστροφής έχει μέτρο $v_{\gamma} = \frac{R \cdot d\theta}{dt} \Rightarrow v_{\gamma} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R$.

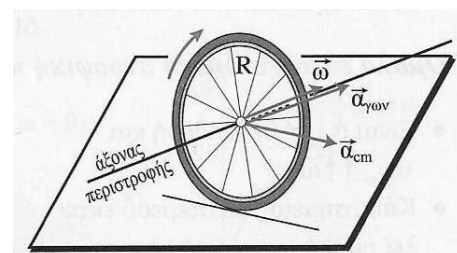
Άρα $v_{cm} = v_{\gamma}$.

Όταν ο τροχός εκτελεί μεταβαλλόμενη κίνηση τότε έχει:

- 1) γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{γων}$ λόγω της περιστροφής του και
- 2) επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{cm}$ λόγω της μεταφορικής του κίνησης.

Η σχέση μεταξύ των δύο επιταχύνσεων βρίσκεται ως εξής:

Από τη σχέση $v_{cm} = \omega \cdot R$ παίρνοντας ρυθμούς μεταβολής έχουμε:



$$\frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad \text{δηλ. } \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (3^{\text{η}} \text{ συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση}).$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω **η ταχύτητα των διαφόρων σημείων του τροχού που κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει προκύπτει ως εξής:**

Α) Τα σημεία του άξονα περιστροφής έχουν μόνο ταχύτητα λόγω μεταφοράς:

$$\vec{v} = \vec{v}_{cm} \quad \text{ενώ} \quad \vec{v}_{\gamma} = \vec{0}.$$

Β) Σημεία που ακουμπούν στο έδαφος π.χ. το Α: $\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma} = \vec{v}_{cm} - \vec{v}_{cm} = \vec{0}$ (ακίνητα).

Γ) Τα ανώτερα σημεία του τροχού π.χ. το Β (απέχουν απόσταση από το έδαφος κατά $2R$): $\vec{v}_B = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{cm} = 2\vec{v}_{cm}$.

Δ) Σημεία της περιφέρειας που απέχουν απόσταση από το έδαφος κατά R δηλ. τα σημεία Γ, Δ:

$$\vec{v}_\Gamma = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma} \quad \text{και} \quad \vec{v}_\Delta = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma}.$$

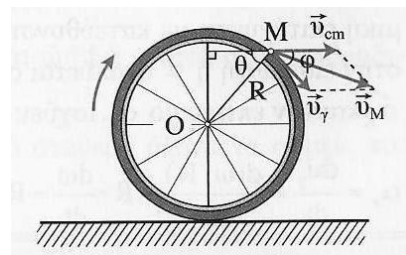
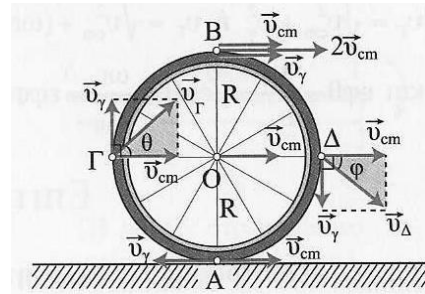
Άρα:

$$v_\Gamma = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma}^2} \quad \text{ή} \quad v_\Gamma = \sqrt{2v_{cm}^2} \quad \text{ή} \quad v_\Gamma = v_{cm}\sqrt{2} = v_\Delta$$

$$\text{και} \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{v_{\gamma}}{v_{cm}} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ = \varphi.$$

Ε) Τυχαιο σημείο Μ της περιφέρειας:

$$\begin{aligned} v_M &= \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma}^2 + 2v_{cm} \cdot v_{\gamma} \cdot \cos\varphi} = \\ &= \sqrt{v_{cm}^2 + v_{cm}^2 + 2v_{cm}^2 \cdot \cos\varphi} = \sqrt{2v_{cm}^2 + 2v_{cm}^2 \cdot \cos\varphi} = \\ &= v_{cm}\sqrt{2(1 + \cos\varphi)} \\ \text{με } \varphi + \theta &= 90^\circ. \end{aligned}$$



ΣΤ) Τα διάφορα εσωτερικά σημεία του τροχού απέχουν $r < R$ από τον άξονα περιστροφής. Τώρα είναι: $v_{\gamma} = \omega \cdot r < v_{cm}$.

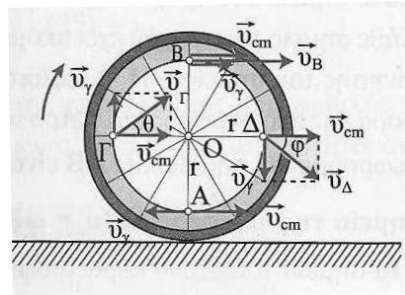
Έτσι:

$$1) \quad v_A = v_{cm} - v_{\gamma} \quad \text{ή} \quad v_A = v_{cm} - \omega \cdot r$$

$$2) \quad v_B = v_{cm} + v_{\gamma} \quad \text{ή} \quad v_B = v_{cm} + \omega \cdot r$$

$$3) \quad v_\Gamma = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma}^2} \quad \text{ή} \quad v_\Gamma = \sqrt{v_{cm}^2 + (\omega r)^2} = v_\Delta$$

$$\text{και} \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{v_{\gamma}}{v_{cm}} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{\omega r}{v_{cm}} = \varepsilon\varphi\phi.$$



Αντίστοιχα για τις **επιταχύνσεις** έχουμε:

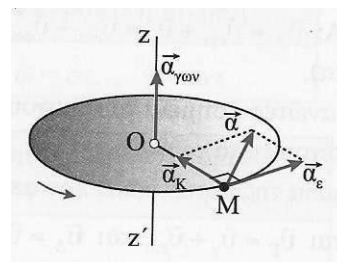
Α) Ο άξονας περιστροφής είναι ακλόνητος $z'z$ είναι ακλόνητος.

Στο στερεό έχουμε γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

και για ένα υλικό σημείο της περιφέρειας την επιτάχυνση $\vec{a}$ η οποία αναλύεται σε δύο συνιστώσες την επιτρόχιο επιτάχυνση $\vec{a}_\epsilon$ και την κεντρομόλο

επιτάχυνση $\vec{a}_\kappa$. Ισχύει:

$$\alpha_\epsilon = \frac{dv_\gamma}{dt} \Rightarrow \alpha_\epsilon = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} \Rightarrow \alpha_\epsilon = \frac{d\omega}{dt} \cdot R \Rightarrow \alpha_\epsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$



Β) Σύνθετη κίνηση του τροχού (κύλιση χωρίς ολίσθηση) .

Ο τροχός έχει γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}$, και τα σημεία του άξονα περιστροφής έχουν μεταφοράς επιτάχυνση $\vec{a}_{cm}$.

Κάθε άλλο σημείο M του τροχού έχει:

Γραμμική επιτάχυνση $\vec{a} = \vec{a}_\epsilon + \vec{a}_\kappa \Rightarrow \alpha = \sqrt{\alpha_\epsilon^2 + \alpha_\kappa^2}$, και επιτάχυνση $\vec{a}_{cm}$ λόγω μεταφοράς. Επομένως για το σημείο M έχουμε: $\vec{a} = \vec{a}_{cm} + \vec{a}_\epsilon + \vec{a}_\kappa$.

Ανάλογα με το **είδος των κινήσεων** που εκτελεί ένα στερεό έχουμε το παρακάτω τυπολόγιο:

Ευθύγραμμη ομαλή μεταφορική κίνηση.

$$v_{cm} = \text{σταθ.}$$

$$\Delta x_{cm} = v_{cm} \cdot \Delta t$$

$$\alpha_{cm} = 0$$

Ομαλή στροφική κίνηση.

$$\omega = \text{σταθ.}$$

$$\Delta \theta = \omega \cdot \Delta t$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$$

Ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση.

$$\alpha_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = \text{σταθ.}$$

$$v_{cm} = v_{cm(0)} + a_{cm} \cdot t$$

$$\Delta x_{cm} = v_{cm(0)}t + \frac{1}{2}a_{cm}t^2$$

Ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση.

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \text{σταθ.}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t$$

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$$

Ομαλά επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση.

$$\alpha_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = \text{σταθ.}$$

$$v_{cm} = v_{cm(0)} - |a_{cm}| \cdot t$$

$$\Delta x_{cm} = v_{cm(0)} t - \frac{1}{2} |a_{cm}| t^2$$

$$\text{Χρόνος μέχρι να σταματήσει να κινείται το στερεό: } t_{o\lambda} = \frac{v_{cm(0)}}{|a_{cm}|}$$

$$\text{Μετατόπιση μέχρι να σταματήσει να κινείται το στερεό: } \Delta x_{cm} = \frac{v_{cm(0)}^2}{2|a_{cm}|}$$

Ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση.

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \text{σταθ.}$$

$$\omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}| \cdot t$$

$$\Delta\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2} |\alpha_{\gamma\omega\nu}| t^2$$

$$\text{Χρόνος μέχρι να σταματήσει να κινείται το στερεό: } t_{o\lambda} = \frac{\omega_0}{|\alpha_{\gamma\omega\nu}|}$$

$$\text{Γωνιακή μετατόπιση μέχρι να σταματήσει να κινείται το στερεό: } \Delta\theta_{o\lambda} = \frac{\omega_0^2}{2|\alpha_{\gamma\omega\nu}|}$$

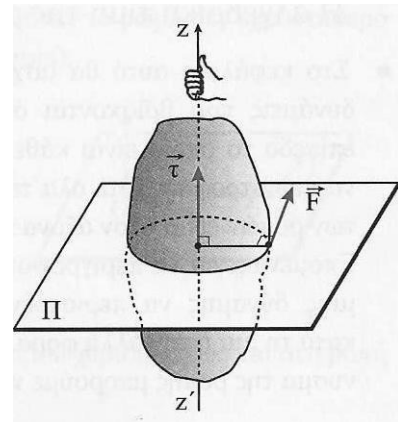
Αριθμός περιστροφών ενός στερεού όταν στρέφεται κατά γωνία $\Delta\theta$ ή όταν μετατοπίζεται κατά Δx .

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad \text{ή} \quad N = \frac{\Delta x}{2\pi R}$$

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Το φυσικό μέγεθος που εκφράζει την ικανότητα μιας δύναμης να στρέφει ένα σώμα λέγεται **ροπή δύναμης** ($\vec{\tau}$).

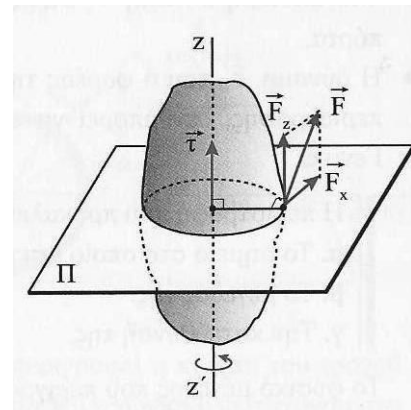
Η ροπή $\vec{\tau}$ της δύναμης $\vec{F}$ είναι διανυσματικό μέγεθος με διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής, φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού και μέτρο $\tau = F \cdot l$. Το l είναι η απόσταση του φορέα της δύναμης από τον άξονα περιστροφής και λέγεται **μοχλοβραχίονας**.
Η μονάδα της ροπής στο S.I. είναι το $1 \text{ N} \cdot \text{m}$.



Όταν η δύναμη $\vec{F}$ δε βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής, την αναλύουμε σε δύο συνιστώσες $\vec{F}_z$ και $\vec{F}_x$ όπου $\vec{F}_z \parallel z'z$ και $\vec{F}_x$ σε επίπεδο (Π) κάθετο στον άξονα $z'z$.

Η $\vec{F}_z$ δε δημιουργεί ροπή γιατί δεν τείνει να περιστρέψει το σώμα.

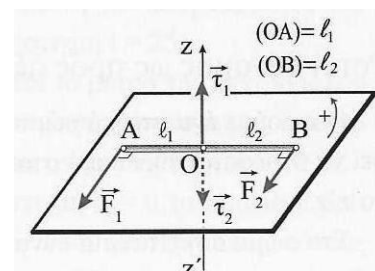
Επομένως η ροπή της $\vec{F}$ θα είναι ίση με τη ροπή της $\vec{F}_x$ ($\tau_{\vec{F}} = \tau_{\vec{F}_x}$).



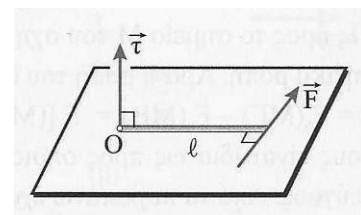
Στον υπολογισμό της **αλγεβρικής τιμής** της ροπής θεωρούμε κατά σύμβαση ως θετική τη ροπή που τείνει να περιστρέψει το σώμα αντίθετα από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

Έτσι στο παράδειγμα του σχήματος η ολική ροπή ως προς τον άξονα $z'z$ είναι:

$$\vec{\tau}_{ολ} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 \Rightarrow \tau_{ολ} = \tau_1 - \tau_2 \Rightarrow \tau_{ολ} = F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2$$



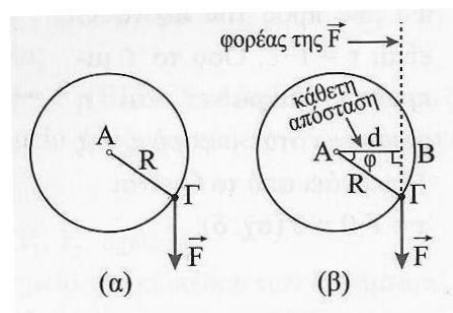
Η ροπή $\vec{\tau}$ της δύναμης $\vec{F}$ **ως προς σημείο O** είναι το διανυσματικό μέγεθος με μέτρο $\tau = F \cdot l$ όπου l η απόσταση της δύναμης από το σημείο O και διεύθυνση που είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το διάνυσμα της δύναμης και το σημείο O, ενώ η φορά της βρίσκεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Στον **υπολογισμό της ροπής δύναμης** να προσέχετε ότι:

A) Για τη ροπή της $\vec{F}$ ως προς το A είναι λάθος να πούμε ότι $\tau_F = F \cdot (A\Gamma)$.

Το σωστό προκύπτει από το σχ. β και είναι :
 $\tau_F = F \cdot (AB) = F \cdot d = F \cdot (A\Gamma) \cdot \sin\varphi = F \cdot R \cdot \sin\varphi$.

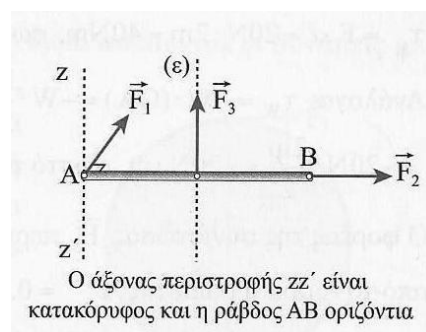


B) Η ροπή μιας δύναμης είναι μηδέν στις παρακάτω περιπτώσεις:

1) Όταν το σημείο εφαρμογής της είναι πάνω στον άξονα περιστροφής (π.χ. $\tau_{F_1} = 0$).

2) Όταν ο φορέας της δύναμης τέμνει τον άξονα περιστροφής (π.χ. $\tau_{F_2} = 0$).

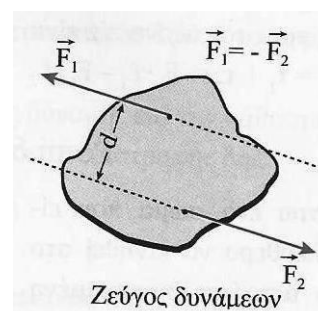
3) Όταν ο φορέας της δύναμης είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής (π.χ. $\varepsilon \parallel z'z$ είναι $\tau_{F_3} = 0$).



ΡΟΠΗ ΖΕΥΓΟΥΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ οι οποίες ασκούνται στο ίδιο σώμα, έχουν ίσα μέτρα ($F_1 = F_2 = F$), αντίθετη φορά και παράλληλους φορείς λέμε ότι αποτελούν ζεύγος δυνάμεων.

Η απόσταση d των φορέων των δυνάμεων του ζεύγους λέγεται μοχλοβραχίονας του ζεύγους.

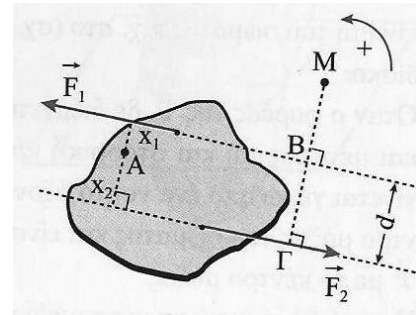


Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων είναι το διανυσματικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που αποτελούν το ζεύγος. Δηλαδή:

Έστω ένα **σημείο A** του επιπέδου των δυνάμεων. Στο σχήμα οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ δημιουργούν θετικές ροπές, άρα η ροπή του ζεύγους είναι:

$\tau = \tau_1 + \tau_2 \Rightarrow \tau = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2$ και αφού $F_1 = F_2$ είναι

$$\tau = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 = F_1 \cdot (x_1 + x_2) \quad \text{ή} \quad \tau = F_1 \cdot d.$$



Ως προς το σημείο M του σχήματος η $\vec{F}_2$ δημιουργεί θετική ροπή, ενώ η $\vec{F}_1$ αρνητική ροπή, άρα η ροπή του ζεύγους είναι:

$$\tau = F_2 \cdot (MG) - F_1 \cdot (MB) = F_1 \cdot [(MG) - (MB)] = F_1 \cdot (BG) = F_1 \cdot d$$

δηλ. **η ροπή του ζεύγους είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο ή άξονα κάθετο στο επίπεδο του ζεύγους.**

Τι προκαλεί το ζεύγος δυνάμεων

Έστω το ζεύγος δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

Επειδή $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ είναι $\Sigma \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 - \vec{F}_1 = \vec{0}$

και $\tau = F_1 \cdot d \neq 0$.

Δηλ. σε ένα ζεύγος δυνάμεων η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν, άρα το ζεύγος **δεν μπορεί** να μεταβάλλει τη μεταφορική κίνηση του σώματος.

Αντίθετα αφού $\Sigma \tau \neq 0$ το ζεύγος δυνάμεων **μπορεί** να προκαλέσει περιστροφή του σώματος.

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις θα πρέπει:

A) Η συνισταμένη των δυνάμεων να είναι μηδέν.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad (\Sigma F_x = 0 \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0).$$

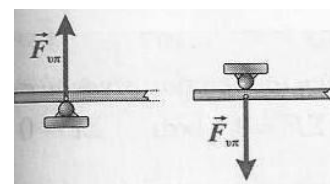
B) Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου των δυνάμεων να είναι μηδέν.

$$\Sigma \vec{\tau}_{o\lambda} = \vec{0}.$$

Συμπληρωματικές γνώσεις

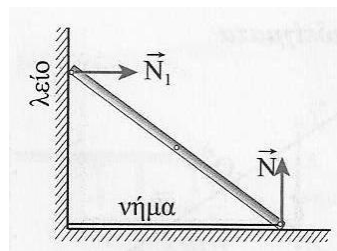
A) Δύναμη από στήριγμα.

Η δύναμη που δέχεται το σώμα από στήριγμα είναι πάντοτε κατακόρυφη και έχει φορά προς τα κάτω ή προς τα πάνω ανάλογα με τη θέση του στηρίγματος.



Β) Δύναμη από λείο επίπεδο.

Όταν ένα στερεό ακουμπάει σε λείο επίπεδο, η δύναμη $\vec{N}$ από το επίπεδο στο στερεό είναι κάθετη στο επίπεδο.



Γ) Στατική τριβή.

Όταν ένα στερεό ακουμπάει σε επίπεδο που δεν είναι λείο και ισορροπεί εμφανίζεται στατική τριβή που παρεμποδίζει την κίνησή του.

Η $\vec{T}_\sigma$ δεν έχει σταθερή τιμή αλλά παίρνει τιμές

$$0 \leq \vec{T}_\sigma \leq \vec{T}_{\sigma, \max}$$

όπου $T_{\sigma, \max}$ η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η

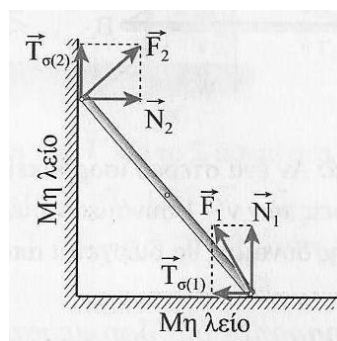
στατική τριβή. Ισχύει: $T_{\sigma, \max} = \mu_s \cdot N$

όπου μ_s ο συντελεστής στατικής οριακής τριβής.

Αν ένα σώμα ισορροπεί, θα εξακολουθεί να ισορροπεί

όσο είναι $T_\sigma \leq T_{\sigma, \max}$

ή $T_\sigma < \mu_s \cdot N$.



Δ) Δύναμη άρθρωσης.

Όταν ένα στερεό στηρίζεται σε άρθρωση, η δύναμη $\vec{F}$ από την άρθρωση στο σώμα υπολογίζεται από τα δεδομένα του προβλήματος.

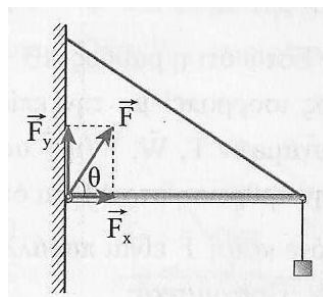
Συνήθως υπολογίζονται πρώτα οι συνιστώσες

της $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ οπότε $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ και $\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x}$.

Οι κατευθύνσεις των $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ προσδιορίζονται

από τις συνθήκες ισορροπίας:

$$\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0 \text{ και } \Sigma \tau = 0.$$



Ε) Ισορροπία τριών μη παραλλήλων ομοεπιπέδων δυνάμεων.

Στο διπλανό σχήμα το στερεό ισορροπεί με την επίδραση τριών μη

παραλλήλων ομοεπιπέδων δυνάμεων και οι φορείς

των $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ τέμνονται στο σημείο Ο. Θα αποδείξουμε

ότι και ο φορέας της $\vec{F}_3$ διέρχεται από το Ο.

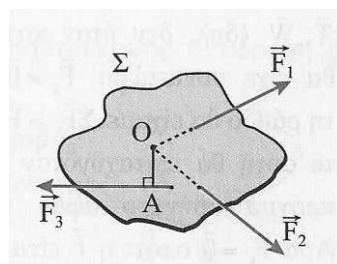
Πραγματικά:

Έστω ότι ο φορέας της $\vec{F}_3$ δε διέρχεται από το Ο και

ότι η απόσταση του Ο από φορέα της $\vec{F}_3$ είναι (ΟΑ).

Επειδή το στερεό ισορροπεί είναι :

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3} = 0 \Rightarrow 0 + 0 + F_3(OA) = 0 \Rightarrow (OA) = 0$$



Άρα το Α ταυτίζεται με το Ο, οπότε και ο φορέας της $\vec{F}_3$ διέρχεται από το Ο.
 Δηλαδή αν το στερεό ισορροπεί με την επίδραση **μη παραλλήλων** δυνάμεων τότε οι φορείς όλων των δυνάμεων διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ΣΤ) Αν στην άσκηση υπάρχει αβαρές και μη εκτατό νήμα αυτό ασκεί την ίδια δύναμη και στα δύο σώματα στα οποία είναι δεμένο.

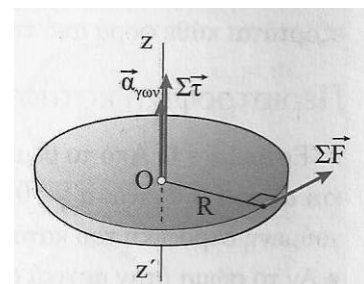
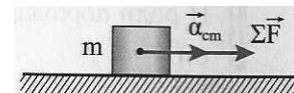
ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Όταν ένα στερεό σώμα μάζας m , κάνει μόνο μεταφορική κίνηση με την επίδραση συνισταμένης δύναμης $\Sigma \vec{F}$, όλα τα σημεία έχουν ίδια επιτάχυνση

$$\vec{a}_{cm} \text{ και ισχύει : } \Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_{cm} = m \cdot \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}$$

(Θεμελιώδης νόμος μεταφορικής κίνησης ή 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα).

Υπάρχει αντίστοιχος νόμος και στη στροφική κίνηση στερεού γύρω από **σταθερό** άξονα.



ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

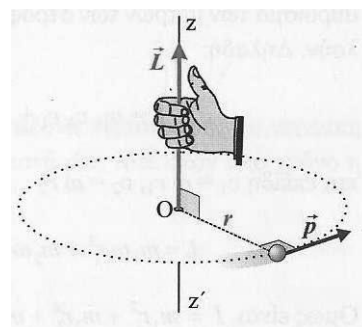
Μελετώντας την μεταφορική κίνηση ενός υλικού σημείου γνωρίσαμε την έννοια της ορμής ($\vec{p}$).

Το μέτρο της ορμής είναι ίσο με $p = mv$.

Το αντίστοιχο μέγεθος της ορμής για την στροφική κίνηση ενός στερεού, είναι η στροφορμή που την συμβολίζουμε με το σύμβολο $\vec{L}$.

Στροφορμή υλικού σημείου.

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο μάζας m που κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας r , έχοντας στιγμιαία ορμή $\vec{p} = m\vec{v}$, όπως στο σχήμα.



Ονομάζουμε **στροφορμή του υλικού σημείου**, ως προς έναν άξονα $z'z$ που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι κάθετος στο επίπεδο της, ένα διανυσματικό μέγεθος $\vec{L}$ που έχει:

- Α) Διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής.
- Β) Φορά τη φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.
- Γ) Μέτρο ίσο με το γινόμενο του μέτρου p της ορμής του υλικού σημείου επί την ακτίνα r της κυκλικής τροχιάς.

Δηλαδή: $L = p \cdot r = m \cdot v \cdot r$

Μονάδα μέτρησης της στροφορμής υλικού σημείου στο S.I. είναι το:
 $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Αν ω είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του υλικού σημείου, τότε έχουμε $v = \omega \cdot r$, δηλαδή: $L = m \cdot \omega \cdot r^2$.

Ο τρόπος ορισμού της στροφορμής έχει "πολλά κοινά" με τον ορισμό της ροπής ($\tau = F \cdot r$).

Τα διανύσματα της στροφορμής και της ροπής έχουν την ίδια διεύθυνση και η φορά τους προσδιορίζεται με τον ίδιο τρόπο. Άρα δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η απόσταση r από τον άξονα περιστροφής είναι η κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας ($\vec{v}$), ακριβώς όπως και ο μοχλοβραχίονας μιας δύναμης στην περίπτωση της ροπής.

Στροφορμή Στερεού σώματος.

Ονομάζουμε **στροφορμή ενός στερεού σώματος** το οποίο περιστρέφεται γύρω από άξονα περιστροφής $z'z$, το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών των στοιχειωδών μαζών που το αποτελούν, ως προς τον ίδιο άξονα.

Τη στροφορμή την οποία έχει ένα στερεό σώμα εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης που εκτελεί **γύρω από άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας του** την ονομάζουμε **ιδιοπεριστροφή (σπιν)**.

Αυτό το κάνουμε για να διακρίνουμε αυτού του είδους τη στροφορμή από τη στροφορμή που μπορεί να έχει το σώμα λόγω κάποιας άλλης κίνησης. Για παράδειγμα, η Γη έχει στροφορμή (τροχιακή στροφορμή) εξαιτίας της κίνησής της γύρω από τον Ήλιο και έχει επίσης σπιν εξαιτίας της περιστροφής της γύρω από τον άξονά της.

Αν έχουμε ένα **σύστημα σωμάτων**, και $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}_3, \dots$ οι στροφορμές των σωμάτων, τότε η στροφορμή του συστήματός τους θα είναι:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots$$

Γενικότερη διατύπωση του Θεμελιώδη Νόμου της στροφικής κίνησης

Θεωρούμε ότι η ροπή αδράνειας ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα είναι σταθερή και ότι σε απειροστά μικρό χρόνο dt η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται κατά $d\omega$, οπότε από την σχέση $L = I\omega$ προκύπτει:

$$L = I \cdot \omega \Rightarrow dL = I \cdot d\omega \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I \cdot \frac{d\omega}{dt} = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \Sigma \tau = \frac{dL}{dt}$$

Άρα:

Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν σε ένα στερεό, το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του.

Μονάδα μέτρησης του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής στο S.I. είναι το: $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$.

Ο νόμος της στροφικής κίνησης σε σύστημα σωμάτων

Σε ένα σύστημα σωμάτων το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών, δηλαδή εκείνων που οφείλονται σε εσωτερικές δυνάμεις καθώς και εκείνων που οφείλονται σε εξωτερικές δυνάμεις είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

Όμως **η ροπή των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδενική**. Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται σε ζεύγη δράσης - αντίδρασης, οπότε οι ροπές τους αλληλοαναιρούνται και έτσι σε ένα σύστημα σωμάτων ο θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης μπορεί να γραφτεί:

$$\Sigma \tau_{\epsilon\xi} = \frac{dL}{dt}$$

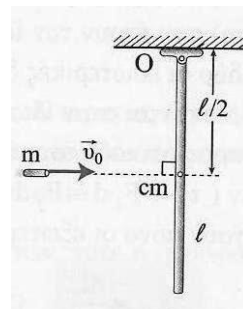
όπου βέβαια το $\Sigma \tau_{\epsilon\xi}$ είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων, ως προς κάποιο άξονα περιστροφής και L η στροφορμή του συστήματος, ως προς τον ίδιο άξονα.

Παραδείγματα στροφορμής.

Παράδειγμα 1

Η στροφορμή του βλήματος ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο ράβδου – βλήματος, που περνάει από το O

είναι: $L = m \cdot v_0 \cdot r = m \cdot v_0 \cdot \frac{\ell}{2}$



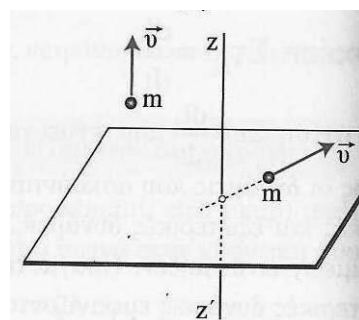
Παράδειγμα 2

Ένα υλικό σημείο μάζας m δεν έχει στροφορμή ως προς άξονα $z'z$ όταν:

A) Είναι ακίνητο ($v=0$).

B) Κινείται παράλληλα στον άξονα $z'z$.

Γ) Ο φορέας της ταχύτητας $\vec{v}$ τέμνει τον άξονα $z'z$ (γιατί $r=0$).



Παράδειγμα 3

Στην περίπτωση όπου **το στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από άξονα** (δηλαδή εκτελεί κίνηση γύρω από άξονα που δεν περνά από κάποιο σημείο του), τότε η στροφορμή του (τροχιακή στροφορμή) κατά τον άξονα αυτόν υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L_{\text{τροχ}} = m \cdot v_{\text{cm}} \cdot d$$

όπου d η απόσταση του κέντρου μάζας του σώματος από τον άξονα περιστροφής.

Δηλαδή υπολογίζεται θεωρώντας ότι όλη η μάζα του στερεού είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας του.

Μεταβολή στροφορμής

Αν $\vec{L}_{\text{αρχ}}$ και $\vec{L}_{\text{τελ}}$ η αρχική και η τελική στροφορμή ενός στερεού βρίσκουμε τη μεταβολή της στροφορμής $\Delta \vec{L}$ από τη διανυσματική πρόσθεση των $-\vec{L}_{\text{αρχ}}$ και $\vec{L}_{\text{τελ}}$ μιας και ισχύει: $\Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}} - \vec{L}_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}} + (-\vec{L}_{\text{αρχ}})$.

Παραδείγματα μεταβολής στροφορμής.

Παράδειγμα 1

Ένας δίσκος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω . Κάποια στιγμή ο δίσκος αρχίζει να στρέφεται αντίθετα γύρω από τον ίδιο άξονα με γωνιακή ταχύτητα ίσου μέτρου ω .

A) Είναι $|L_{\text{αρχ}}| = |L_{\text{τελ}}|$

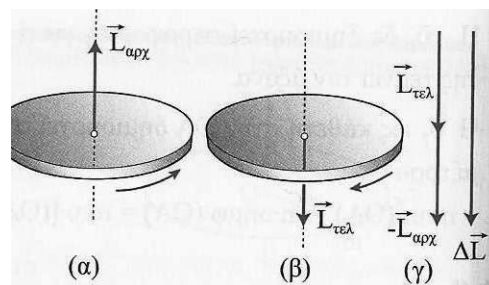
Η μεταβολή του μέτρου της στροφορμής του δίσκου είναι:

$$\Delta|L| = |L_{\text{τελ}}| - |L_{\text{αρχ}}| = 0.$$

B) Η μεταβολή της στροφορμής είναι:

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}} - \vec{L}_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta\vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}} + (-\vec{L}_{\text{αρχ}}) \text{ και}$$

φαίνεται στο σχήμα (γ).

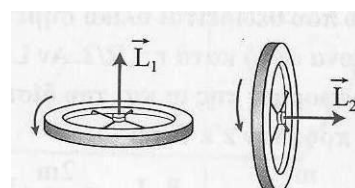


Έτσι το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής είναι:

$$|\Delta\vec{L}| = |\vec{L}_{\text{τελ}}| + |-\vec{L}_{\text{αρχ}}| \Rightarrow |\Delta\vec{L}| = I\omega + I\omega \Rightarrow |\Delta\vec{L}| = 2I\omega.$$

Παράδειγμα 2

Ένας τροχός περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με γωνιακή ταχύτητα ω . Κάποια στιγμή στρέφουμε τον άξονά του κατά 90° χωρίς μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας.



A) Η μεταβολή του μέτρου της στροφορμής του δίσκου είναι:

$$\Delta|L| = |L_2| - |L_1| = |L_1| - |L_1| = 0.$$

B) Η μεταβολή της στροφορμής είναι:

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \Rightarrow \Delta\vec{L} = \vec{L}_2 + (-\vec{L}_1).$$

Η πρόσθεση των διανυσμάτων $\vec{L}_2$ και $-\vec{L}_1$ φαίνεται στο σχήμα. Από αυτό

βρίσκουμε ότι το μέτρο της $\Delta\vec{L}$ είναι:

$$|\Delta\vec{L}| = \sqrt{(-\vec{L}_1)^2 + \vec{L}_2^2} = \sqrt{L_1^2 + L_1^2} = \sqrt{2 \cdot L_1^2} = L_1 \cdot \sqrt{2}.$$

Παράδειγμα 3

Ένας τροχός περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με γωνιακή ταχύτητα ω . Κάποια στιγμή στρέφουμε τον άξονά του κατά 60° χωρίς μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας.

Η αρχική στροφορμή έχει μέτρο $L_{αρχ} = I \cdot \omega$ και

η τελική στροφορμή έχει μέτρο $L_{τελ} = I \cdot \omega$.

Είναι $|L_{αρχ}| = |L_{τελ}|$.

Α) Η μεταβολή του μέτρου της στροφορμής του τροχού είναι:

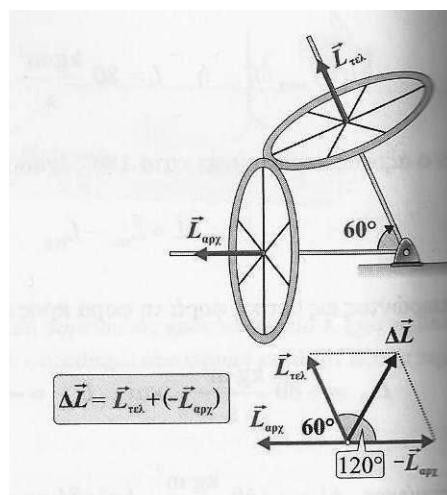
$$\Delta|L| = |L_{τελ}| - |L_{αρχ}| = 0.$$

Β) Η μεταβολή της στροφορμής είναι:

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_{τελ} - \vec{L}_{αρχ} \Rightarrow \Delta \vec{L} = \vec{L}_{τελ} + (-\vec{L}_{αρχ}).$$

Από το σχήμα προκύπτει:

$$|\Delta \vec{L}| = \sqrt{L_{τελ}^2 + L_{αρχ}^2 + 2L_{αρχ}L_{τελ} \cdot \cos 120^\circ}$$



ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

Αν στην γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδη νόμου της στροφικής κίνησης

θέσουμε $\Sigma \tau = 0$ τότε: $\Sigma \tau = \frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = \text{σταθ.}$

Δηλαδή: Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων που δρουν σε ένα στερεό σώμα (ως προς κάποιο άξονα) είναι μηδέν, η στροφορμή του σώματος (ως προς τον ίδιο άξονα) παραμένει σταθερή.

Για ένα σύστημα σωμάτων είναι προφανές ότι αν $\Sigma \tau_{εξ} = 0$ τότε η στροφορμή του συστήματος των σωμάτων θα παραμένει σταθερή.

$$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ}$$

(Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής)